

La descendance de Fibonacci

Richard Choulet

richardchoulet@wanadoo.fr

1 Introduction

Il s'agit, dans cet atelier-exposé, de présenter une compilation, j'allais dire un pastis, de morceaux déjà publiés ou non (en fait le plus souvent restés dans mes cartons) ayant pour noyau dur la suite de Fibonacci. Nous envisagerons quelques extensions à partir d'une des définitions possibles.

2 La smala Fibonacci

2.1 La suite éponyme

Leonardo Pisano dans son *Liber Abaci* de 1202 donne un modèle théorique à la croissance des lapins avec cette désormais fameuse suite F telle que : $F_0 = F_1 = 1$ et pour tout n de \mathbb{N} , $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. On peut d'ailleurs la définir sur \mathbb{Z} avec $F_n = 0$ pour $n < 0$.¹

2.2 Équation caractéristique

L'équation caractéristique liée à la récurrence d'ordre deux ci-dessus est $r^2 = r + 1$ dont les solutions sont

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,612803 \dots = [1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; \dots]$$

et son «conjugué» $\bar{\varphi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\varphi}$.

La suite de Fibonacci bénéficie de certaines propriétés dont voici les principales :

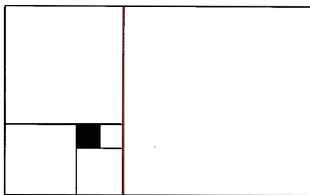
1.a. La formule de Binet² $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1} - \bar{\varphi}^{n+1})$

1.b. $F_m = F_{k+1}F_{m-k} + F_kF_{m-k-1}$; on peut la vérifier, mais c'est technique, avec la formule de Binet

1.c. $(-1)^n F_{m-n} = F_m F_{n+1} - F_n F_{m+1}$ dite identité d'Ocagnes

1.d. $F_n | F_m$ si et seulement si $n | m$.

2.3 Aspect géométrique : de l'or dans rectangles et spirales

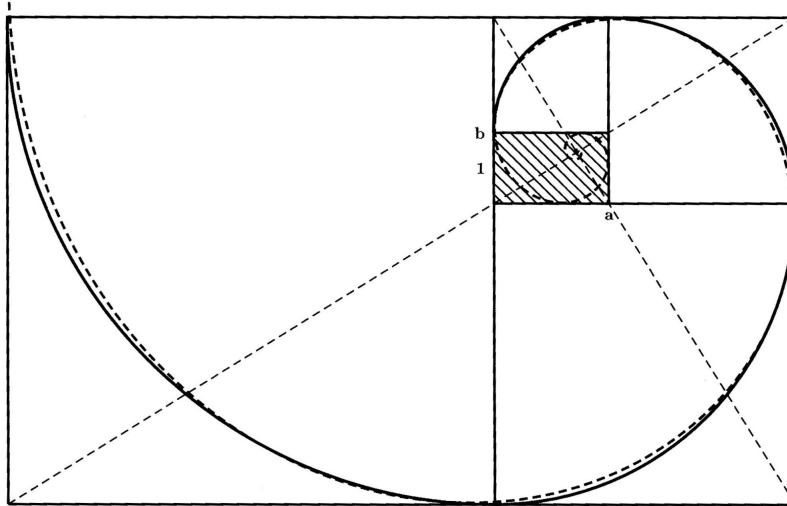


Dès que l'on complète un rectangle par un carré et que l'on recommence *ad libitum*, il y a de la suite de Fibonacci dans l'air.

¹La suite de Lucas L vérifie la même récurrence mais avec $L_0 = 2$ et $L_1 = 1$

²pas celui des Bidochon, c'est l'autre plus connu chez les matheux

Dans le dessin ci-dessus, on part du carré noir de côté 1, les carrés successifs, s'enroulant dans le sens indirect, ont pour longueur de côté 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... «On sait» que les quotients consécutifs formés par les longueurs des côtés tendent vers le nombre d'or φ . Nous ne sommes pas ici dans la situation de figures semblables contrairement au cas connu du rectangle d'or ou plus exactement de la spirale des rectangles d'or, comme cela apparaît ci-dessous.



Classiquement, pour illustrer la spirale d'or, on inscrit dans les carrés, des quarts de cercle «qui se raccordent bien». La spirale logarithmique inscrite expérimentalement dans les rectangles dorés (en pointillés) a pour équation $\rho = 1,85 \times \exp(-0,0538(t + 159))$ où t en degrés est entre -355 et 1000 .

2.4 Des exemples gastronomiques : addition astronomique !

* La grenouille de Rémi

Qui a encore une pensée émue pour la grenouille de Rémi ?

La pôvre bête est apparue en 1988 au concours de la FFJM (Fédération Française des Jeux Mathématiques et logiques), à moins que ce ne soit celui d'un autre gibier sauteur nommé Kangourou.

Voici grosso-modo le texte, déformé avec les libertés que j'ai prises,

La grenouille de Rémi qui n'a plus une grande élasticité musculaire dans les mollets est sur le palier d'un escalier de treize marches. Son arthrose récurrente (!) la condamne à ne pouvoir enjamber au maximum qu'une marche. Ainsi du palier elle peut se rendre, au mieux, sur la marche numéro 2 puis de là sur la marche 4 ...; évidemment elle peut jouer le Lièvre de la fable en passant sur chacune des marches.

De combien de façons la grenouille peut-elle se rendre sur la marche numéro 13 ? **La réponse est 377.**

Notant en général F_n le nombre de façons d'aller du palier à la marche numéro n , la récurrence $\mathcal{R}_2 : F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ est satisfaite, tandis que directement $F_1 = 1, F_2 = 2$.

En effet pour arriver sur la marche numéro $n + 2$, la grenouille est passée obligatoirement sur la marche numéro $n + 1$ – et il y a F_{n+1} façons de s'y rendre et elle termine d'un pas sur la marche $n + 2$ –, ou bien sur la marche numéro n avec ses F_n façons d'y aller en achevant le trajet d'un petit enjambement de la marche $n + 1$.

F_n est donc le quatorzième nombre de la classique suite de Fibonacci qui commence par : 1, 1, 2, 3, ...

* Vide-tonneaux (de Cassis ou Bandol de préférence)

De combien de façons distinctes peut-on vider un tonneau de cent litres avec des pichets de 1 ou 2 litres ?

* Du saucisson

De combien de façons peut-on trancher un saucisson d'un mètre en tranches de 1 ou 2 centimètres ?

Sauf erreur, pour l'une comme pour l'autre de ces dernières questions la réponse est F_{100} soit 573.147.844.013.817.084.101.

3 La branche noble mais sans descendance

3.1 La suite de Padovan

Cette suite, par «arguments géométriques»³ est définie par : $P_0 = P_1 = P_2 = 1$ et pour tout entier n , $P_{n+3} = P_{n+1} + P_n$.⁴

3.2 Équation caractéristique et alii

Celle-ci est $r^3 = r + 1$. P_n s'écrit alors comme combinaison linéaire des puissances n solutions de cette équation. En particulier intéressons-nous à la solution positive Ψ . Pour de lumineuses raisons⁵ je l'ai appelé nombre de platine mais méfiance, je crains que cela ne soit pas là une pratique universelle !

Quoiqu'il en soit :

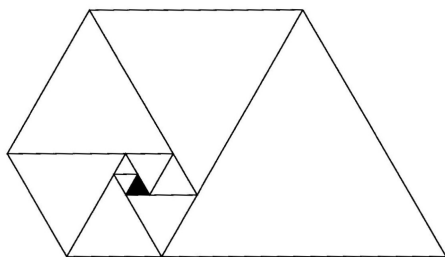
$$\Psi = \frac{(9 - \sqrt{69})^{\frac{1}{3}} + (9 + \sqrt{69})^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}} 3^{\frac{2}{3}}} = 1,32471795 \dots = [1; 3; 12; 1; 1; 3; 2; \dots].$$

³voir l'article

⁴Une cousine est la suite de Perrin avec $P_0 = 3, P_1 = 0, P_2 = 2$ et la même récurrence

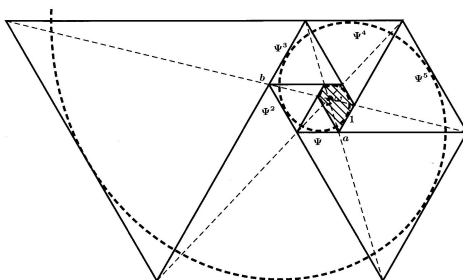
⁵voir

3.3 Pentagone et spirale de platine



En partant du triangle équilatéral de côté 1, les triangles successifs, s'enroulant dans le sens indirect, ont pour longueur de côté 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, ... Les quotients consécutifs formés par les longueurs tendent vers le nombre de platine Ψ .

Soit maintenant une figure de platine : on part d'un pentagone particulier (celui hachuré où apparaît ω puisqu'il a quatre angles de 120° et un de 60° tandis que ses côtés, dans l'ordre approprié aux angles, sont proportionnels à Ψ , Ψ^2 , Ψ^3 , Ψ^4 et Ψ^5). En accolant dans le sens indirect, comme il est clair sur la figure, un triangle équilatéral, on obtient un nouveau pentagone semblable au premier dans le rapport Ψ et ainsi de suite. On peut faire de même dans le rapport inverse ce qui n'a pas été entrepris ici pour avoir une lecture plus aisée. On conçoit facilement la convergence (??) des pentagones vers le point ω .



Expérimentalement la spirale en pointillés est donnée par $x = 1,01197 + 1,666666 \cos(t + 159) \exp(-0,004792t)$ et $y = 1,0626566 + 1,6666666 \sin(1 + 159) \exp(-0,004792t)$ avec t en degrés.

3.4 Pourquoi cette branche de haute lignée s'éteint-elle ?

Il a été démontré en 2001 par Aarts qu'il n'y a que deux nombres réels $x > 1$ pour lesquels existent des entiers naturels k et ℓ satisfaisant à : $x + 1 = x^k$ et $x - 1 = x^{-\ell}$.

Ce sont le nombre d'or φ qui vérifie $\varphi + 1 = \varphi^2$ et $\varphi - 1 = \varphi^{-1}$ et le nombre de platine Ψ est tel que : $\Psi + 1 = \Psi^3$ et $\Psi - 1 = \Psi^{-4}$.

En conséquence on ne peut aller plus loin dans la recherche de successeur dans la voie géométrique qui en fait est liée à la propriété algébrique précédente.

4 La prolifique branche bâtarde

4.1 L'angle d'attaque : la grenouille dopée à l'ÉPO

Qu'aurait été le résultat si, quelques vigueurs d'antan étant revenues dans les guiboles de la bête, celle-ci pouvait dévorer l'escalier trois à trois (au maximum) ? (Voire quatre à quatre avec, il est vrai, un peu de nandrolone ou d'ÉPO ?)

Avec les valeurs de départ facilement calculables, la relation de récurrence est $u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} + u_n$. Certains auteurs nomment suite de Tribonacci, cette suite pour laquelle donc $u_0 = u_1 = 1$ et $u_2 = 2$.

Je ne trouve pas la terminologie extraordinaire et préfère parler de la suite saute-3, le terrain ayant été préparé en parlant de saute-2 pour la classique Fibonacci. J'ai rencontré la dénomination de nombre d'argent et je le note Φ_3 , pour la solution positive de l'équation $r^3 = r^2 + r + 1$. On a d'ailleurs :

$$\Phi_3 = \left(\frac{19+3\sqrt{33}}{27}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{19-3\sqrt{33}}{27}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} = 1,8392867\dots = [1; 1; 5; 4; 2; 305; \dots].$$

4.2 Les prolongements

Certains auteurs généralisent ce qu'on vient de dire avec la suite de Tétrabonacci, puis les suites m -bonacci tandis que d'autres introduisent toute une foire aux

métaux pour désigner Φ_k , la solution positive à $r^m = \sum_{j=0}^{k-1} r^j$; cela devient d'un

vulgaire ma chère ...

Je définis la suite de Fibonacci « saute- m », $(F_n^{(m)})$ comme satisfaisant la récurrence :

$$\boxed{\mathcal{R}_m : u_{m+n} = u_{m+n-1} + u_{m+n-2} + \dots + u_n}$$

pour tout $n \geq -m + 2$, avec $F_k^{(m)} = 0$ pour tout $k < 0$ et $F_0^{(m)} = 1$ de sorte que cette suite, sur \mathbb{N} commence par $1, 1, 2, \dots, 2^{m-1}, 2^m - 1, \dots$.

À propos de Φ_m , j'ai les remarques suivantes. Φ_m est parmi les zéros du polynôme \mathcal{P}_m , ($\mathcal{P}_m = X^m - \sum_{j=0}^{m-1} X^j$), celui de plus grand module. En effet soit

z un zéro non réel de \mathcal{P}_m . On a $z^m = \sum_{p=0}^{m-1} z^p$ donc $|z|^m = \left| \sum_{p=0}^{m-1} z^p \right| \leq \sum_{p=0}^{m-1} |z|^p$.

Donc $\mathcal{P}_m(|z|) \leq 0$ ce qui prouve que $|z| \leq \Phi_m$. Comme les nombres z^p et 1 ne sont pas \mathbb{R} -liés, l'inégalité est stricte et ainsi $|z| < \Phi_m$. Par la suite nous notons α_i , $i = 1, \dots, m$ les zéros simples de ce polynôme avec $\alpha_1 = \Phi_m$, si l'on veut. Quelle est la conséquence de ce résultat ?

La généralisation de celui qu'on connaît pour la suite de Fibonacci classique, à

savoir que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{n+1}^{(m)}}{F_n^{(m)}} = \Phi_m.$$

En effet on peut écrire $F_n^{(m)} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \alpha_i^n$ avec des coefficients qui, en fait sont réels, λ_1 n'étant pas nul.

Cette écriture étant acquise, on obtient le terme dominant en haut et en bas du quotient par $\lambda_1 \alpha_1^{n+1}$ et $\lambda_1 \alpha_1^n$ respectivement. D'où le résultat annoncé.

5 Les coefficients fibonomiaux ; tableau des premières valeurs

On définit les coefficients «fibonomiaux» par ($n \geq p$) :

$$\left[\begin{matrix} n \\ p \end{matrix} \right] = \frac{F_n \cdot \dots \cdot F_{n-p+1}}{F_1 \cdot F_2 \cdot \dots \cdot F_p},$$

ou si l'on préfère avec la «fiborielle» associée $[F_n]! = F_1 \cdot \dots \cdot F_n$:

$$\left[\begin{matrix} n \\ p \end{matrix} \right] = \frac{[F_n]!}{[F_p]! [F_{n-p}]!}$$

où l'on prend $[F_0]! = 1$.⁶

MAIS ... ces coefficients sont-ils entiers ? Rendez-vous est pris au paragraphe 3⁷.

Voici le tableau des premiers coefficients fibonomiaux.

$\begin{matrix} \backslash & p \\ n & \backslash \end{matrix}$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	1	1				
3	1	2	2	1			
4	1	3	6	3	1		
5	1	5	15	15	5	1	
6	1	8	40	60	40	8	1

Remarquons que plus généralement, avec les fiborielles, nous obtenons immédiatement, comme pour les classiques coefficients du binôme :

$$\left[\begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right] = F_n = \left[\begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right]; \left[\begin{matrix} n \\ p \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} n \\ n-p \end{matrix} \right] \quad (0 \leq p \leq n)$$

⁶On devrait mettre un indice F à toutes ces notations mais quelle lourdeur ! Voir [Go]

⁷Voir [B] pour une explication combinatoire

$[2] = F_n F_{n-1}$; $[3] = \frac{F_n F_{n-1} F_{n-2}}{2}$, ainsi que

$$[p] = \frac{F_n}{F_p} [p-1],$$

pour $1 \leq p \leq n$ et

$$[n] [p] [r] = [n] [p-r] [r]$$

pour $1 \leq r \leq p \leq n$.

5.1 Les coefficients sont entiers

De la relation 1.b. vient la relation de récurrence sur les coefficients fibonomiaux qui justifie leur intégrité :

$$[n] = F_{p+1} \begin{bmatrix} n-1 \\ p \end{bmatrix} + F_{n-p-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ p-1 \end{bmatrix}$$

avec les bonnes conditions sur les n et p .

Cette dernière formule se démontre aisément par le calcul, de la même façon que pour les coefficients du binôme.

D'ailleurs du moment qu'une suite d'entiers U vérifie une relation simplifiante (?!), les coefficients U -nomiaux associés à U donnés par

$$[p]_U = \frac{U_n \cdots U_{n-p+1}}{U_1 \cdot U_2 \cdots U_p},$$

ou les U -rielles correspondantes ($[U_0]! = 1$), sont entiers.

Il suffit pour cela que U satisfasse une récurrence du type (relation simplifiante) :

$$U_n = \mathfrak{R}_{n,p} U_{n-p} + \mathfrak{S}_{n,p} U_p.$$

Donnons quelques exemples :

♣ dans le cas binomial $\mathfrak{R}_{n,p} = \mathfrak{S}_{n,p} = 1$ et $U_n = n$;

◇ dans le cas fibonomial, on peut prendre $\mathfrak{R}_{n,p} = F_{p+1}$, $\mathfrak{S}_{n,p} = F_{n-p-1}$ et $U = F$ (remarquons d'ailleurs que $\mathfrak{R}_{n,p} = \mathfrak{S}_{n,n-p}$ et $\mathfrak{S}_{n,p} = \mathfrak{R}_{n,n-p}$ ce qui donne aussi $[p] = F_{p-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ p \end{bmatrix} + F_{n-p+1} \begin{bmatrix} n-1 \\ p \end{bmatrix}$)

♡ si l'on repense à la notion de q -analogue ⁸, $U_n = \frac{q^n - 1}{q - 1}$ (q entier pour notre propos), $\mathfrak{R}_{n,p} = q^p$ et $\mathfrak{S}_{n,p} = 1$, puisque :

$$q^n - 1 = q^p (q^{n-p} - 1) + (q^p - 1),$$

(avec une remarque similaire à ce qui précède).

⁸voir le BV numéro 480 de février 2009 : «Des mathématiques modernes : la notion de q -analogues», R. Choulet

5.2 Inspirés des coefficients binomiaux

5.2.1 Quelques propriétés non classiques des coefficients du binôme

1. Pour $n \geq 2$ $\{n \text{ est premier}\} \iff \{\text{pour tout } k, 1 \leq k < n, \binom{n}{k} \text{ est divisible par } n\}$.
2. Pour tous entiers n et s , $\{3 | \binom{sn}{n}\} \iff \{3 | s\}$ ([F],[Gl])
3. Pour tous entiers k, l et $n : ln + 1 | k \binom{kn+ln}{ln}$. ([Z])

5.2.2 Des ouvertures sur les coefficients fibonomiaux.

1. Pour tout $n > 1$, $2 | \binom{2n}{n}$. ([M3]) Ceci est faux avec 3 puisque 3 ne divise pas $\binom{6}{3} = 40$.
2. Pour tous entiers n et $s > 0 : \{\binom{sn}{n} \text{ est multiple de } 3\} \iff \{s \equiv 0 [12]\}$. ([M2])

5.3 Pour suivre historiquement l'aventure

[B] www.math.hmc.edu/~benjamin/.../Fibonomial.pdf

A combinatorial approach to fibonomial coefficients Arthur T. Benjamin and Sean S. Plott paru aussi dans Fibonacci Quarterly Volume 46/47 N°1 pages 7 à 9 de février 2008/2009 mais avec erratum en août 2010 page 276 du volume 48 N°3 (non disponible)

[F] N. J. Fine, Binomial coefficients modulo a prime, Amer. Math. Monthly 54 (1947), 589-592

[Gl] J. W. L. Glaisher, On the residue of a binomial-theorem coefficient with respect to a prime modulus, Quart. J. Pure Appl. Math 30 (1899), 150-156

[Go] <http://www.fq.math.ca/Scanned/7-1/gould-a.pdf>

The Bracket Function and Fontené-Ward Generalized Binomial Coefficients With Application to Fibonomial Coefficients de H.W. Gould page 23 à 40 (février 1969)

[M1] http://www.math.psu.edu/sellersj/MSTFQ_19Sept2012.pdf

On divisibility properties of certain fibonomial coefficients by a prime p
Diego Marques, James A. Sellers and Pavel Trojovský

[M2] <http://www.emis.de/journals/JIS/VOL15/Trojovsky/trojovsky2.pdf>

On Divisibility of Fibonomial Coefficients by 3

Diego Marques Departamento de Matemática Universidade de Brasília Brazil

[M3] D. Marques and P. Trojovský, On parity of Fibonomial coefficients, to appear in Util. Math..

[Z] Zhi-Wei Sun, On divisibility concerning binomial coefficients, preprint, May 6 2010, available at

<http://arxiv.org/abs/1005.1054>.

5.4 Pour aller plus loin

On peut parler de «calculus» en commençant par introduire la dérivée indexée par F de $x \longrightarrow x^n$ comme étant $F_n x^{n-1}$. Qu'en est-il alors d'une somme finie ou infinie de tels x^p ? Y a-t-il du calcul intégral? Des équations différentielles? est-ce que ça converge? Où?

Ewa Krot, An introduction to finite fibonomial calculus, Institute of Computer Science, Bia lystok University, Poland.

<http://arxiv.org/pdf/math/0410550v2.pdf>

Further Developments in Finite Fibonomial Calculus, Ewa Krot, Institute of Computer Science, Bia lystok University

PL-15-887 Bia lystok, ul.Sosnowa 64, POLAND February 1, 2008

e-mail : ewakrot@wp.pl