Journées APMEP, Toulouse, octobre 2014

Les questions «Vrai ou Faux» pour motiver et exercer la démonstration.

Laurence.Merminod@unige.ch
Pierre.Burgermeister@unige.ch

Contexte

Au collège genevois (équivalent lycée), élèves appelés à restituer des démonstrations apportées par l'enseignant

Constat

Grandes difficultés des élèves, en bonne partie liées à une mauvaise compréhension de l'essence même de la démonstration
(utilité, codes, rigueur).

Constat

Absence d'enseignement organisé, à travers le cursus du collège (lycée), de la démonstration.
(production et/ou restitution)

Hypothèses

1. Les élèves ne s'engagent dans des tâches de justification-argumentation-démonstration que s'ils voient un **enjeu** suffisant.

Hypothèses

2. Accéder à la rigueur du raisonnement hypothético-déductif passe nécessairement par des exercices de **production personnelle** de démonstration.

Hypothèses

3. Pour être efficace, ce type d'exercices doit être proposé **fréquemment** et sur le **long terme**.

Notre proposition

Comment

1. créer un enjeu,
2. faire produire des démonstrations,
3. fréquemment et sur le long terme ?

Par des questions **Vrai ou Faux** introduites selon une progression organisée et donnant lieu à des évaluations sommatives.

Comment organiser cette progression ?

En se basant sur

1. des objectifs d’apprentissage hiérarchisés du raisonnement h-d,
2. des critères d’évaluation des réponses d’élèves discriminant

   les *aspects notionnels*

   de ceux liés au *raisonnement*.

Quel que soit le nombre réel x l’égalité $2x^2+x=3x^3$ est toujours vraie.

a) ex $x = 0$

$2 \cdot 0 + 0 = 3 \cdot 0$

$2 \neq 3$

contre exemple:

si $x = 0$

$\boxed{\text{Faux}}$

a) ex $x = 0$

$2 \cdot 0 + 0 = 3 \cdot 0$

$2 \neq 3$

$\boxed{\text{Faux}}$

Contre exemple:

si $x = 0$

Notion : 0/2 (substitution et calcul)

Raisonnement : 2/2 (emploi du contre-exemple)

Quel que soit le nombre réel x l'égalité $2x^2+x=3x^3$ est toujours vraie.

a) $2x^2+x = 3x^3$

$2 \cdot 2^2 + 2 = 3 \cdot 2^3$

$2 \cdot 4 + 2 = 3 \cdot 8$

$8 + 2 = 24$

$10 \neq 24$

Non, c'est faux car ça ne marche pas avec 2 donc ça ne marche pas avec tout les nombres réels.

a) $2x^2+x=3x^3$

$2\cdot2^2+2=3\cdot2^3$

$2\cdot4+2=3\cdot8$

$8+2=24$

$10 \neq 24$

Non, c'est faux car ça ne marche pas avec 2 donc ça ne marche pas avec tout les nombres réels.

Notion : 2/2 (substitution et calcul)

Raisonnement : 2/2 (emploi du contre-exemple)

Quel que soit le nombre réel x l'égalité $2x^2+x=3x^3$ est toujours vraie.

Chloé

a) c'est faux parce que on ne peut pas additioner x è x^2

Chloé

a) c'est faux parce que on ne peut pas additionner x è x^2

Notion : 2/2 (réduction des monômes semblables)

Raisonnement : 0/2 (pas de contre-exemple)

Quel que soit le nombre réel x l'égalité $2x^2+x=3x^3$ est toujours vraie.

a) $\Leftrightarrow 2x^2+x=3x^2$

faux car le membre de gauche n'est pas égal au membre de droite.

a) $\Leftrightarrow 2x^2 + x = 3x^2$

faux car le membre de gauche n'est pas égal au membre de droite.

Notion : 0/2 (substitution et calcul)

Raisonnement : 0/2 (affirmation non justifiée)

Quels **critères** pour évaluer le raisonnement ?

1. Utilisation adéquate d'un contre-exemple
2. Mobilisation adéquate d'une définition, d'une propriété ou d'un théorème institutionnalisés en cours
3. Articulation cohérente du raisonnement
4. Rédaction (en particulier connecteurs logiques)

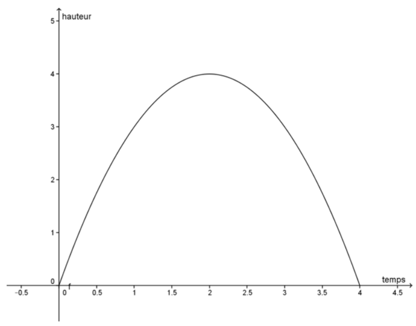
Ces critères peuvent être communiqués aux élèves dans la consigne.

Par exemple :

*Répondre par **Vrai** ou **Faux** et **justifier** en vous basant sur un contre-exemple détaillé ou sur les définitions, propriétés et théorèmes vus au cours.*

Au temps t=0, on lance une balle de tennis vers le haut. La courbe ci-contre représente sa hauteur (en mètres) par rapport au sol en fonction du temps de vol.

Vrai ou Faux ? : La balle ne retombe pas au point d'où on l'a lancée.



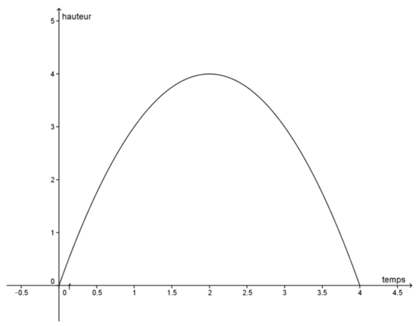
Oui la balle retombe au part de lancé elle est lancée à t=0 et va retomber à 0 m après 4 seconde
donc il n'est pas possible de savoir à quelle position la balle retombe Cela n'est pas représenté sur le graphique.

Oui la balle retombe au pont de lancé
elle est lancée à t=0 et va retomber à
0 m après 4 seconde
donc il n'est pas possible de savoir à
quelle position la balle retombe Cela n'est
pas représenté sur le graphique -

Notion : 2/2 (lecture graphique et lien situation / graphique)

Raisonnement : 1/2 (éléments du raisonnement présents mais mal structurés, en particulier « donc » pour « mais » et réponse « oui »)

Au temps *t*=0, on lance une balle de tennis vers le haut. La courbe ci-contre représente sa hauteur (en mètres) par rapport au sol en fonction du temps de vol.
Vrai ou Faux ? : La balle ne retombe pas au point d'où on l'a lancée.



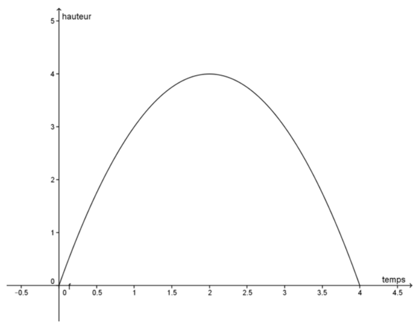
a) temps=0 C'es faux, sur ce graphique nous pouvons obsener la hauteur à laquelle la balle a été jetée ~~...~~ et à quel moment elle retombe au sol. On peut obsener qu'elle met autant de temps à monter qu'à descendre. On peut donc supposer qu'elle retombe exactement au même endroit.

a) temps = 0 Ces faux, sur ce graphique nous pouvons observer la hauteur à laquele la balle a été jetée ~~…~~ et à quel moment elle retombe au sol. On peut observer qu'elle met autant de temps à monter qu'à descendre. On peut donc supposer qu'elle retombe exacement au même endroit.

Notion: 2/2 (lecture graphique et lien situation / graphique)

Raisonnement : 1/2 (éléments du raisonnement présents mais mal structurés. « On peut donc supposer » : « donc » inadéquat, « supposer » aussi ; il faudrait « il est possible »)

Au temps *t*=0, on lance une balle de tennis vers le haut. La courbe ci-contre représente sa hauteur (en mètres) par rapport au sol en fonction du temps de vol.
Vrai ou Faux ? : La balle ne retombe pas au point d'où on l'a lancée.



faux, elle retombe au même point mais pas au même temps. Elle part de 0 et elle retombe à 0.

faux, elle retombe au même point mais pas au même temps. elle part de 0 et elle retombe à 0.

Notion: 1/2 (lecture graphique ok mais absence de lien situation / graphique)

Raisonnement : 1/2 Cohérent dans son interprétation, mais court par rapport au raisonnement attendu

$-x^2 - 6x - 9$ est le carré de $-x - 3$

$-x^2 - 6x - 9 = (-x-3)^2$? $\boxed{\text{Faux}}$

on une identité $(-a-b)^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Faux $(-x-3) \cdot (-x-3) = x^2 + 6x + 9$

$-x^2 - 6x - 9 = (-x-3)^2$?

$\boxed{\text{Faux}}$

on une identité $(-a-b)^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Faux $(-x-3) \cdot (-x-3) = x^2 + 6x + 9$

Notion : 2/2 (application de deux identités institutionnalisées)

Raisonnement : 0/2 ou 1/2 (pas de contre-exemple ni de référence à la définition de l'égalité des polynômes; absence d'explicitation de l'inégalité des deux membres)

$-x^2 - 6x - 9$ est le carré de $-x - 3$

b) $(-x-3)^2 \Rightarrow (-x-3) \cdot (-x-3)$

$\Rightarrow x^2 + 3x + 3x + 9 = x^2 + 6x + 9$

non, car le carré de $-x-3$ est x^2+6x+9 alors que ici sont positif et dans ce que vous dites c'est négatif c'est faux.

b) $(-x-3)^2 \Rightarrow (-x-3)\cdot(-x-3)$

$\Rightarrow x^2+3x+3x+9 = x^2+6x+9$

non, car le carré de $-x-3$ est x^2+6x+9 alors que ici sont positif et dans ce que vous dites c'est négatif c'est faux.

Notion : 2/2 (application de la double distributivité)

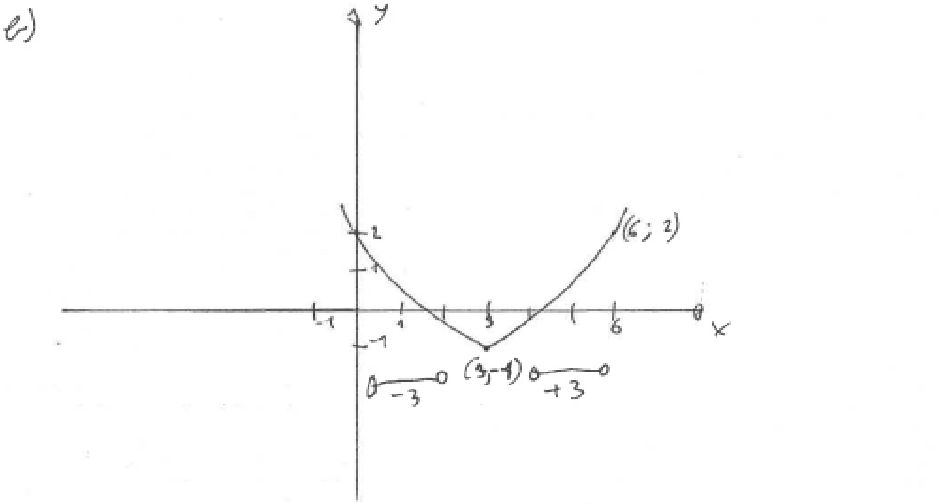
Raisonnement : 0/2 ou 1/2 (pas de contre-exemple ni de référence à la définition de l'égalité des polynômes)

$-x^2 - 6x - 9$ est le carré de $-x - 3$

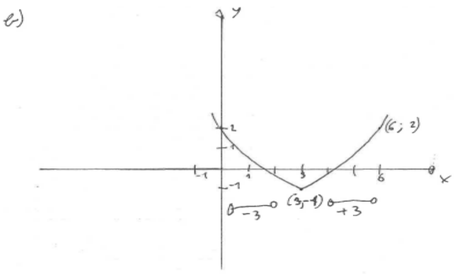
A noter :

1. Absence complète de contre-exemple dans la classe testée
2. La « preuve » algébrique semble être *a priori* préférée au contre-exemple pour les élèves. Comme si, contractuellement, le travail algébrique était préférable au travail arithmétique.

Si la courbe représentative d’une fonction f du 2ème degré a son sommet en (3;-1) et si cette courbe passe par le point (0;2), alors $f(6) = 2$.



oui, car par symétrie si le sommet x est 3, et que à x = 0, y = 2, alors 3 - 0 = 3 (distance entre le point et le sommet). Comme le sommet est le milieu entre deux point, entre 3 et 0 il y a -3 et donc si on fait 3 + 3, on voit un autre point : (6 ; 2).



oui, car par symétrie si le sommet x est 3, et que à x = 0, y = 2, alors 3 - 0 = 3 (distance entre le point et le sommet). Comme le sommet est le milieu entre deux point, entre 3 et 0 il y a -3 et donc si on fait 3 + 3, on voit un autre point : (6 ; 2).

Notion : 2/2

Raisonnement : 1/2 (éléments du raisonnement présents, mais très mal organisés)

Si la courbe représentative d'une fonction f du $2^{ème}$ degré a son sommet en (3;-1) et si cette courbe passe par le point (0;2), alors $f(6) = 2$.

b) $f(x) = (x-3)^2 - 1$

faux, ...

$f(6) \neq 2 \Rightarrow f(x) = (x-3)^2 - 1$

$f(6) = (6-3)^2 - 1$

$= 3^2 - 1$

$= 9 - 1 = \underline{\underline{8 \neq 6}}$

b) $f(x) = (x-3)^2 - 1$

faux, ...

$f(6) \neq 2 \Rightarrow f(x) = (x-3)^2 - 1$

$f(6) = (6-3)^2 - 1$

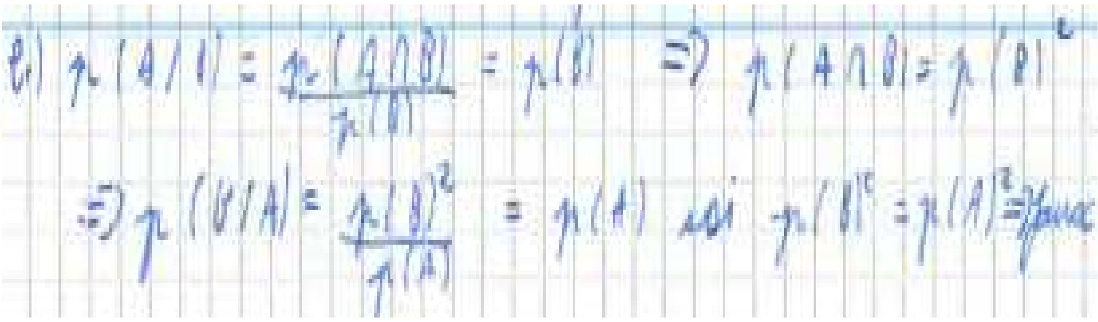
$= 3^2 - 1$

$= 9 - 1 = \underline{\underline{8 \neq 6}}$

Notion : 1/2 (forme standard avec bonne utilisation des coordonnées du sommet, mais manque le coefficient devant le carré)

Raisonnement : 1/2 (raisonnement organisé, rédaction imprécise)

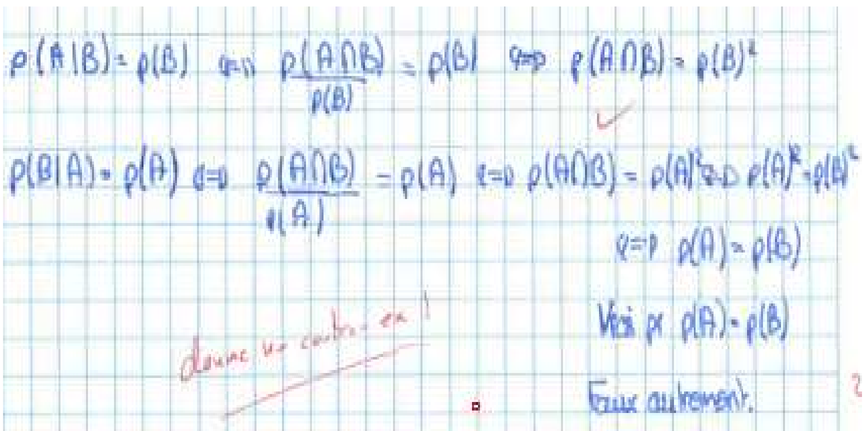
Si *A* et *B* sont deux événements aléatoires sur un même univers tels que p(*A* / *B*) = p(*B*),
alors p(*B* / *A*) = p(*A*).


2) $p(A/B) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)} = p(B) \Rightarrow p(A\cap B) = p(B)^2$

$\Rightarrow p(B/A) = \frac{p(B)^2}{p(A)} = p(A)$ ssi $p(B)^2 = p(A)^2 \Rightarrow$ faux

Notion : 2/2 (déf prob conditionnelle)
Raisonnement : 1/2 (raisonnement organisé, absence de contre-exemple)

Si *A* et *B* sont deux événements aléatoires sur un même univers tels que p(*A* / *B*) = p(*B*),
alors p(*B* / *A*) = p(*A*).


$p(A|B) = p(B) \Leftrightarrow \frac{p(A\cap B)}{p(B)} = p(B) \Leftrightarrow p(A\cap B) = p(B)^2$ ✓

$p(B|A) = p(A) \Leftrightarrow \frac{p(A\cap B)}{p(A)} = p(A) \Leftrightarrow p(A\cap B) = p(A)^2 \Leftrightarrow p(A)^2 = p(B)^2$

$\Leftrightarrow p(A) = p(B)$

Vrai si $p(A) = p(B)$

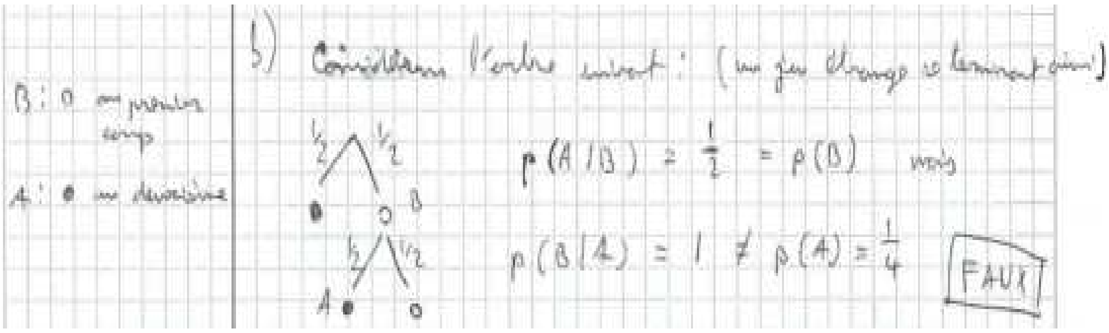
Faux autrement.

donne un contre-ex !

?

Notion : 2/2 (déf prob conditionnelle)
Raisonnement : 1/2 (raisonnement organisé mais inabouti)

Si A et B sont deux événements aléatoires sur un même univers tels que $p(A / B) = p(B)$,
alors $p(B / A) = p(A)$.



Notion : 2/2 (déf prob conditionnelle)
Raisonnement : 2/2 (emploi du contre-exemple)

Objectifs d'apprentissage du raisonnement h-d

1. *être capable de tester une assertion sur des cas particuliers, puis d'expliciter un contre-exemple ;*
2. *être capable de mobiliser une définition ou une propriété et de s'en servir de manière directe (éventuellement dans les deux sens pour une définition) ;*

Objectifs d'apprentissage du raisonnement hd

3. *être capable de mobiliser une définition ou une propriété et de s'en servir dans un raisonnement articulé en justifiant chaque étape ;*
4. *être capable de mobiliser deux énoncés (définitions, propriétés) et de s'en servir pour construire un raisonnement articulé en justifiant chaque étape ;*
5. *être capable de déterminer les hypothèses minimales sous lesquelles une assertion est vraie.*