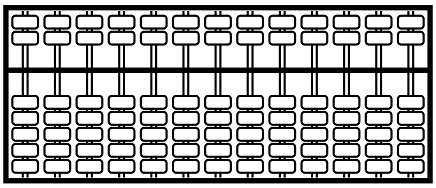
Bouliers : découverte du suanpan

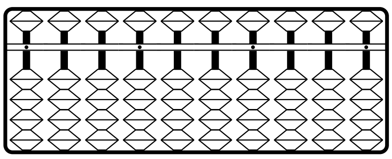
1 Types de bouliers asiatiques

Deux types de bouliers sont présentés.

Le premier est le boulier chinois, le *suanpan*. Son histoire remonte à près de 3 000 ans, avec un abaque nommé *chou suan*. On trouve une illustration de sa forme définitive sur un ouvrage datant du XIIe siècle.



Le second est le boulier japonais, le *soroban*. Sur celui-ci, un repère est placé toutes les trois tiges ; il sert comme séparateur de milliers ou comme séparateur décimal.



Le soroban n'a que $4+1$ boules par tige, alors que le suanpan en possède $5+2$. Le soroban a pris sa forme actuelle vers 1945 au Japon ; son utilisation demande beaucoup plus de dextérité que le suanpan mais il tend à se répandre partout dans le monde, même en Chine[(1)] . Notons de plus que les boules du suanpan sont arrondies alors que celles du soroban sont lenticulaires et permettent une grande rapidité (et précision) d'exécution.

Chacun des bouliers permet non seulement d'effectuer les quatre opérations usuelles (addition, soustraction, multiplication et division) mais aussi d'extraire une racine carrée ou une racine cubique ou de compter, pour le suanpan, en base 8 ou 16[(2)] .

2 Un art martial

La maîtrise du boulier est considérée dans les pays d'Asie comme un art martial. Il est symbole d'ordre, d'adresse, de concentration et de méthode. Et, comme au judo, on peut se présenter à des examens de qualification : il y a 6 degrés (« kyu ») puis 10 « dan ».

(1). Il y a d'ailleurs une extension `pst-soroban` pour LaTeX.

(2). En fait, il semblerait que le boulier chinois $5+2$ ait été conçu à l'origine pour des conversions d'unités de poids en base 16 : 1 livre (*jin*) = 16 onces (*liang*).

Les grandes entreprises exigent souvent de leurs futurs employés un certain niveau de maîtrise.

Au Japon, il y a près de trente mille académies qui enseignent l'art du boulier. Par ailleurs, il existe à Taïwan une émission radiophonique nationale quotidienne de vingt minutes qui a le but d'amener ses auditeurs au niveau de troisième kyu en une année.[(3)]

Les enfants sont amenés à pratiquer l'anzan est une technique de calcul mental consistant à effectuer les calculs sur un soroban imaginaire.

3 Représentation des nombres

L'un des principes de base est que toute opération sur boulier manipule le moins de boules possibles.

On *active* (resp. *désactive*) une boule si on l'on approche (resp. on l'éloigne) de la barre transversale. Quand toutes les boules sont désactivées, le boulier est en position neutre (en fait, dans ce cas, le nombre 0 est représenté.)

Le boulier est lié au système de numération décimale. Si une colonne (par exemple celle qui est la plus à droite) représente les unités, celle qui est sur sa gauche, les dizaines, celle qui est à gauche de cette dernière, les centaines...

Les deux bouliers sont en base alternée (5, 2)[(4)] : chaque tige comprend deux parties, une partie supérieure sur laquelle chaque boule (une *quinaire*) vaut 5 unités et une partie inférieure sur laquelle chaque boule vaut 1 unité (une *unaire*)[(5)] . Le nombre est écrit habituellement de gauche à droite.

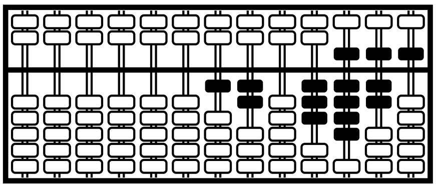
Pour une lecture plus aisée, les boules activées seront coloriées en noir.

(3). Pour vous donner un ordre d'idée, voici ce qui doit être maîtrisé pour atteindre le niveau de premier kyu dont l'examen est constitué de cinq épreuves (il faut au moins 70 % des bonnes réponses à chaque fois pour valider l'épreuve) : • 10 opérations (mélangeant additions et soustractions) portant sur 15 nombres totalisant 120 chiffres en moins de 10 minutes • 20 multiplications portant sur des nombres décimaux totalisant 10 chiffres en moins de 10 minutes • 20 divisions portant sur des nombres totalisant 15 chiffres en moins de 10 minutes • une épreuve de calcul mental • 10 problèmes de calculs d'intérêt et de pourcentages en moins de 10 minutes.

(4). On se rappellera la première écriture des chiffres romains : IIII pour 4, VII pour 7, LXI pour 51, ...

(5). Ces boules sont traditionnellement appelées « boules du Ciel » et « boules de la Terre ».

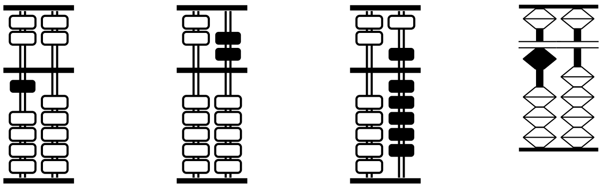
Ci-dessous est représenté le nombre 1 203 975.



1 2 0 3 9 7 5

4 Écritures du nombre 10

La présence d'une cinquième boule unaire et d'une seconde boule quinaire fait que l'écriture d'un nombre sur un suanpan n'est pas forcément unique, contrairement à celle d'un nombre sur un soroban. (Cela pourra servir lors des calculs, voir § 6.1.)



1×10 2×5 $1 \times 5 + 5 \times 1$

5 De gauche à droite

La règle « *toujours de gauche à droite* » est fondamentale pour ceux qui utilisent régulièrement le boulier. Cette règle, extrêmement importante, est l'un des plus grands avantages du boulier, car les nombres sont ajoutés ou soustraits exactement de la même façon dont ils sont lus et entendus. Donc les calculs sont beaucoup plus rapidement effectués.

6 Addition

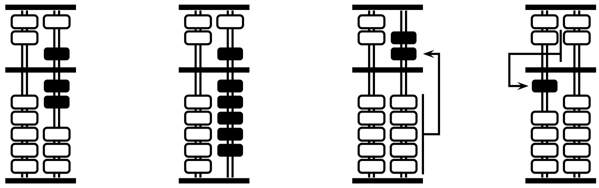
6.1 7 + 3

Cet exemple nous montre l'utilisation de la seconde quinaire et de la cinquième unaire. Dans les sections suivantes, ces deux boules ne sont plus utilisées [6] .

Pour obtenir le résultat de $7 + 3$:

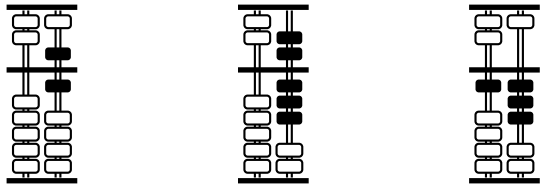
(1) On écrit 7.
(2) On ajoute 3.
(3) On remplace les 5 unaires par 1 quinaire.
(4) On remplace les 2 quinaires sur la tige des unités par 1 unaire sur la tige des dizaines.

Le résultat est 10.



(1) (2) (3) (4)

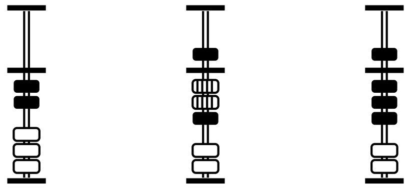
De même, on peut obtenir $6 + 7$:



6.2 $2 + 6$ et $121 + 613$

6.2.1 $2 + 6$

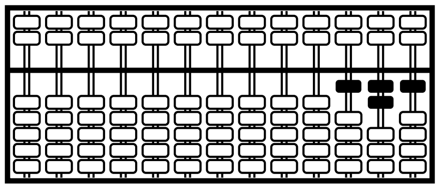
Ceci est un exemple de cas le plus élémentaire où il suffit d'activer un certain nombre de boules pour effectuer l'opération.



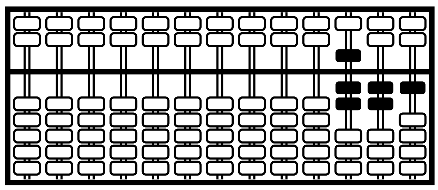
2 $2 + 6$ $= 8$

6.2.2 $121 + 613$

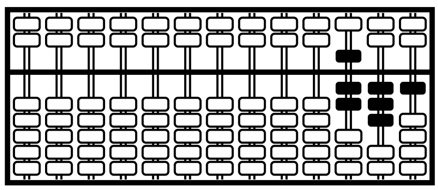
Les opérations à plusieurs chiffres sont simplement des opérations à un chiffre successives (du chiffre de poids le plus fort (*à gauche*) au chiffre de poids le plus faible (*à droite*)).



1 + 6 (centaines)

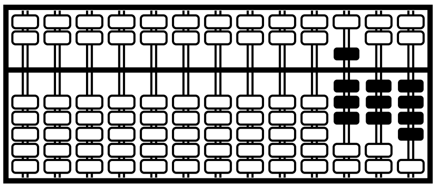


2 + 1 (dizaines)



(6). On prendra en fait les techniques du soroban. Tout ce qui peut être fait sur un soroban peut être fait sur un suanpan ; la réciproque est fausse. D'un point de vue pratique, les suanpan étant plus faciles à trouver que les soroban…

1 + 3 (unités)



Donc $121 + 613 = 834$

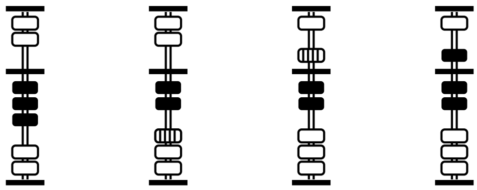
6.3 3 + 4, 9 + 4 et 7 + 6

Une autre méthode consiste à utiliser les compléments à 5 ou à 10. Elle est indispensable quand il n'y a pas assez de boules disponibles sur les tiges.
C'est aussi, et surtout, la méthode utilisée de nos jours par les utilisateurs de bouliers.
D'ailleurs, ceux-ci commencent toujours par soustraire le complément dans une addition.

6.3.1 Complément à 5

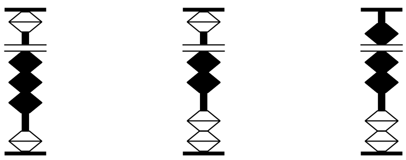
Pour calculer 3 + 4, on utilise : « $+\,4 = -\,1 + 5$ ».
En effet, dans l'addition 3 + 4, il manque des boules unaires pouvant être activées. Il faut donc nécessaire activer une boule quinaire et de soustraire le complément à 5 de 4, soit 1.

Sur un boulier chinois...



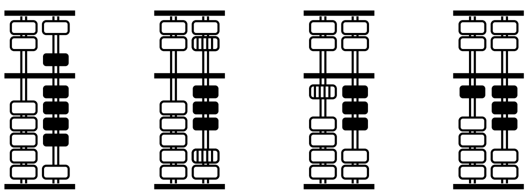
3... − 1... + 5... = 7

Sur un boulier japonais...



6.3.2 Complément à 10

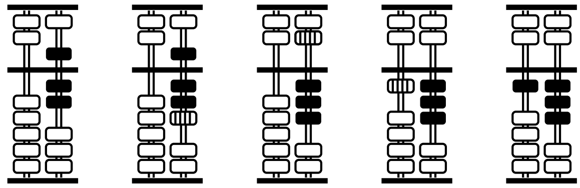
Pour calculer 9 + 4, on utilise : « $+\,4 = -6 + 10$ »



9... − 6... + 10... = 13

6.3.3 Complément à 5 et à 10

En utilisant le complément à 10, l'opération 7 + 6 devient $7 - 4 + 10$. Or la soustraction $7 - 4$ pose le même type de problème que l'addition 3 + 4 vue précédemment : il manque des boules unaires pouvant être désactivées. Il faut donc désactiver une boule quinaire et d'ajouter le complément à 5 de 4.
Ainsi, $7 + 6 = 7 - 4 + 10 = 7 + 1 - 5 + 10$.



7... + 1... − 5... + 10... = 13

6.3.4 Tableau de correspondances

Bilan : les additions dont les opérandes ne disposent que d'un chiffre se réalisent en différentes étapes... qu'il convient d'apprendre !
Par exemple, 7 correspond à $10 - 3$, $3 + 9$ correspond à[7] $3 - 1 + 10$.

Les techniques d'addition nécessitent donc d'avoir au préalable bien appris le tableau de correspondances suivant :

$+1$ $+5-4$ $+10-9$	$+2$ $+5-3$ $+10-8$	$+3$ $+5-2$ $+10-7$	$+4$ $+5-1$ $+10-6$

$+5$ $+10-5$	$+6$ $+10-4$	$+7$ $+10-3$	$+8$ $+10-2$	$+9$ $+10-1$

Remarquons que, si l'un des objectifs à atteindre au Primaire est « pour ajouter 98, on ajoute 100 et on ôte 2 », sur le boulier, on ajoute 90 puis 8.

6.4 Deux ouvertures

6.4.1 Neuf fois

Pour s'entrainer, les écoliers ajoutent 9 fois de suite le nombre 123 456 789 : le résultat est 1 111 111 101 (et est facile à vérifier !).

6.4.2 Nombres de Fibonacci

La suite est définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et, pour tout entier $n \geqslant 2$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

On choisit une tige sur la gauche (appelée « G ») et on écrit 1. On choisit une tige sur la gauche (appelée « D ») et on écrit 1.

(7). On peut rapprocher cette démarche de l'action « rendre la monnaie ».

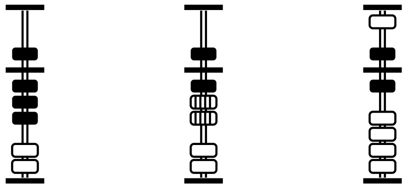
On ajoute D à G : on lit 2 à gauche et 1 à droite.
On ajoute G à D : on lit 2 à gauche et 3 à droite.
On ajoute D à G : on lit 5 à gauche et 3 à droite.
On ajoute G à D : on lit 5 à gauche et 8 à droite.
Et ainsi de suite.

7 Soustraction

7.1 Techniques similaires

On a les techniques similaires à celles de l'addition.

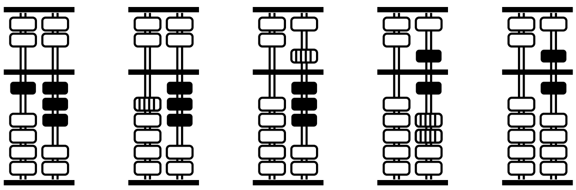
7.1.1 $8 - 2$



8 $\quad$ $8 - 2$ $\quad$ $= 6$

7.1.2 $13 - 7$

Les utilisateurs commencent toujours par ajouter le complément lors d'une soustraction.



13… $\quad$ − 10… $\quad$ + 5… $\quad$ − 2… $\quad$ = 6

7.1.3 Tableaux de correspondances

-1	-2	-3	-4
$-5+4$	$-5+3$	$-5+2$	$-5+1$
$-10+9$	$-10+8$	$-10+7$	$-10+6$

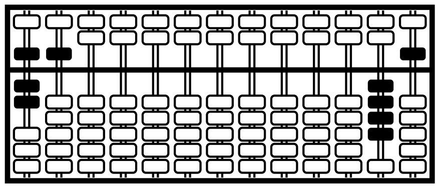
-5	-6	-7	-8	-9
$-10+5$	$-10+4$	$-10+3$	$-10+2$	$-10+1$

7.2 Deux ouvertures

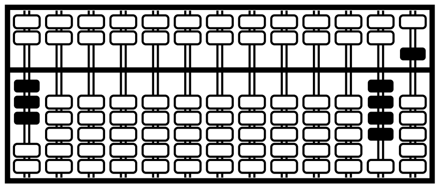
7.2.1 PGCD

Le PGCD de deux nombres a et b ($b > a$) s'obtient par soustractions alternées, basées sur la propriété : $\text{PGCD}(a\,;b) = \text{PGCD}(b-a\,;b)$ (8)

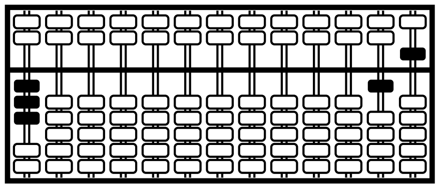
Prenons pour exemple la recherche de PGCD(75 ; 45).



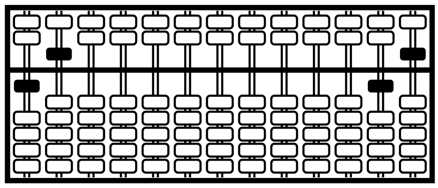
PGCD(75 ; 45) = PGCD(30 ; 45)



PGCD(30 ; 45) = PGCD(30 ; 15)



PGCD(30 ; 15) = PGCD(15 ; 15)



Les deux derniers nombres sont égaux (9) :
PGCD(45 ; 75) = 15

7.2.2 Racine carrée... version longue

La méthode suivante utilise seulement des soustractions (10) . On soustrait successivement les entiers impairs 1, 3, 5, ... de l'entier dont on veut calculer la racine carrée entière. Il suffit de compter le nombre d'entiers impairs que l'on peut soustraire de l'entier donné ; ce nombre sera la racine carrée entière.

$135 - 1 = 134$	$119 - 9 = 110$	$71 - 17 = 54$
$134 - 3 = 131$	$110 - 11 = 99$	$54 - 19 = 35$
$131 - 5 = 126$	$99 - 13 = 86$	$35 - 21 = 14$
$126 - 7 = 119$	$86 - 15 = 71$	

On a pu effectuer 11 soustractions, donc 11 est la racine carrée entière de 135. ($135 = 11^2 + 14$)

(8). On écrit traditionnellement $\text{PGCD}(b\,;b-a)$ dans le membre de droite. Cette écriture imposerait d'inverser à chaque étape les nombres sur le boulier... ce qui est contraire au principe de déplacement du minimum de boules.

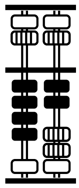
(9). Dans le problème 1-6 du *Jui Zhang Suan Shu* (–206, 220), le PGCD est (déjà) appelé l' « égal ».)

(10). Cette méthode est dite « de Friden », développée en Europe dans les années 1950.

7.3 Différences négatives

Un nombre négatif ne pouvant pas être placé sur le boulier, la soustraction d'un nombre à un plus petit est faite au moyen des nombres complémentaires.
Il est nécessaire de pouvoir reconnaître des nombres complémentaires rapidement. Il ne faut prendre en compte la cinquième unaire ni la seconde quinaire. Les tiges ci-dessous montrent le nombre 42.

Les tiges ci-contre montrent le nombre 42. Remarquez les boules hachurées. Elles forment la base pour le nombre complémentaire. Pour le trouver, on ajoute 1 à la somme des boules hachurées.

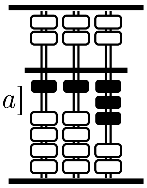


La somme des boules hachurés est 57. $57 + 1 = 58$. Le complément à 100 de 42 est 58.

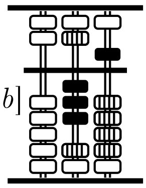
Calculons $13 - 78$.

$13 < 78$. On ajoute 100 à 13. [a]

[a]



[b]



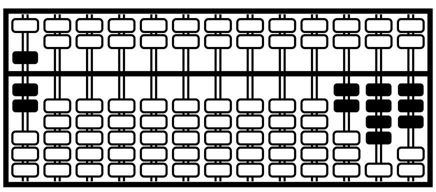
On calcule $113 - 78$. La valeur $13 - 78$ apparaît [b] à l'aide d'un nombre complémentaire, qui est ici 64. On ajoute 1. On obtient donc $13 - 78 = -65$.

8 Multiplication

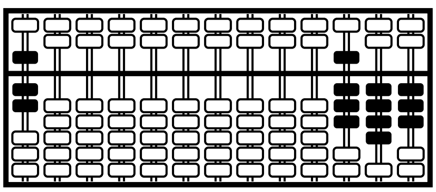
8.1 Multiplicande à un chiffre

On va calculer 7×283.

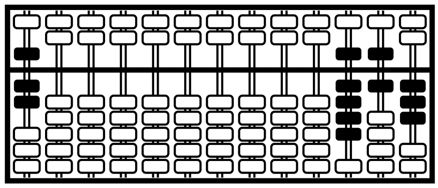
On commence par multiplier le poids le plus fort. On écrit le multiplicateur (7) à gauche sur le boulier et le multiplicande (283) à droite.



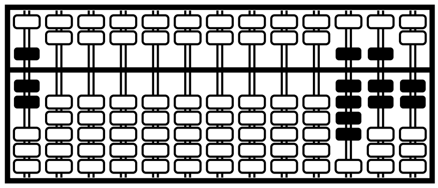
On effectue le produit de 2 par 7 (14), qui *remplace* 2. Le chiffre 2 a alors disparu... mais peu importe car il ne sera plus utilisé.



On effectue le produit de 8 par 7 (56), qui remplace 8, le nombre 5 venant s'ajouter au nombre précédent.



De même, on effectue le produit de 3 par 7 (21), qui remplace 3, le chiffre 2 venant s'ajouter au nombre précédent.



On lit le résultat : $7 \times 283 = 1\,981$

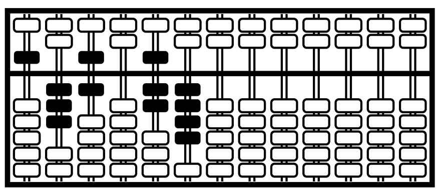
8.2 Multiplicande à plusieurs chiffres

[Il y a plusieurs méthodes. Celle qui est détaillée ici (multiplicande à plusieurs chiffres) peut être adaptée à un multiplicande à un chiffre.]

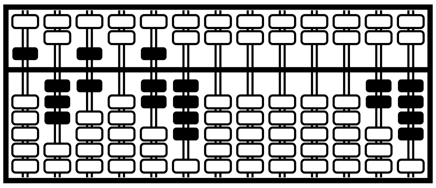
On écrit sur la gauche du boulier le multiplicateur et , à sa droite, le multiplicande, en laissant une tige libre entre les deux nombres. Sur la droite du boulier, il doit y avoir au moins autant de rangées de libres que le nombre de chiffres du multiplicande.
On multiplie chaque chiffre du multiplicande, dans l'ordre croissant des puissances, par chaque chiffre du multiplicateur, dans l'ordre croissant des puissances.
Dès que l'on a multiplié un chiffre du multiplicateur par tous les chiffres du multiplicande, on efface ce chiffre en désactivant les boules correspondantes.

			5	3	6
	×			7	4
$4 \times 6 = 24$				2	4
$4 \times 30 = 120$			1	2	
$4 \times 500 = 2\,000$		2	0		
$70 \times 6 = 420$			4	2	
$70 \times 30 = 2\,100$		2	1		
$70 \times 500 = 35\,000$	3	5			
	3	9	6	6	4

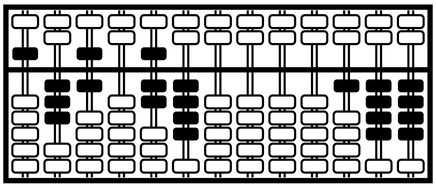
536×74



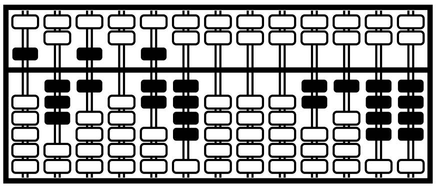
$= \ 4 \times 6$



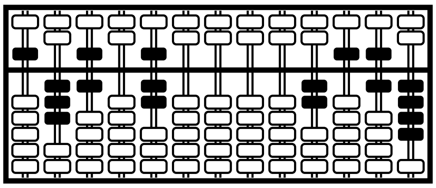
$+ \ 4 \times 30$



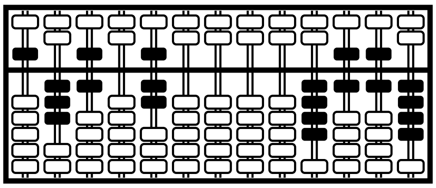
$+ \ 4 \times 500$



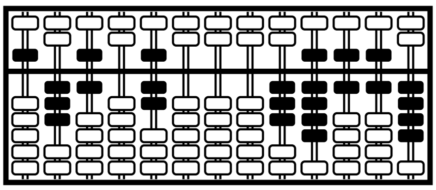
$+ \ 70 \times 6$



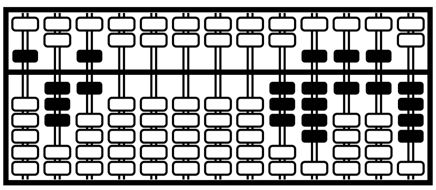
$+ \ 70 \times 30$



$+ \ 70 \times 500$



$536 \times 74 = 39\,664$



Voilà pour la méthode chinoise. Pour la japonaise, on multiplie chaque chiffre du multiplicande, dans l'ordre croissant des puissances, par chaque chiffre du multiplicateur, dans l'ordre décroissant des puissances. Dès que l'on a multiplié un chiffre du multiplicande par tous les chiffres du multiplicateur, etc.
Les deux méthodes sont basées sur la distributivité par rapport à l'addition.

9 Division (diviseur à un chiffre)

La division est l'opération la plus délicate à effectuer sur un boulier ; elle demande de bien maîtriser les trois opérations précédentes.

9.1 (Une) méthode

On pose le diviseur à gauche du boulier et le dividende à droite.
La division s'effectue en considérant chaque chiffre du dividende selon les puissances décroissantes.
On désigne par a le nombre considéré au dividende et par b le diviseur.

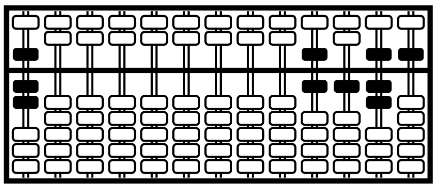
Deux règles sont à appliquer :

Règle 1 – Si $a \geqslant b$ alors on place à gauche de a le quotient entier de la division de a par b et le reste occupe la colonne de a.

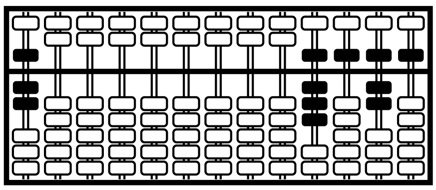
Règle 2 – Si $a < b$ alors on place sur la colonne de a, le quotient entier de la division de $10\,a$ par b et le reste s'ajoute à la colonne de droite.

Le quotient entier apparaîtra décalé d'une colonne sur la gauche, et le reste apparaîtra sur la dernière colonne à droite.

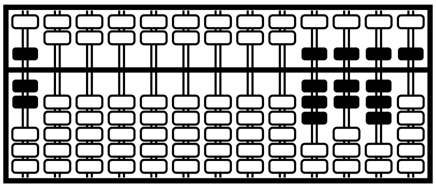
9.2 $6\,175 \div 7$



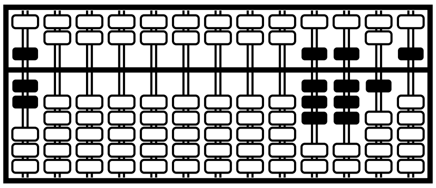
$6\,175 \div 7$



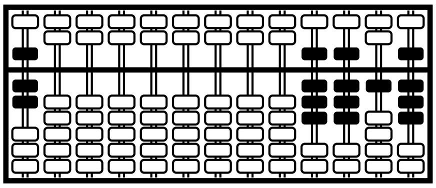
$6 \div 7 \longrightarrow 60 \div 7 = 8$ reste 4 (règle 2)



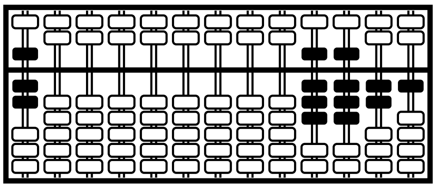
$5 \div 7 \longrightarrow 50 \div 7 = 7$ reste 1 (règle 2)



$8 \div 7 = 1$ reste 1 (règle 1)



$1 \div 7 \longrightarrow 10 \div 7 = 1$ reste 3 (règle 2)



$8 \div 7 = 1$ reste 1 (règle 1)

Le quotient entier de $6\,175 \div 7$ vaut 882 ; il reste 1.

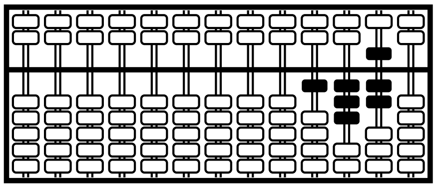
10 Extraction de racines carrées

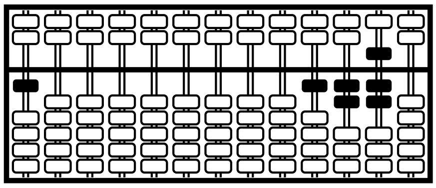
10.1 Algorithme

Soit N le nombre entier dont on veut extraire la racine. On « découpe », à partir du chiffre des unités, N en groupes de deux chiffres $N_1, N_2, \cdots, N_k$ (N_1 comporte 1 ou 2 chiffres). Ainsi, pour $N = 1\,370$, $N_1 = 13$ et $N_2 = 70$. (11)

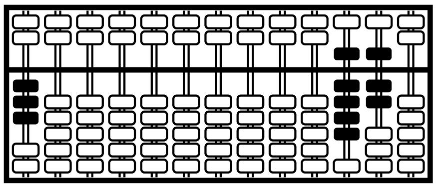
1. Écrire N à droite du boulier.
2. Poser 1 à gauche du boulier ; soustraire 1 au premier groupe N_1.
3. Ajouter 2 au nombre à gauche du boulier ; soustraire le résultat au reste du premier groupe. Recommencer cette étape tant que que le nombre à gauche du boulier est inférieur ou égal au reste du premier groupe.
4. Ajouter 1 au nombre à gauche du boulier, multiplier par 10 puis ajouter 1 ; soustraire le résultat au nombre formé par le reste N_1', à savoir $100\,N_1' + N_2$.
   Recommencer alors les étapes 3 et 4 aux groupes suivants tant que les soustractions peuvent être faites (c.-à-d. la différence n'est pas négative).
5. Ajouter 1 au nombre de gauche et diviser par 2. Le nombre obtenu est la partie entière de la racine carrée de N.

10.2 $N = 1\,370$

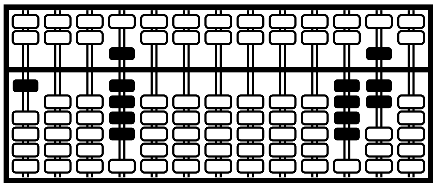




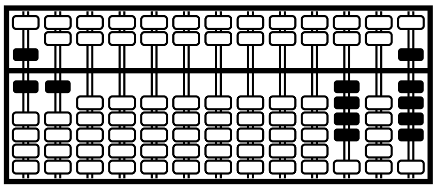
$+ 1$ « $13 - 1$ »



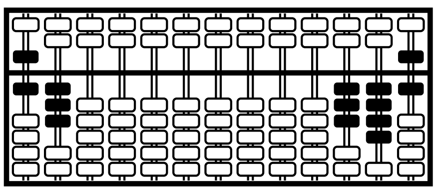
$1 + 2 = 3$ « $12 - 3$ »



$3 + 2$ « $9 - 5$ »

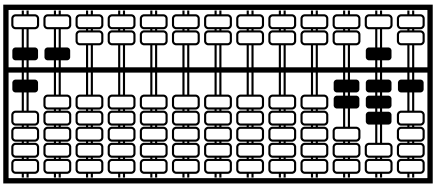


$(5 + 1) \times 10 + 1$ « $470 - 61$ »

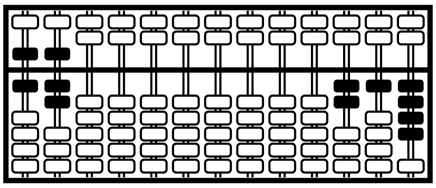


$61 + 2$ « $409 - 63$ »

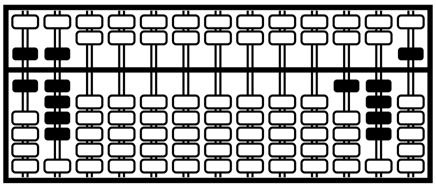
(11). Le principe de cette méthode repose sur l'étude de la suite des entiers impairs. Si U_n est le n-ième nombre impair et $S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ alors $S_n = n^2$. Ainsi la partie entière de la racine carrée est égale à $(U_n + 1) \div 2$.



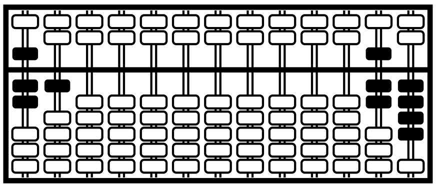
$63 + 2$ « $346 - 65$ »



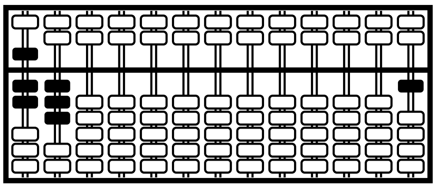
$65 + 2$ « $281 - 67$ »



$67 + 2$ « $214 - 69$ »



$69 + 2$ « $145 - 71$ »



$71 + 2 = 73$ « $74 - 73$ »

La partie entière de $\sqrt{1\,370}$ est $\dfrac{73+1}{2} = 37$.

$(1\,370 = 37^2 + 1)$

11 Pour le Primaire...

Nicolas Balacheff et Robert Neyret (Université J. Fourier, Grenoble) ont travaillé avec des élèves de CM (en 1981-1982). Je renvoie le lecteur intéressé par leurs travaux dans les articles référencés plus bas (les articles sur l'e-toile sont ceux publiés dans N).

Je renvoie aussi le même lecteur au document écrit par Nathalie Aymé.

12 Bibliographie et sitographie

(Liste non exhaustive sans ordre particulier !)

`http://educmath.math-ens.fr/Educmath/ressources/documents/bouliers`

`http://baptiste.gorin.pagesperso-orange.fr/boulier.html`

`http://fr.wikibooks.org/wiki/S'initier_au_boulier_en_10_leçons`

`http://www.ee.ryerson.ca:8080/~elf/abacus/`

`http://www.reunion.iufm.fr/recherche/irem/IMG/pdf/Boulier_chinois.pdf`
Le boulier chinois. Histoire, Technique, Applications pédagogiques, Nathalie Aymé

`http://webhome.idirect.com/~totton/abacus/Abacus_Mystery_of_the_Beada.pdf`
Abacus : Mystery of the bead, Totton Heffelfinger & Gary Flom, 2004

Procédés calculatoires en Chine ancienne, Arnaud Gazagnes, IREM de Reims, 2005

Le Boulier, Jean Cumin, Christian Deluchey et Jean Hossenlopp, L'impensé radical, 1988 *(Épuisé)*

`http://webhome.idirect.com/~totton/abacus/PDF.htm`
Des exercices !

`http://www.youtube.com/watch?v=Px_hvzYS3_Y`
Video sur les Anzan

`http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_n/numero.php?num=25`
`http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_n/numero.php?num=28`
Bouliers et écriture des nombres au CM, Grand N, Nicolas Balacheff, Robert Neyret, N° 25, p. 39-82, 1981 et N° 28, p. 67-87, 1982

Ne perdez pas la boule !

`arnaud.gazagnes@ac-lyon.fr`