Baccalauréat C Territoires d'Outre-mer juin 1970

EXERCICE 1

Trouver les nombres de deux chiffres qui s'écrivent ab dans la base 10 et ba dans la base 7.

EXERCICE 2

1. Étudier la fonction f, de la variable réelle x, définie pour $x \neq -1$ par

$$x \longmapsto 2x-1+\frac{1}{x+1} = f(x) = y$$

   Tracer sa courbe représentative (C), dans le plan rapporté à un système d'axes orthonormé $x'Ox$ et $y'Oy$.
2. Déterminer l'aire de la portion de plan comprise entre la courbe (C), l'asymptote oblique de (C), l'axe $x'Ox$ et la droite parallèle à $y'Oy$ d'abscisse $x = 2$.

PROBLÈME

Soit P un plan rapporté à un système d'axes orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$. On désigne par $P^\star$ le plan P privé du point O.
À toute application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui, à $z = x + \mathrm{i}y$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, fait correspondre $Z = X + \mathrm{i}Y$, $X \in \mathbb{R}$, $Y \in \mathbb{R}$, défini par $Z = f(z)$, on associe la transformation T_f de P dans P qui, au point m de coordonnées x et y, fait correspondre le point M de coordonnées X et Y.

1. Montrer que la transformation T_g de $P^\star$ dans $P^\star$, associée à l'application g définie par

$$g(z) = \frac{a^2}{z}$$

   (a constante réelle positive, $z \neq 0$) est la composée d'une inversion et d'une symétrie par rapport à Ox. Montrer que cette composition est commutative.
2. Étudier la transformation T_h de P dans P associée à l'application h définie par $h(z) = \mathrm{i}z$.
3. On considère la transformation $T = T_h \circ T_g$ de $P^\star$ dans $P^\star$. Montrer qu'elle est la composée d'une inversion et d'une symétrie axiale.
   Calculer, en fonction des coordonnées x et y de m, les coordonnées X et Y du point $M = T_h \circ T_g(m)$.
   Montrer que T admet une transformation réciproque T^{-1}.
   Calculer x et y en fonction de X et Y.
4. Quels sont les points doubles de T ?
5. Lorsque m appartient à une droite (D), étudier la nature de l'ensemble des points $T(m)$.
6. On suppose dans cette question que m appartient au cercle (C) d'équation

$$x^2 + y^2 - 2ux - 2vy + w = 0$$

   (u, v et w nombres réels donnés).
   Quel est l'ensemble transformé de (C) par T ?
   Étudier les cercles qui sont invariants par T.