

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Centres d'Outremer juin 1972 ∞

EXERCICE 1

1. Étudier la variation de la fonction définie par

$$x \mapsto f(x) = y = e^x + x(\text{Log } x - 1 - e).$$

On pourra préciser le signe de  $f''(x)$  pour étudier le signe de  $f'(x)$ .

2. Construire, dans un repère orthonormé  $x'Ox, y'Oy$ , l'unité de longueur étant le centimètre, la courbe  $(C)$  représentant la fonction  $f$ .
3. Calculer l'aire du domaine limité par  $(C)$ , l'axe  $x'Ox$  et les droites d'équations respectives  $x = 2$  et  $x = 3$ .

EXERCICE 2

Déterminer tous les entiers naturels  $a$  et  $b$  dont le P.G.C.D,  $(d)$ , et le PPCM,  $(m)$ , vérifient la relation

$$m - 2d = 22.$$

PROBLÈME

Partie A

1. Soit un espace vectoriel euclidien orienté  $\vec{E}$  de dimension 3, muni d'une base orthonormée directe  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On considère l'endomorphisme,  $\sigma$ , défini par  $\forall \vec{u}(x; y; z) \in \vec{E}, \sigma(\vec{u}) = \vec{u}'(x'; y'; z')$ , tel que

$$\begin{cases} x' &= \frac{1}{3}(x - 2y - 2z), \\ y' &= \frac{1}{3}(-2x + y - 2z), \\ z' &= \frac{1}{3}(-2x - 2y + z). \end{cases}$$

Calculer les coordonnées de  $\sigma(\vec{i}), \sigma(\vec{j})$  et  $\sigma(\vec{k})$ . En déduire que  $\sigma$  est un endomorphisme orthogonal.

Comparer le produit vectoriel  $\sigma(\vec{i}) \wedge \sigma(\vec{j})$  au vecteur  $\sigma(\vec{k})$ . En déduire que  $\sigma$  n'est pas une rotation vectorielle.

Déterminer l'ensemble,  $\vec{P}$ , des éléments invariants de  $\vec{E}$  par  $\sigma$ .

En déduire la nature de  $\sigma$ .

2. On considère les symétries orthogonales,  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ , de  $\vec{E}$ , par rapport aux plans respectifs suivants :

$$P_1 \text{ d'équation } x + y + z = 0 \text{ et } P_2 \text{ d'équation } x\sqrt{6} + y - z = 0.$$

Déterminer la nature de l'endomorphisme,  $\varphi$ , de  $\vec{E}$ , défini par

$$\varphi = \sigma_2 \circ \sigma_1$$

Préciser les équations de l'ensemble,  $\vec{\Delta}$ , des éléments invariants par  $\varphi$ .

3. On appelle  $\vec{\Pi}$  le plan vectoriel de  $\vec{E}$  orthogonal à  $\vec{\Delta}$  et  $\mathcal{R}$  la restriction de  $\varphi$  au plan  $\vec{\Pi}$ .
- a. Le plan  $\vec{\Pi}$  est orienté par la détermination d'un vecteur  $\vec{K}'$  unitaire de  $\vec{\Delta}$ . Calculer les coordonnées de  $\vec{K}'$ , sachant que son abscisse est choisie positive.  
Soit  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  deux vecteurs respectivement orthogonaux à  $\vec{P}_1$  et à  $\vec{P}_2$ . On pose  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \theta$ .
- b. En déduire  $\sin \theta$  à l'aide du produit vectoriel des deux vecteurs orthogonaux à  $\vec{P}_1$  et à  $\vec{P}_2$ .  
Calculer  $\cos \theta$ , puis définir la mesure,  $\theta$ , à  $k\pi$  près, de l'angle  $(\vec{D}_1, \vec{D}_2)$  des droites,  $\vec{D}_1$  et  $\vec{D}_2$  intersections respectives des plans  $\vec{P}_1$  et  $\vec{P}_2$  avec  $\vec{\Pi}$ .  
En déduire que l'application  $\mathcal{R}$  dans  $\vec{\Pi}$  est une rotation vectorielle, dont on donnera l'angle  $\alpha$ .

### Partie B

Dans cette partie, on considère le plan affine euclidien  $(\Pi)$  associé au plan vectoriel euclidien  $\vec{\Pi}$  de la partie A. Le plan  $(\Pi)$  est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . Soit  $r$  la rotation plane de centre  $O$  et d'angle  $-\frac{2\pi}{3}$ .

On appelle opérateur complexe d'une application  $f$  de  $(\Pi)$  dans  $(\Pi)$ , la relation entre  $z = x + iy$  affixe d'un point  $M$  de  $(\Pi)$ , de coordonnées  $(x; y)$ , et  $z' = x' + iy'$  affixe du point  $M' = f(M)$ , de coordonnées  $(x'; y')$ .

- Déterminer l'opérateur complexe de la rotation  $r$ .
- Déterminer l'opérateur complexe de la similitude,  $S$ , d'angle  $-\frac{\pi}{6}$  et de rapport 2, et qui fait correspondre au point  $O(0; 0)$  le point  $O'(1; -2) : O' = S(O)$ .
- En déduire l'opérateur complexe de l'application,  $S'$ , définie par

$$S' = S \circ r.$$

Déterminer la nature de  $S'$  et ses caractéristiques géométriques à l'aide de l'opérateur de  $S'$ .