

JOURNÉES NATIONALES A.P.M.E.P. METZ 27-30 octobre 2012

Atelier P3-20 ACTIVITÉS MENTALES ET AUTOMATISMES Danièle EYNARD¹ et Aude SAINFORT²

Le calcul mental évoque encore souvent de rapides séances rythmées où les élèves répondent soit en levant le doigt, soit en inscrivant leur résultat sur l'ardoise au signal du maître ! Mais l'activité mentale ne se résume pas à la seule pratique du calcul numérique : ce mode de travail s'étend à la résolution de problèmes, à la création d'images visuelles en géométrie et au développement du raisonnement.

L'Irem de Clermont-Ferrand a publié, dès 1994, une brochure intitulée « Calcul mental et Automatismes au collège » qui a connu un vif et large succès. Face aux difficultés croissantes observées dans nos classes, notamment en calcul numérique, et aux changements de programmes, deux nouvelles brochures ont vu le jour en septembre 2007 et septembre 2010.

D'aucuns penseront peut-être que si des auvergnats se sont intéressés de longue date au calcul mental, c'est parce qu'ils ont une solide réputation : « ils comptent » ... mais pas seulement !

Déroulement de l'atelier

Une trentaine de participants environ étaient présents, une douzaine d'entre eux enseignant en lycée et les autres en collège.

Un diaporama introductif proposait notamment de distinguer « Calcul mental automatisé », « Calcul mental réfléchi » et « Automatismes », les frontières entre les trois types n'étant pas toujours faciles à déceler :

Calcul mental automatisé : les résultats sont produits de façon spontanée et nécessitent des connaissances ou procédures instantanément disponibles.

Par exemple, factoriser $x^2 - 4$ ou simplifier $\ln(e^4)$ s'appuient sur des résultats qui doivent être mémorisés.

Calcul mental réfléchi : il s'agit d'élaborer une stratégie, les procédures variant selon les individus, le moment et le contexte. Les étapes sont plus nombreuses : il peut être parfois nécessaire d'écrire des résultats intermédiaires.

Par exemple, l'affirmation $\sqrt{32} - \sqrt{2} = \sqrt{18}$ est-elle vraie ou fausse ?

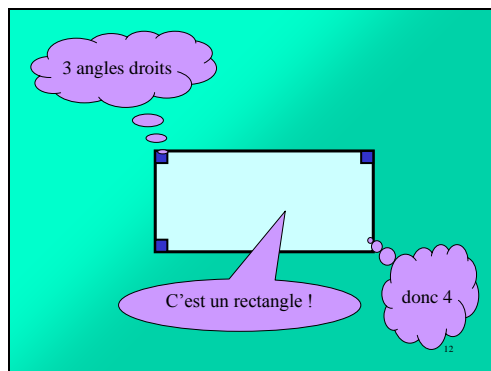
Pour répondre, plusieurs méthodes sont possibles.

- élever les deux membres au carré, après avoir vérifié qu'ils étaient positifs ;
- écrire $\sqrt{32} - \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ et $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$;
- constater que $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ et $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ donc leur différence est égale à $\sqrt{2}$;
- multiplier les deux membres par $\sqrt{2}$: $(\sqrt{32} - \sqrt{2})\sqrt{2} = 8 - 2 = 6$ et $\sqrt{18}\sqrt{2} = 6 \dots$

¹ deynard.apmep@wanadoo.fr

² sainfort.aude@orange.fr

Automatismes : le résultat, là aussi, relève de procédures variées élaborées à partir de propriétés connues. Mais d'autres capacités que celles du simple calcul sont mises en jeu. Voici un exemple :



Calcul mental – Automatismes : quelles différences ?

**Calcul mental - Automatismes :
quelles différences ?**

Exemple 1:

- > **Calcul mental :** Effectuer $7 \times 0,8$
- > **Automatismes :** Calculer l'aire du parallélogramme

**Calcul mental - Automatismes :
quelles différences ?**

<p>Exemple 2:</p> <ul style="list-style-type: none"> > Calcul mental : Résoudre $(x - 3)(x + 1) = 0$ > Automatismes : Quelles sont les abscisses des points d'intersection avec l'axe des abscisses de la courbe de la fonction définie par $f(x) = (x - 3)(x + 1)$? 	<p>Exemple 3:</p> <ul style="list-style-type: none"> > Calcul mental : Calculer $1 - (1/4 + 30/100)$ > Automatismes : Au lycée Blaise Pascal, 30% des élèves sont en seconde et $1/4$ en terminale. Quelle est la probabilité qu'un élève ne soit ni en seconde, ni en terminale ?
--	---

15

Des activités concrètes

Une vingtaine d'activités, aux modalités de passation variées, balayant tous les niveaux de la sixième à la TS et de nombreux domaines furent présentées : leur durée étant variable de quelques minutes à une heure et demie.

Nous conseillons une correction « à chaud » suivant immédiatement la production des réponses : attendue par l'élève encore centré sur sa tâche, elle lui permet de prendre immédiatement conscience de ses erreurs, de découvrir parfois la puissance et l'originalité des procédures mises en jeu par d'autres, procédures que le professeur prendra soin d'explicitier : les échanges sont alors fructueux.

Voici quatre exemples :

Exemple 1 : *Ordre de grandeur en 6^{ème}.*

Consigne :

En utilisant les ordres de grandeurs, trouver la réponse exacte pour chacune des opérations demandées.

Commentaires :

Dans le diaporama la question du haut est en bleu et celle du bas est en rouge : le professeur attribue une couleur à chaque élève, les élèves ne traitant que les questions de leur couleur. En fin de diaporama figurent les corrections. Seules quelques diapositives sont reproduites ci-dessous.

Ordre de grandeur Série n°2

En utilisant les ordres de grandeurs, trouver la réponse exacte à chacune des opérations proposées.

1. $457 \times 13 =$

a.	b.	c.
5 941	59 341	596 341

1. $9 \times 924 =$

a.	b.	c.
83 631	8 316	836

2. $2\ 185 \times 98 =$

a.	b.	c.
2 140	21 410	214 130

2. $997 \times 24 =$

a.	b.	c.
23 928	2 398	230 928

3. $27\ 923 + 33\ 789 =$

a.	b.	c.
51 712	61 712	510 712

3. $86\ 521 + 15\ 284 =$

a.	b.	c.
91 805	911 805	101 805

4. $1,02 \times 498,4 =$

a.	b.	c.
497,42	47,548	508,368

4. $237,1 \times 0,96 =$

a.	b.	c.
237,96	227,616	27,616

5. $58,38 + 141,572 =$

a.	b.	c.
147 410	1 474,1	199,952

5. $252,15 + 49,365 =$

a.	b.	c.
745,30	301,515	74 580

CORRECTION

1. $457 \times 13 = ?$

457 est proche de 500
13 est proche de 10
Donc 457×13 est proche de $500 \times 10 = 5\ 000$

a.	b.	c.
5 941	59 341	596 341

1. $9 \times 924 = ?$

9 est proche de 9
924 est proche de 900
Donc 9×924 est proche de $9 \times 900 = 8\ 100$

a.	b.	c.
83 631	8 316	836

2. $2\ 185 \times 98 = ?$

2 185 est proche de 2 000
98 est proche de 100
Donc $2\ 185 \times 98$ est proche de $2\ 000 \times 100 = 200\ 000$

a.	b.	c.
2 140	21 410	214 130

2. $997 \times 24 = ?$

997 est proche de 1 000
24 est proche de 20
Donc 997×24 est proche de $1\ 000 \times 20 = 20\ 000$

a.	b.	c.
23 928	2 398	230 928

3. $27\ 923 + 33\ 789 = ?$

27 923 est proche de 27 000
33 789 est proche de 33 000
Donc $27\ 923 + 33\ 789$ est proche de $27\ 000 + 33\ 000 = 60\ 000$

a.	b.	c.
51 712	61 712	510 712

3. $86\ 521 + 15\ 284 = ?$

86 521 est proche de 85 000
15 284 est proche de 15 000
Donc $86\ 521 + 15\ 284$ est proche de $85\ 000 + 15\ 000 = 100\ 000$

a.	b.	c.
91 805	911 805	101 805

4. $1,02 \times 498,4 = ?$

1,02 est proche de 1
498,4 est proche de 500
Donc $1,02 \times 498,4$ est proche de $1 \times 500 = 500$
Attention, on multiplie 498,4 par un nombre supérieur à 1, le résultat est donc supérieur à 498,4

a.	b.	c.
497,42	47,548	508,368

4. $237,1 \times 0,96 = ?$

237,1 est proche de 237
0,96 est proche de 1
Donc $237,1 \times 0,96$ est proche de $237 \times 1 = 237$
Attention, on multiplie 237,1 par un nombre inférieur à 1, donc le résultat est inférieur à 237,1 :

a.	b.	c.
237,96	227,616	27,616

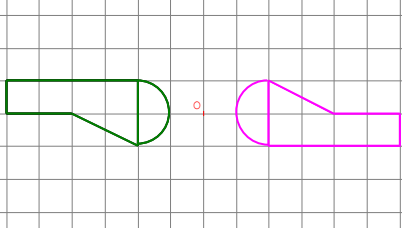
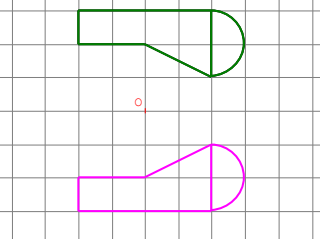
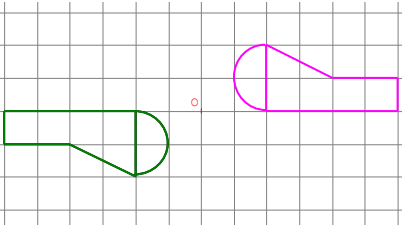
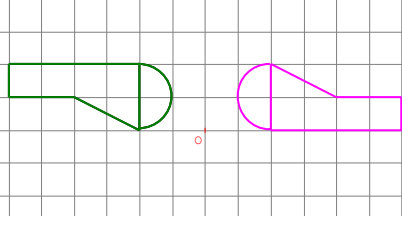
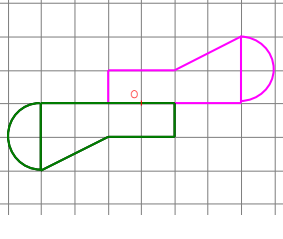
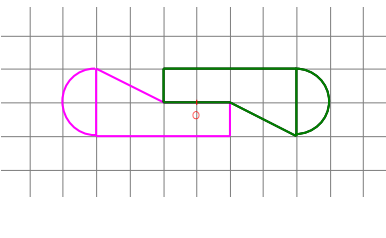
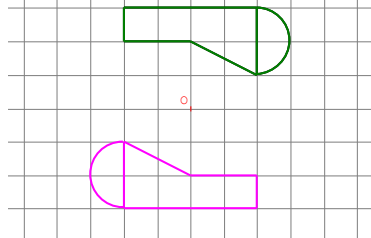
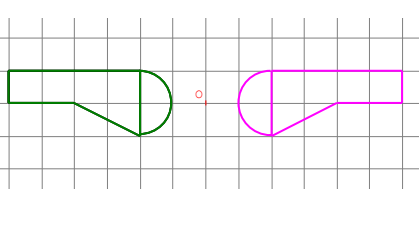
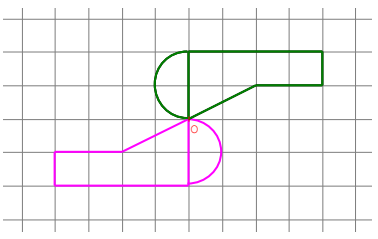
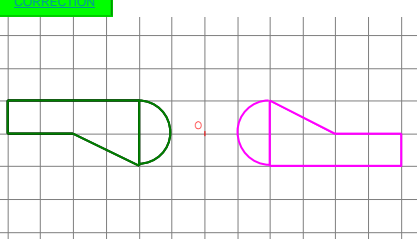
Exemple 2 : Symétrie centrale en 5ème
Consigne :

Les figures suivantes sont-elles symétriques par rapport au point O ?

Tout sur les journées de Metz : <http://www.apmep.asso.fr/-2012-Metz->

Commentaires :

L'objectif est de travailler l'image mentale de deux figures symétriques par rapport à un point. Une correction est présentée à la suite des questions dans le diaporama. En lien avec des fichiers Geoplan-Geospace, elle permet, à l'aide des flèches du clavier, de visualiser la réponse exacte.

Les figures suivantes sont-elles symétriques par rapport au point O ?	N°1 : 	N°2 : 
N°3 : 	N°4 : 	N°8 : 
N°6 : 	N°7 : 	N°9 : 
N°10 : 	CORRECTION	N°1 : OUI 

Exemple 3 : *Statistiques descriptives en seconde*

Consigne :

Noter sur votre feuille le numéro de la diapositive projetée et la (ou les) réponses demandées.

Commentaires :

Ce diaporama peut servir d'évaluation en fin de chapitre : 40 résultats sont attendus qui peuvent être notés chacun sur un point, par exemple.

Sa passation dure environ 40 minutes, et la correction mérite parfois d'y consacrer une heure.

Statistiques

Valeur	16	17	18
Effectif	10	0	10

- Moyenne = ?

Valeur	21	22	23
Fréquence	0	0,5	0,5

- Moyenne = ?

Valeur	1	2	3
Effectif	3	1	1

- Mode = ?
- Etendue = ?
- Moyenne = ?
- Médiane = ?

Dans une école maternelle, 3 filles et 2 garçons jouent avec de la pâte à modeler.

- La taille moyenne des 3 filles est 1 m et celle des 2 garçons 1,1 m.

La taille moyenne des 5 enfants est ?

Voici le nombre de SMS reçus par jour par un groupe d'amis

Nombre de SMS	3	4	5	10
Effectifs	1	4	3	2

- Le nombre moyen de SMS reçus par jour est 5,5.
OUI NON
- L'étendue de cette série est égale à 7.
OUI NON
- 80% des amis ont reçu moins de 8 SMS
OUI NON
- 50% des amis ont reçu au moins 5 SMS
OUI NON

Voici le polygone des effectifs cumulés croissants d'une série comprenant 3 classes [0 ; 3 [, [3 ; 6 [et [6 ; 9]

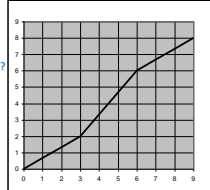
L'effectif de la classe [6 ; 9] est ?

La fréquence de la classe [0 ; 3 [est ?

Médiane = ?

$Q_1 = ?$

$Q_3 = ?$



- La moyenne de la série,

- 5 ; - 4 ; - 2 ; 1 ; 6 ; 10 est ?

- La moyenne de la série,

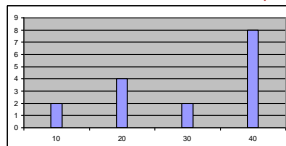
1995 ; 1996 ; 1998 ; 2001 ; 2006 ; 2010 est ?

Le personnel soignant d'une clinique, constitué de 200 personnes, reçoit une prime de fin d'année.

Montant de la prime en euros	200	300	400	500	600
Effectif	25	50	70	35	20

- La fréquence qu'une personne ait une prime de 300 € est ?
- La valeur du 1er quartile est ?
- La valeur de la médiane est ?
- La valeur du 3ème quartile ?

Voici le diagramme en bâtons des effectifs d'une série statistique:

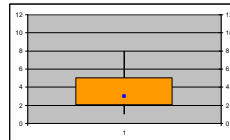


Effectif total = ?

Mode = ?

Médiane = ?

Voici la boîte à moustache représentant le temps de lecture hebdomadaire d'une classe de 36 élèves



- $Q_1 = ?$
- $Q_3 = ?$
- Quelle est l'étendue de la série?
- Peut-on affirmer que 50% des élèves lisent entre 2 et 5h par semaine?
OUI NON
- Peut-on affirmer qu'au moins 18 élèves lisent 3h par semaine ou moins ?
OUI NON

Voici la répartition des élèves d'une classe de 2nde selon leur âge:

Age	15	16	17	Total
Effectif	7	10	a	25
Fréquence	d	c	32%	b

- a = ?
- b = ?
- c = ?
- d = ?

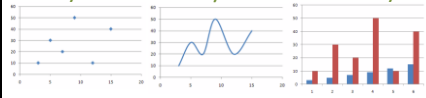
Cette série statistique est représentée par:

Valeur	3	5	7	9	12	15
Effectif	10	30	20	50	10	40

a)

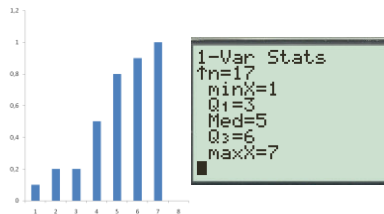
b)

c)



Le diagramme suivant correspond-il à l'écran de la calculatrice?

FCC



Valeur	8	10	11	12	13	15
Effectif	1	2	2	6	4	1

A la calculatrice, éditer cette série.

- Moyenne = ?
- Médiane = ?
- $Q_1 = ?$
- $Q_3 = ?$

Exemple 4 : Nombres complexes en TS

Consigne :

Répondre aux questions suivantes.

Commentaires :

La passation dure environ cinq minutes : soit les questions sont écrites l'une après l'autre puis effacées au tableau, soit elles sont dévoilées une à une sur un transparent, soit enfin elles sont projetées sur un diaporama. La fiche ci-dessous est ensuite distribuée et la correction immédiate.

Nombres complexes 2 : module et arguments.

Questions	Réponses
1-Donner le <i>module</i> du nombre complexe : $1 - i\sqrt{2}$	
2-Donner un <i>argument</i> du nombre complexe : $-3i$	
3-Donner un <i>argument</i> du nombre complexe : $1 - i$	
4-Donner le <i>module</i> du nombre complexe : $\overline{3 - 2i}$	
5-Donner le <i>module</i> du nombre complexe : $i(1 - i)(1 + i)$	
6-Donner le <i>module</i> du nombre complexe : $\frac{-2}{(1 - i)^2}$	
7-Donner un <i>argument</i> du nombre complexe : $i(1 - i)(1 + i)$	
8-Donner un <i>argument</i> du nombre complexe : $\frac{1}{i}$	
9-Donner le <i>module</i> du nombre complexe : $(1 + i)^4$	
10-Donner un <i>argument</i> du nombre complexe : $(1 + i)^4$	
11-Donner le <i>module</i> du nombre complexe : $\cos(3\pi/4) + i \sin(3\pi/4)$	

Bilan de l'atelier

Les participants ont été nombreux à enregistrer sur une clé USB les fichiers et diaporamas préparés à leur intention. Nous avons bon espoir qu'ils les utilisent, les amendent et les divulguent...

En guise de conclusion : plaider pour de telles activités...

En affranchissant l'élève de la tâche de rédaction qui peut constituer un véritable obstacle à l'apprentissage, la pratique régulière d'activités mentales favorise chez lui l'acquisition d'automatismes fondamentaux tant dans le domaine numérique, algébrique que géométrique.

Or quel enseignant n'a jamais fait le constat que lors de l'étude d'une notion nouvelle, par exemple, la maîtrise desdits automatismes (« techniques » en calcul numérique ou littéral, davantage « visuels » en géométrie...) est indispensable pour aborder les problèmes l'introduisant et ne pas engluer la réflexion dans des aspects faisant perdre de vue l'objectif poursuivi ?

Le tableau ci-dessous résume synthétiquement quelques uns des intérêts de cette pratique, tant du point de vue des enseignants que des élèves :

<i>Du point de vue de l'élève</i>	<i>Du point de vue du professeur</i>
<ul style="list-style-type: none">• Faire « ses gammes » : la pratique fait que l'on mémorise toujours plus de résultats ;• S'auto évaluer en cours d'apprentissage ;• Développer des moyens de contrôles (ordre de grandeur...);• Mémoriser pour libérer de la mémoire de travail et améliorer les performances ;• Créer des images mentales ;• Affranchir l'élève des difficultés liées à la rédaction ;• Le plaisir de chercher et de participer.	<ul style="list-style-type: none">• Faire rapidement une évaluation diagnostique sur une notion donnée ;• Entretenir tout au long de l'année des procédures mentales déjà mises en place ;• Gagner du temps pour aller à l'essentiel ;• Favoriser l'organisation d'une progression en spirale ;• Favoriser la concentration et la qualité d'écoute ;• Il n'est pas rare d'entendre les mouches voler...

L'expérience montre enfin que ce sont des activités auxquelles adhère toute la classe !

Bibliographie

- Calcul mental et Automatismes. Niveau Lycée (de la seconde à la terminale). Coédition APMEP – Irem de Clermont-Ferrand (Septembre 2007). Brochure n°180.
- Activités mentales et Automatismes au collège. Coédition APMEP – Irem de Clermont-Ferrand (Septembre 2010). Brochure n°191.