∽ Baccalauréat C Outre-mer septembre 1980 ∾

EXERCICE 1

P est le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{e_1},~\overrightarrow{e_2}\right)$.

1. M est un point quelconque de P, d'affixe $z = x + \text{i}y$.
   Déterminer l'ensemble des points M de P tels que

$$(1) \qquad \left|(1+\text{i})\overline{z} - 2\text{i}\right| = 2.$$

2. Soit s l'application affine de P dans P qui, au point M d'affixe z, fait correspondre le point M' d'affixe z' défini par

$$(2) \qquad z' = (1+\text{i})\overline{z} - 2\text{i}.$$

   Caractériser géométriquement s. Interpréter géométriquement le résultat du **1.**

EXERCICE 2

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie sur $]-1~;~+\infty[$:

$$x \neq 0, \quad f(x) = [\text{Log}(x+1)] \times \text{E}\left(\cos\frac{\pi}{x}\right) \quad \text{et} \quad f(0) = 0$$

où $\text{E}(x)$ est l'unique entier relatif n tel que $n \leqslant x < n+1$.

1. f est-elle continue pour $x = 0$?
2. Étudier la restriction $\hat{f}$ de f à $\text{I} = \left[\dfrac{1}{2}~;~4\right]$ et étudier la continuité de $\hat{f}$.

   Construire la courbe représentative de $\hat{f}$ dans un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$. (Prendre 3 cm comme unité de longueur.)
3. $\hat{f}$ est-elle intégrable sur I ? Si oui, calculer $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{4} \hat{f}(x)\,\text{d}x$.

PROBLÈME

Partie A

$\mathscr{P}$ est le plan vectoriel dont une base est $\left(\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$.

1. Soit t un réel appartenant à l'intervalle $[0~;~\pi]$, et φ, l'endomorphisme de $\mathscr{P}$ dont la matrice dans la base $\left(\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$ est

$$M = \begin{pmatrix} 2+\cos t & -\cos t \\ 5+3\cos t & 3+\cos t \end{pmatrix}.$$

   Pour quelles valeurs de t, φ est-il bijectif ? Non bijectif ?

2. On suppose $t = \pi$. Déterminer l'image D de φ, et son noyau D$'$.
Montrer que $\mathrm{D} \oplus \mathrm{D}' = \mathscr{P}$.
Soit $\overrightarrow{i'}$ une base de D, et $\overrightarrow{j'}$ une base de D$'$. Quelle est la matrice de φ dans la base $\left(\overrightarrow{i'},\ \overrightarrow{j'}\right)$?
Montrer qu'il existe une projection vectorielle p, et une homothétie vectorielle h, telle que

$$p \circ h = h \circ p = \varphi.$$

Définir avec précision p et h.

3. a est un réel quelconque. Soit $\varphi_{(a)}$ l'endomorphisme de $\mathscr{P}$ défini par

$$\varphi_{(a)}\left(\overrightarrow{\imath}\right) = \varphi_{(a)}\left(\overrightarrow{\jmath}\right) = a\left(\overrightarrow{\imath} + 2\overrightarrow{\jmath}\right).$$

Montrer que, pour tout $a \neq 0$, $\mathrm{Im}\ \varphi_{(a)} = \mathrm{D}$ et $\mathrm{Ker}\ \varphi_{(a)} = \mathrm{D}'$.
D et D$'$ étant les droites vectorielles définies au **2.** calculer la matrice de $\varphi_{(a)}$ dans la base $\left(\overrightarrow{i'},\ \overrightarrow{j'}\right)$.

4. Soit Φ l'ensemble des endomorphismes $\varphi_{(a)}$, lorsque a décrit $\mathbb{R}$.
Montrer que la composition des endomorphismes de $\mathscr{P}$ est une loi interne commutative dans Φ. Cette loi est notée $(\circ)$.
$\Phi - \{\varphi_{(0)}\}$ a-t-il une structure de groupe pour la loi $\circ$?
Φ a-t-il une structure de corps vis-à-vis de l'addition et de la composition des endomorphismes?
Résoudre dans Φ l'équation

$$2x^2 - 3x + \varphi\left(\frac{1}{3}\right) = \varphi_{(0)}.$$

(Pour $x \in \Phi$, $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $x \circ x = x^2$ et on désigne par $\lambda \cdot x$ l'endomorphisme de $\mathscr{P}$ tel que quel que soit $\overrightarrow{v} \in \mathscr{P}$

$$(\lambda \cdot x)\left(\overrightarrow{v}\right) = \lambda \cdot \left(x\left(\overrightarrow{v}\right)\right).$$

Partie B

Dans cette partie, on appelle Ψ l'endomorphisme de $\mathscr{P}$ défini par : $\Psi = \varphi_{(2)} - 3\mathrm{I}$ ($a = 2$, et I est l'application identique dans $\mathscr{P}$).

1. Montrer que les droites vectorielles D et D$'$ de la partie A sont globalement invariantes par Ψ.
Quelle est la matrice de Ψ dans la base $\left(\overrightarrow{i'},\ \overrightarrow{j'}\right)$?
Montrer qu'il existe une symétrie vectorielle s et une homothétie vectorielle h' telles que

$$\Psi = s \circ h' = h' \circ s.$$

Préciser les éléments caractéristiques de s et de h', sachant que le rapport k de h' est positif.

2. Soit $\overrightarrow{\mathrm{U}_0} = x_0\overrightarrow{\imath} + y_0\overrightarrow{\jmath}$.
On pose $\overrightarrow{\mathrm{U}_1} = \Psi\left(\overrightarrow{\mathrm{U}_0}\right) = x_1\overrightarrow{\imath} + y_1\overrightarrow{\jmath}$.
$\overrightarrow{\mathrm{U}_2} = \Psi \circ \Psi\left(\overrightarrow{\mathrm{U}_0}\right) = \Psi^{(2)}\left(\overrightarrow{\mathrm{U}_0}\right) == x_2\overrightarrow{\imath} + y_2\overrightarrow{\jmath} \ldots$
$\overrightarrow{\mathrm{U}_n} = \Psi\left(\overrightarrow{\mathrm{U}_{n-1}}\right) = \Psi^n\left(\overrightarrow{\mathrm{U}_0}\right) = x_n\overrightarrow{\imath} + y_n\overrightarrow{\jmath}$.

a. Calculer les coordonnées X_0 et Y_0 de $\overrightarrow{\mathrm{U}_0}$ dans la base $\left(\overrightarrow{i'},\ \overrightarrow{j'}\right)$, en fonction de x_0 et y_0.

b. Calculer en fonction de X_0 et Y_0 et de n, les coordonnées X_n et Y_n dans la base $\left(\overrightarrow{i'},\ \overrightarrow{j'}\right)$.
En déduire les coordonnées x_n et y_n de $\overrightarrow{U_n}$ en fonction de x_0, y_0 et de n.

Partie C

P est le plan affine de direction $\mathscr{P}$ et dont $\left(O\,;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ est un repère. Soit f l'application affine de P dont l'endomorphisme associé est Ψ et telle que $f(O) = O'$ avec $\overrightarrow{OO'} = 2\overrightarrow{\imath} - 8\overrightarrow{\jmath}$.

1. Montrer que P admet un point invariant unique A par f.
Donner les coordonnées de A.

2. Montrer qu'il existe une symétrie affine S d'endomorphisme associé s et une homothétie affine H d'endomorphisme associé h' telles que

$$f = S \circ H = H \circ S.$$

Déterminer les éléments de S et H.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit les points $B_0, B_1, B_2, \ldots, B_n$ tels que

$$\overrightarrow{OB_0} = \overrightarrow{\imath}, \quad B_1 = f(B_0), \quad B_2 = f(B_1), \ldots, B_n = f(B_{n-1}).$$

Montrer que ces points appartiennent à l'une ou l'autre des droites Δ_1 et Δ_2 que l'on déterminera.
Préciser, selon la parité de n, l'appartenance de B_n à Δ_1 ou Δ_2.