∽ Baccalauréat Orléans septembre 1967 ∾
Mathématiques élémentaires et mathématiques et technique

I.

Les lettres e et x désignant respectivement la base des logarithmes népériens et l'inconnue, résoudre, sur le corps des réels, l'équation

$$\mathrm{e}^{-5x} - \mathrm{e}^{-3x} : -2\mathrm{e}^{-x} = 0.$$

II.

1. n étant un entier supérieur à 1, déterminer le PGCD des nombres entiers

$$n(n+1) \quad \text{et} \quad (n-1)(n+2).$$

On pourra, pour cela, former leur différence.
Qu'en conclure pour les nombres

$$a = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad b = \frac{(n-1)(n+2)}{2}?$$

2. n étant un entier supérieur à 2, on considère les nombres

$$b = \frac{(n-1)(n+2)}{2} \quad \text{et} \quad c = \frac{(n-2)(n+3)}{2}.$$

Déterminer le PGCD de b et c, suivant la valeur du reste de la division de n par 4.

III.

On considère un plan orienté rapporté à un repère orthonormé direct $x'\mathrm{O}x$, $y'\mathrm{O}y$.
À tout point M du plan, de coordonnées $(a~;~b)$, on associe le polynôme de la variable complexe z

$$\mathrm{P_M}(z) = z^2 - 2az + b.$$

On désigne par (Π) l'ensemble des points M tels que $\mathrm{P_M}(z)$ ait une racine double, par E(Π) l'ensemble des points M tels que $\mathrm{P_M}(z)$ ait deux racines réelles distinctes.

1. **a.** On suppose que M appartient à (Π).
Former l'équation de la tangente en M à (Π) en fonction de l'abscisse, a, de M.

b. On suppose que M appartient à E(Π). Montrer que les zéros, z_1 et z_2 de $\mathrm{P_M}(z)$ représentent les abscisses des points de contact, U et V, des tangentes à (Π) passant par M : on pourra commencer par écrire l'équation de la tangente en U à (Π) et montrer qu'elle passe par M.
Calculer, en fonction de a et b, les coordonnées du milieu, M′, de UV et du point d'intersection, K, de MM′ avec (Π).
Que peut-on dire des points M, M′ et K?

2. Dans cette question on introduit, d'autre part, le plan complexe (Γ) rapporté à un repère orthonormé direct $\mathrm{X}'\omega\mathrm{X}$, $\mathrm{Y}'\omega\,\mathrm{Y}$.
M, M′ et K désignant les points de la question **1. b.**, on considère :

- les racines réelles, z_1, z_2 du polynôme $\text{P}_{\text{M}}(z)$ et leurs images respectives, I_1, I_2, dans (Γ) ;
- les racines, z'_1, z'_2, du polynôme $\text{P}_{\text{M}}(z)$ et leurs images respectives, I'_1, I'_2, dans (Γ) : indiquer la nature de z'_1 et z'_2 ; les calculer en fonction de a et b ;
- la racine double du polynôme $\text{P}_{\text{K}}(z)$ et son image, J, dans (Γ).

Démontrer que I_1, I_22, I'_1 et I'_2 sont situés sur un cercle (C), de centre J.
Quelle est la puissance de ω par rapport à (C) ?
On suppose que M décrit la droite (D) d'équation $y = -1$.
Montrer que (C) passe par deux points fixes.