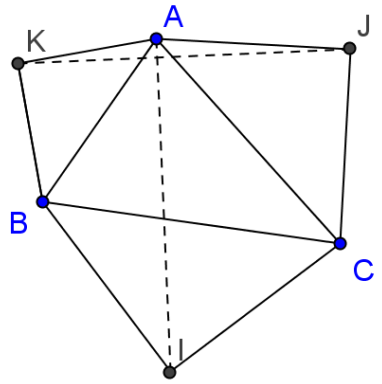
Exercice classique de géométrie en complexes



Enoncé Dans le plan complexe soit les points d'affixe a,b,c A l'extérieur du triangle ABC les triangles rectangles isocèles BIC CJA,AKB

Questions Affixes de I,J,K en fonction de a,b,c En déduire AI=JK ,AJ perp JK

Solution

Dans Rotation(I,π/2) C a pour image B

Z(B)-Z(I)=i(Z(C)-Z(I)) b-ic=Z(I)(1-i) (b-ic)(1+i)=Z(I)(1-i)(1+i) (b+c+i(b-c))/2=Z(I)

Ainsi Z(I)=(b+c+i(b-c))/2 Z(J)=(c+a+i(c-a))/2 Z(K)=(a+b+i(a-b))/2

Z(JK)=Z(K)-Z(J)=(b-c+i(2a-b-c))/2

Z(AI)=(b+c+i(b-c))/2-a =(b+c-2a+i(b-c))/2=iZ(JK)

Ainsi AI=JK et AI prependiculaire à JK

Il y a une solution de géométrie pure

Evidement AI,BJ,CK hauteurs de IJ sont concourrantes

Calcul du PGCD et du PPCM

Méthode :l'algorithme d'Euclide

Soit à trouver le PGCD de deux entiers naturels A et B

La division euclidienne de A par B donne A=BQ+R avec R<B .Les diviseurs communs à A et B sont ceux communs à B et R . $B=RQ_1+R_1$ $R_1<R$ et ainsi de suite jusqu'à un reste nul .

alors les diviseurs du dernier dividende et du dernier diviseur sont ceux de ce dernier qui en est le plus grand et donc le PGCD Δ

Le PPCM est A*B/Δ

Programme

Dans C21 :=ARRONDI.INF(A21/B21;0)

DansD21:=A21-B21*C21

Dans F21:=SI(D21=0;B21;"")

Dans G21;=SI(D21=0;A$21*B$21/B21;"")

Dans A22:=SI(D21=0;"";B21)

Dans B22:=SI(D21=0;"";D21)

Entrer A puis B ,puis le programme ,enfin avec les poignées de cellules remplir les cases

Exemples

A	B	Q	R		PGCD=	PPCM=
99	9	11	0		9	99

A	B	Q	R		PGCD=	PPCM=
17	8	2	1			
8	1	8	0		1	136

A	B	Q	R		PGCD=	PPCM=
140	50	2	40			
50	40	1	10			
40	10	4	0		10	700

A	B	Q	R		PGCD=	PPCM=
211	87	2	37			
87	37	2	13			
37	13	2	11			
13	11	1	2			
11	2	5	1			
2	1	2	0		1	18357

Pour les exemples 2,3;4 il faut reprogrammer le PPCM car les références absolues $ ne se transposent pas dans un copié-collé

PRET ET CAPITALISATION

Les formules

Mathématiques : seule est nécessaire la formule

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots\dots\dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Ici on l'utilise sous la forme $q^{n-1} + q^{n-2} + q^{n-3} + \dots + q^2 + q + 1 = \frac{q^n - 1}{q-1}$

Prêt On emprunte un capital C remboursable par versements « a » en fin de n périodes (mois ou années) au taux i par période .

Bilan de ce qui reste dû après

1 période : $C(1+i)-a$

2 périodes : $[C(1+i)-a](1+i)-a = C(1+i)^2-a[(1+i)+1]$

3 périodes :$\{ C(1+i)^2-a[(1+i)+1]\}(1+i)-a=C(1+i)^3-a[(1+i)^2+(1+i)+1]$ ……

n périodes : $C(1+i)^n-a[(1+i)^{n-1}+(1+i)^{n-2}+\dots\dots+(1+i)^2+(1+i)+1]$

autrement dit $C(1+i)^n - a\frac{(1+i)^n-1}{i}$

Après ces n périodes le prêt est remboursé , plus rien n'est dû

$C(1+i)^n - a\frac{(1+i)^n-1}{i} = 0$ $\quad C(1+i)^n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ $\quad \boxed{a=\frac{Ci(1+i)^n}{(1+i)^n-1}}$

Exemple On emprunte 10000€ au taux de 7% l'an remboursables en 10 ans par mensualités égales. Soit i le taux mensuel équivalent à 7%

$(1+i)^{12}=1+0,07$ $\quad i=(1+0,07)^{1/12}=1,0057$ $\quad$ mensualités :116,11€

Problème On peut se demander pour chaque versement quelle est la part u_p de capital remboursée (la période est ici l'année)

Après p années il reste à payer $C(1+i)^p - a\frac{(1+i)^p-1}{i}$

Ce serait la somme à payer pour clore le prêt après p années .

L'intérêt de ce reliquat pour la p+1ème année est

$Ci(1+i)^p-a[(1+i)^p-1]$

Sur le versement a que l'on fait en fin de la p+1ème année la part de capital remboursé est : $a-(Ci(1+i)^p-a[(1+i)^p-1])=(1+i)^p(a-Ci)$

C'est une suite géométrique u_p de raison 1+i $\quad u_p=(a-Ci)(1+i)^{p-1}$

Après un an on retrouve a-Ci

Promenade aléatoire en cinq étapes sur les arêtes d'un tétraèdre				
1ère Arête	2ème Arête	3ème Arête	4ème Arête	5ème Arête
2	2	2	3	3
3	1	3	3	3
3	2	3	3	2
1	1	1	1	3
1	1	3	2	3
3	2	3	1	1
1	2	3	3	1
1	3	1	3	3
1	1	2	1	1
2	1	3	3	1
3	3	2	2	2
1	1	1	1	1
2	2	3	1	1
1	1	3	1	3
1	3	3	1	1
1	1	3	1	1
3	2	2	3	1
1	1	3	2	2
2	2	3	1	1
2	3	2	2	3
3	1	2	2	2
1	1	3	2	2
3	2	2	2	1
3	3	2	2	3
1	3	3	3	2
2	2	3	1	3
1	3	3	2	3
2	3	1	2	1
1	3	2	1	3
1	2	2	3	1

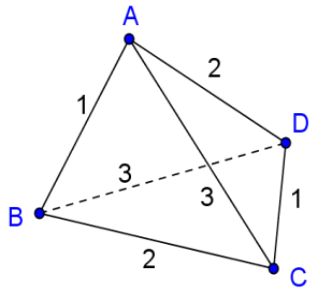
Arrivée en 1	13
Arrivée en 2	6
Arrivée en 3	11
Total	30

Disposition des arêtes du tétraèdre indiquées ci-dessous

Série aléatoire par f_x:ALEA.ENTRE.BORNES

Outil:f_x NB.SI.ENS (voir aide)

Probabilité des arêtes 1,2,3
1/3



Programmes de tri sur ALGOBOX

On trie des listes à N éléments dans l'ordre croissant
Ici quatre programmes de tri parmi ceux que donne Internet

1/ Tri '' à bulle ''
Un classique en informatique avec éventuellement un drapeau.
On range les 2 premiers éléments ,puis le 2ème et le 3ème et ainsi de suite (ligne 17 à 25).De cette façon l'élément maximum prend le rang N
On recommence N-1 fois sur la liste obtenue des N éléments .
.Les N éléments viennent se placer dans l'ordre décroissant à partir du rang N .
On fait $(N-1)^2$ comparaisons

2/ Tri '' à insertion''
On procède de même pour les 2 premiers éléments (ligne15 à 23) .On adjoint le 3ème On l'amène à son rang par comparaison 3/2 ,2/1 ; on adjoint le 4ème aux 3 premiers on l'amène à son rang par comparai--son 4/3,3/2, 2/1 et ainsi de suite .les N éléments se trouvent classés .On fait 1+2+3+…….+N-2+N-1=N(N-1)/2 comparaisons

3/ Tri ''à sélection''
On met dans une variable T le premier élément (ligne 16) et on le compare aux suivants en le remplaçant par tout élément inférieur dont on note le rang i (ligne 18 à 25) . Si i>1 , on décale les i-1 premiers éléments d'un rang vers la droite (ligne 26 à 29)et on place T en premier (ligne 30). Si i=1 T est en premier On recommence la même opération sur les éléments de rangs 2 à N,c'est le 2ème élément que l'on place dans T , puis le 3ème , le 4ème….

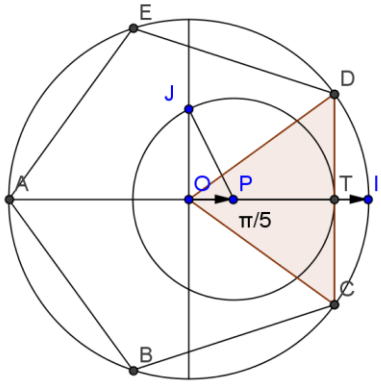
Construction directe du pentagone

Soit le cercle (O,OI=1)et le pentagone régulier ABCDE inscrit dans (O,1)

L'angle au centre du pentagone est 2π/5 ,le demi-angle au centre π/5

Dans le triangle OCD l'apothème OT vaut cos(π/5)=(sqr5+1)/4

Construction de (sqr5+1)/4 OI=1 OP=1/4 OJ=1/2



Dans le triangle rectangle OPJ

$PJ^2=(1/4)^2+(1/2)^2=1/16+1/4=5/16$

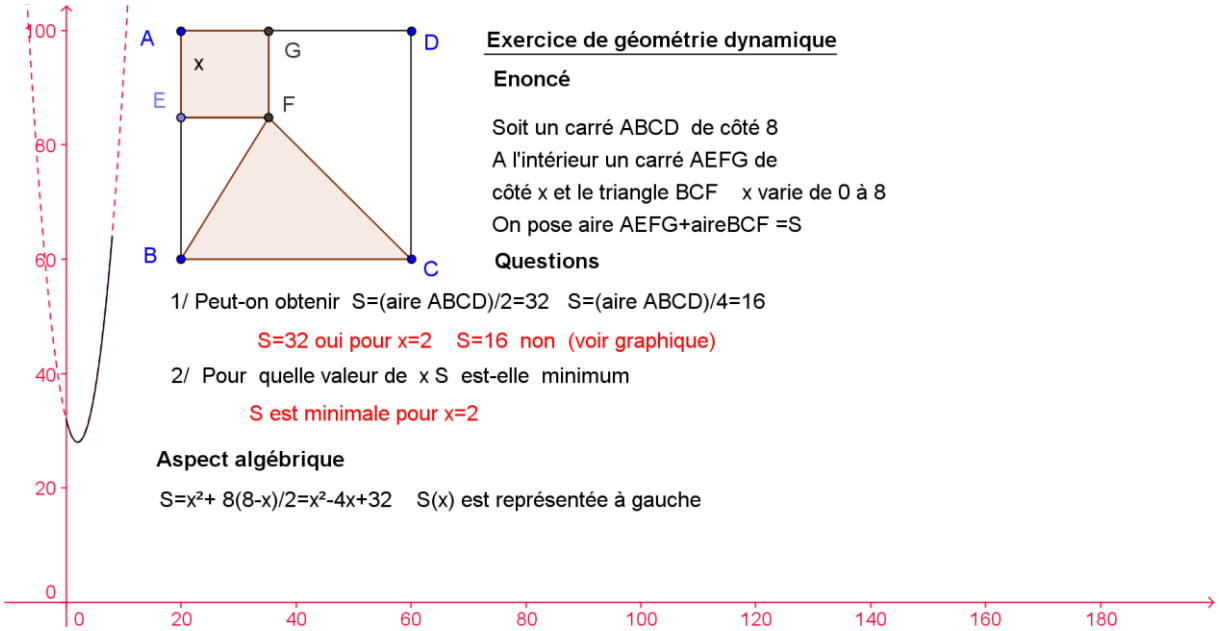
PJ=sqr5/4

On trace le cercle (O,PJ)

Il coupe [OA) en un point t

tel que Ot=OP+PJ=(1+sqr5)/4

t n'est autre que le point T



Exercice de géométrie dynamique

Enoncé

Soit un carré ABCD de côté 8

A l'intérieur un carré AEFG de

côté x et le triangle BCF x varie de 0 à 8

On pose aire AEFG+aireBCF =S

Questions

1/ Peut-on obtenir S=(aire ABCD)/2=32 S=(aire ABCD)/4=16

S=32 oui pour x=2 S=16 non (voir graphique)

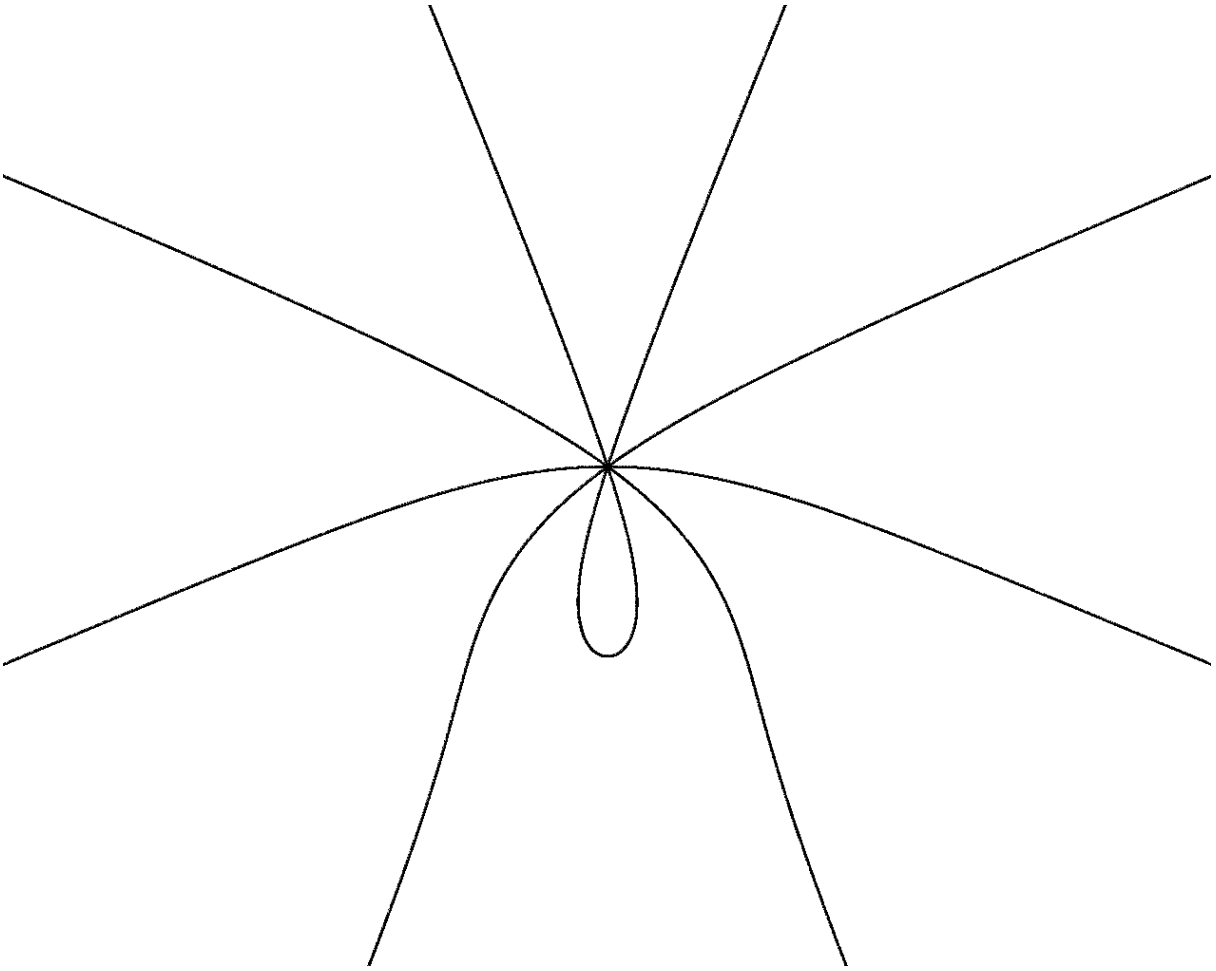
2/ Pour quelle valeur de x S est-elle minimum

S est minimale pour x=2

Aspect algébrique

$S=x^2+8(8-x)/2=x^2-4x+32$ S(x) est représentée à gauche

Une araignée mathématique



Ses équations

$$x=\frac{2\sin 5t\cos t}{\cos 4t} \qquad y=\frac{2\sin 5t\sin t}{\cos 4t}$$

en polaires $\rho=\frac{-2\sin 5\theta}{\cos 4\theta}$

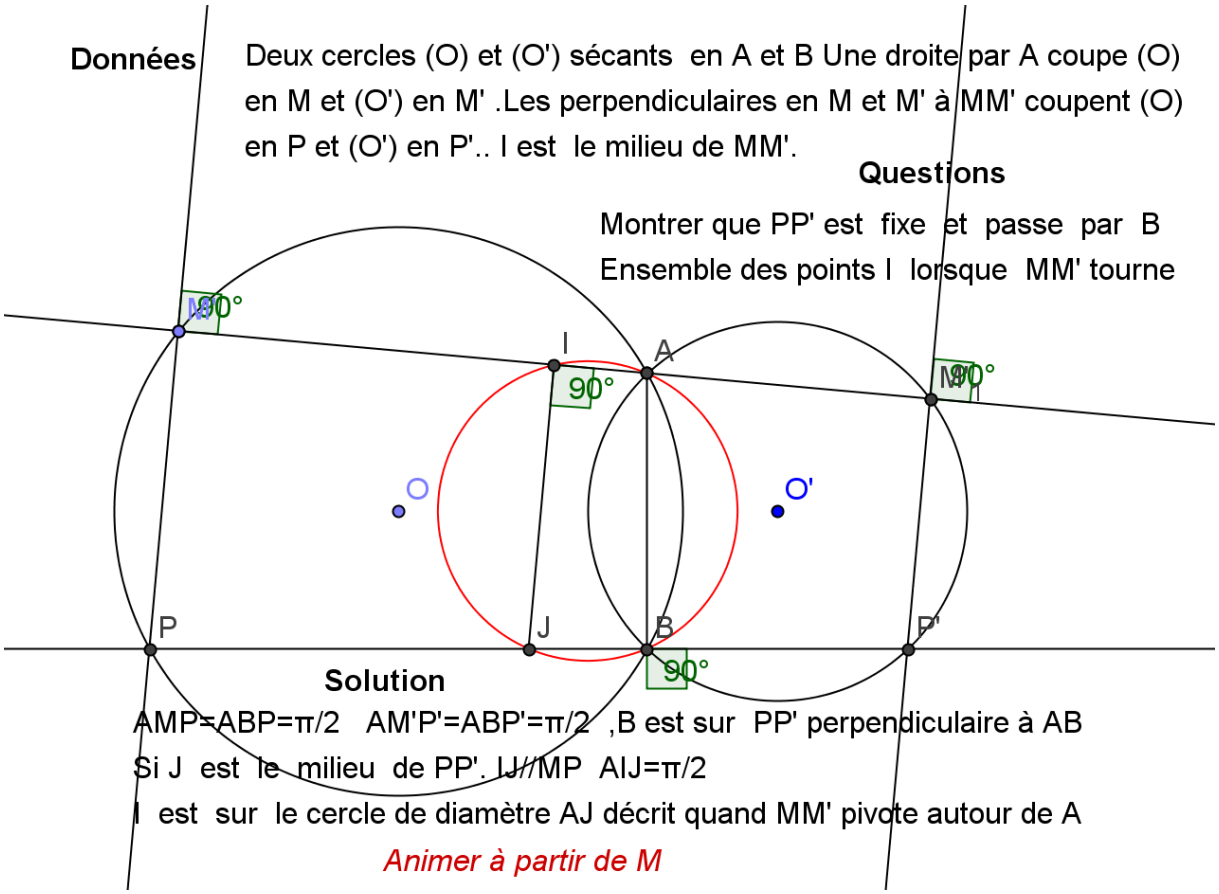
Données

Deux cercles (O) et (O') sécants en A et B Une droite par A coupe (O) en M et (O') en M' .Les perpendiculaires en M et M' à MM' coupent (O) en P et (O') en P'.. I est le milieu de MM'.

Questions

Montrer que PP' est fixe et passe par B

Ensemble des points I lorsque MM' tourne



Solution

AMP=ABP=π/2 AM'P'=ABP'=π/2 ,B est sur PP' perpendiculaire à AB

Si J est le milieu de PP'. IJ//MP AIJ=π/2

I est sur le cercle de diamètre AJ décrit quand MM' pivote autour de A

Animer à partir de M

Suivent deux programmes en ALGOBOX

Suites u(n) et v(n)=somme U(n) - 23.03.2012

****

```
VARIABLES
  j EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  LIST1 EST_DU_TYPE LISTE
  LIST2 EST_DU_TYPE LISTE
  LIST3 EST_DU_TYPE LISTE
DEBUT_ALGORITHME
  AFFICHER "Suite u(n)=1/(n(n+1))"
  AFFICHER "  "
  POUR n ALLANT_DE 1 A 10
    DEBUT_POUR
    LIST1[n] PREND_LA_VALEUR n*(n+1)
    AFFICHER "1/"
    AFFICHER LIST1[n]
    AFFICHER "      "
    FIN_POUR
  AFFICHER "  "
  POUR n ALLANT_DE 1 A 10
    DEBUT_POUR
    LIST2[n] PREND_LA_VALEUR 1/LIST1[n]
    AFFICHER LIST2[n]
    AFFICHER "  "
    FIN_POUR
  AFFICHER "  "
  AFFICHER "  "
  AFFICHER "Suite v(n)=u(0)+u(1)+....+u(n)"
  AFFICHER "v(n+1)=v(n)+u(n+1)"
  AFFICHER "V(n+1=n/(n+1)+1/(n(n+1)=...=(n+1)/(n+2)"
  AFFICHER "  "
  POUR n ALLANT_DE 1 A 10
    DEBUT_POUR
    LIST3[n] PREND_LA_VALEUR ALGOBOX_SOMME(LIST2,1,n)
    AFFICHER LIST3[n]
    AFFICHER "  "
    FIN_POUR
  AFFICHER "  "
  POUR n ALLANT_DE 1 A 10
    DEBUT_POUR
    AFFICHER n
    AFFICHER "/"
    j PREND_LA_VALEUR n+1
    AFFICHER j
    AFFICHER "      "
    FIN_POUR
  AFFICHER "  "
FIN_ALGORITHME
```

Fractions égyptiennes - 23.03.2012

****

```
VARIABLES
  A EST_DU_TYPE NOMBRE
  B EST_DU_TYPE NOMBRE
  Q EST_DU_TYPE NOMBRE
  R EST_DU_TYPE NOMBRE
  D EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE A
  LIRE B
  Q PREND_LA_VALEUR floor(A/B)
  SI (Q!=0) ALORS
    DEBUT_SI
    AFFICHER "Partie entière  "
    AFFICHER Q
    AFFICHER "  "
    FIN_SI
  A PREND_LA_VALEUR A-B*Q
  R PREND_LA_VALEUR 1
  AFFICHER "Fractions  "
  TANT_QUE (R>0) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    Q PREND_LA_VALEUR floor(B/A)
    R PREND_LA_VALEUR B-A*Q
    SI (R>0) ALORS
      DEBUT_SI
      AFFICHER "1/"
      D PREND_LA_VALEUR Q+1
      AFFICHER D
      AFFICHER " + "
      B PREND_LA_VALEUR B*D
      A PREND_LA_VALEUR A-R
      FIN_SI
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER "1/"
  AFFICHER Q
FIN_ALGORITHME
```