∽ Baccalauréat C juin 1979 Outre-Mer ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Soit α, β, γ trois réels donnés, deux à deux distincts ; a, b, c sont trois paramètres réels ; on leur associe la fonction numérique f de variable réelle :

$$x \longmapsto f(x) = \frac{ax^3}{x+\alpha} + \frac{bx^3}{x+\beta} + \frac{cx^3}{x+\gamma}$$

1. Former des conditions nécessaires et suffisantes, portant sur a, b, c, pour que la fonction f admette une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

(Aucune autre étude concernant la fonction f n'est demandée).

On posera éventuellement $h(x) = \dfrac{a\alpha^3}{x+\alpha} + \dfrac{b\beta^3}{x+\beta} + \dfrac{c\gamma^3}{x+\gamma}$.

2. Trouver $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(x^3\left[\frac{\beta-\gamma}{x+\alpha} + \frac{\gamma-\alpha}{x+\beta} + \frac{\alpha-\beta}{x+\gamma}\right]\right)$.

3. Considérant à nouveau la fonction f, montrer que

$$\text{si } \lim_{x\to+\infty} f = 0, \quad \text{alors } (a,\, b,\, c) = (0,\, 0,\, 0)$$

EXERCICE 2 **4 points**

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \mathrm{e}^x \cos x.$$

1. Calculer la dérivée f' de f et mettre $f'(x)$ sous la forme :

$$f'(x) = A\mathrm{e}^x \cos(x+a),$$

A et a étant des constantes que l'on calculera,

2. Calculer la dérivée huitième de f.

3. Déterminer une fonction F vérifiant :

$$\text{pour tout } x \text{ réel}, \quad F'(x) = f(x), \text{ et } F(0) = \frac{1}{2}.$$

Application :

Calculer

$$\int_0^{\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{x} \mathrm{e}^t \cos t\, \mathrm{d}t\right) \mathrm{d}x.$$

PROBLÈME **12 points**

Le plan affine euclidien P est rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\, \overrightarrow{\imath},\, \overrightarrow{\jmath}\right)$, noté (ω). On désigne par H la courbe du plan P dont une équation dans (ω) est

$$y^2 - 3x^2 = 1.$$

Partie A

1. Sur une figure réalisée avec l'unité 1 cm, tracer H.
Soit

$$\overrightarrow{u} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}\right), \quad \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}\right)$$

Que représentent les droites $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}\right)$ et $\left(\text{O}, \overrightarrow{v}\right)$ pour H ?
(On placera sur la figure les représentants de u et v d 'origine O).
Le repère $\left(\text{O} ; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ étant noté (Ω), écrire les relations de passage entre les coordonnées $x,\ y$ d'un point M de P dans (ω) et les coordonnées $X,\ Y$ de ce point dans (Ω). Former une équation de H dans (Ω).
2. On désigne par H^+ la partie de H située dans le demi-plan $y > 0$; à chaque point M de H^+ on associe son abscisse $X = \varphi(M)$ dans (Ω).
Montrer que φ est une bijection de H^+ sur $\mathbb{R}_+^\star$; exprimer inversement en fonction de X les coordonnées $x,\ y$ dans (ω) du point $\varphi^{-1}(X)$.
3. Soit $(M,\ M')$ un bipoint de H^+, M (resp. M') admettant dans (ω) les coordonnées $(x ;\ y)$ (resp. $\left(x' ;\ y'\right)$. On pose :

$$(1) \qquad \delta(M,\ M') = xy' - x'y$$

Si $X = \varphi(M)$, démontrer

$$(2) \qquad \delta(M,\ M') = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{X}{X'} - \frac{X'}{X}\right).$$

Partie B

L'objet de cette partie est d'étudier le sous-ensemble E de H^+ formé des points de H^+ dont les coordonnées dans (ω) sont entières $\left[(x ;\ y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+\right]$.
On placera à titre d'essai les points de E dont les carrés des deux coordonnées sont inférieurs à 50.
Soit τ l'application affine de P dans P dont les équations dans (ω) sont :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & 2x + y \\ y' & = & 3x + 2y \end{array}\right.$$

On pose : $a = 2 + \sqrt{3}$.
Si A, B, C sont trois points de H^+, on convient de dire que B est « entre A et C » si le réel $\varphi(\text{B})$ est compris entre les réels $\varphi(\text{A})$ et $\varphi(\text{C})$.

1. Démontrer que τ conserve H, que τ conserve H^+, que τ conserve E. Vérifier :

$$(\forall M \in H^+), \quad \varphi[\tau(M)] = a \cdot \varphi(M)$$

2. Pour chaque $k \in \mathbb{Z}$ on pose $A_k = \varphi^{-1}\left(a^k\right)$.
Montrer que tous les points A_k appartiennent à E.
Calculer $\delta\left(A_k,\ A_{k-1}\right)$ et $\delta\left(A_k,\ A_{k+1}\right)$.
3. L'entier k étant fixé, utiliser $\delta\left(A_k,\ M\right)$ pour prouver que A_k est le seul point de E entre A_{k-1} et A_{k+1} sur H^+. (On observera, sous la forme (1), que si $M \in$ E, $\delta\left(A_k,\ M\right)$ est entier, d sous la forme (2) que $X = \varphi(M)$ et $\delta\left(A_k,\ M\right)$ varient en sens contraires).
Quelle est l'image de E par φ.

Partie C

L'objet de cette partie est d'examiner l'ensemble, G des applications affines g de P tellles que $g(\mathrm{O}) = \mathrm{O}$ et $g(\mathrm{E}) = \mathrm{E}$.

1. Montrer que $(G, \circ)$ est un groupe.
2. Montrer que les seuls éléments de G conservant le point A_0 sont l'application identique de P et la symétrie orthogonale σ, d'axe $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\jmath}\right)$. À cet effet, en supposant que $g \in G$ et $g\left(A_0\right) = A_0$, on étudiera l'action de g sur un bipoint $\left(A_k~;~A_{-k}\right)$.
3. Soit g un élément quelconque de G. On désigne par A_m l'image $g\left(A_0\right)$.
   Que peut-on dire de $\tau^{-m} \circ g$?
   Montrer que g est, soit τ^m, soit $\tau^{-m} \circ g$.