

plot

BULLETIN DES RÉGIONALES A P M E P
DE POITIERS, LIMOGES ET ORLÉANS-TOURS

Sommaire du n° 11



Rencontres

- Gérard FERRAND - *Une histoire édifiante* 3
Marc BLANCHARD - *Ah! Courons sous la pluie* 9

Pratique

- Michel BRIDENNE - *Les suites* 12
Michel DARCHE - *Autour du triangle de Pascal* 20
Daniel FREDON - *Triangle de Pascal et dénombrement* 29

Echanges

- Courrier des lecteurs 31
Vie des Régionales 33

- Agenda** 36

UNE HISTOIRE ÉDIFIANTE

Gérard FERRAND
Université d'Orléans

Comment l'analyse superficielle d'une déclaration imprudente plongea l'Assemblée Nationale dans le plus profond désespoir, et comment la démocratie fut sauvée par l'esprit de logique et de rigueur exercé en classe de mathématique.

Tout commença lors d'une séance houleuse de l'Assemblée Nationale.
Après avoir lancé :

"C'est un scandale !"

Un député ajouta :

"Tous les députés sont des menteurs !"

Déclaration étonnante, de la part d'un député, mais somme toute assez banale. L'incident aurait vite été oublié si, le surlendemain, un journal du soir n'avait publié, sous forme d'une "tribune libre", le point de vue d'un jeune agrégé de philosophie :

C'ETAIT ECRIT

par A.-G. K.

*"Malheur au monde à cause
des scandales" (Mat. 18.7)*

Il ne faut pas s'étonner que les députés, occupés à voter des lois, mais délaissant la Loi, n'aient pas pris conscience du caractère transcendant du scandale dont l'Assemblée Nationale reste le théâtre. Ils ont oublié que le mot "scandale" appartient d'abord au vocabulaire religieux (du grec "skandalon", qui signifie aussi obstacle, piège). C'est pourtant à un obstacle insurmontable qu'ils sont maintenant confrontés, ils sont pris au piège, ils ne sortiront

jamais de l'abîme métaphysique dans lequel la déclaration imprudente de l'un d'entre eux les a plongés.

En effet, ce qui est dit, à savoir que tous les députés sont des menteurs, est dit. Et alors de deux choses l'une : ou bien c'est vrai, ou bien c'est faux.

Mais si c'est vrai, celui-là même qui l'a dit (celui par qui le scandale arrive...), et qui est député, est alors un menteur et donc c'est faux.

Mais inversement, si c'est faux, ils ne sont plus menteurs. Ils disent la vérité, et alors ce qu'a dit ce député est vrai.

Si c'est vrai, c'est faux, et si c'est faux, c'est vrai !

Le voilà le scandale suprême, la contradiction absolue qui reste pour l'éternité, et qui atteint les

fondements de la démocratie parlementaire, en même temps que ceux de notre logique.

En vérité, ce paradoxe était bien connu des philosophes depuis l'antiquité, par exemple sous la forme d'une déclaration d'Epiménide le Crétois : "Tous les Crétois sont des menteurs !"

Saint Paul (de Tarse) lui-même y faisait allusion dans son Epître à Titus. Et comment ne pas être frappé par le caractère étrangement prophétique de ses paroles quand on pense que, de nos jours, c'est des députés qu'il s'agit : "Nombreux sont en effet...les vains discoureurs, les séducteurs,...L'un d'entre eux, leur propre prophète, a dit : "Crétois, perpétuels menteurs, mauvaises bêtes, ventres paresseux." Ce témoignage est vrai..."

Les réactions du monde politique furent aussi rapides qu'inattendues.

Les députés se réunirent par groupes parlementaires, puis par sous-groupes, et enfin ne se réunirent plus du tout. Aucun ne pouvait plus supporter la présence de ses collègues.

C'est que, venant du plus profond de leur être politique, l'angoisse les paralysait : ils auraient préféré mille fois être accusés de n'importe quoi, mais accusés franchement. Ils auraient su comment s'en sortir. Mais avec cette histoire de menteurs qui ne l'étaient pas tout en l'étant, il s'agissait du soupçon d'un soupçon, insaisissable mais insidieux. Les multiples petites entorses à la vérité, sans lesquelles il n'y aurait pas de vie politique possible, leur revenaient en mémoire de façon obsédante. Un irrépressible sentiment de culpabilité les maintenait dans une attente angoissée, dans l'attente d'une justice immanente, ou transcendante, selon leurs convictions.

Les travaux parlementaires étaient donc interrompus.

Or, depuis la séance houleuse et la malheureuse déclaration qui avait tout déclenché, les députés avaient commencé à débattre des graves problèmes de financement qui affectaient les IREM (Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques). C'est pourquoi les enseignants, et tout particulièrement les enseignants de mathématiques, ainsi que leurs élèves, suivaient alors l'actualité politique d'encore plus près que d'habitude.

Déjà, dès sa parution, la "tribune libre" d'A-G. K. avait été étudiée par certaines classes dans le cadre d'expériences du type "utilisation de la presse à l'école".

Mais bientôt le pays pris conscience de la gravité de la situation, qui pouvait, par la disparition de fait de l'Assemblée, favoriser on ne sait quelle aventure.

Il se produisit alors un de ces événements inattendus et quasi-miraculeux dont notre histoire a le secret : comme en écho à l'initiative de la petite bergère de Lorraine qui avait su mobiliser les énergies et délivrer Orléans, c'est parmi les élèves d'un CES de cette ville que jaillit l'idée salvatrice.

Des spécialistes tentent d'expliquer le phénomène par des circonstances exceptionnellement favorables. Quoiqu'il en soit, il est certain que l'influence de l'IREM sur la qualité de la relation pédagogique n'y fut pas étrangère.

Le remède qui allait arracher les députés à leur état névrotique consistait en un subtil mélange de logique et de psychologie. Dans chaque circonscription électorale (sauf une, on comprendra pourquoi) les élèves adressèrent au député, leur député, la lettre que voici.

Monsieur le Député,

Nous voudrions attirer votre attention sur une erreur de raisonnement commise dans l'article intitulé "C'était écrit", article qui, nous le savons, vous a gravement affecté.

En d'autres circonstances, cette erreur n'aurait pas grande importance, mais en ce qui vous concerne il s'agit d'un point décisif.

En effet, le contraire, ou plus exactement la négation, de :

"tous les députés sont des menteurs"

ce n'est pas :

"tous les députés disent la vérité"

mais c'est :

"il existe au moins un député qui dit la vérité"

(en mathématique nous avons appris à ne pas commettre ce genre d'erreur).

Nous pouvons suivre l'auteur de l'article quand il montre que, s'il était vrai que tous les députés fussent des menteurs, on aurait une contradiction. On doit alors en conclure qu'il est faux que tous les députés soient des menteurs. Et il n'y a plus de contradiction, car la situation est tout simplement la suivante :

D'une part, la malheureuse déclaration de votre collègue est fautive et lui, c'est un menteur,

d'autre part, il existe au moins un député (et, pourquoi pas, peut-être beaucoup plus) qui n'est pas un menteur.

On peut d'ailleurs facilement vérifier cette dernière affirmation. En effet, s'il ne devait exister qu'un seul député qui ne soit pas menteur, nous vous prions de croire, Monsieur le Député, que nous pensons que c'est vous.

Les réactions à ces lettres réconfortantes furent, cette fois ci, aussi rapides qu'attendues. Le paradoxe ayant disparu, l'angoisse métaphysique fit place à la confiance en soi, et, dès le lendemain, tous les députés se retrouvaient à l'Assemblée en osant se regarder en face (tous sauf un, il fallut procéder à une élection partielle).

Le lecteur est en droit d'exiger quelques explications car il est bien sûr invraisemblable que le réconfort d'un député soit venu de la simple assurance que lui, au moins, n'était pas menteur. D'autant plus que très rapidement on sut que tous avaient reçu la même lettre. C'est pourquoi il faut insister sur le point suivant :

Ce n'est pas l'accusation de mensonge qui avait plongé notre député dans cet état, mais c'était le caractère étrange et insaisissable de la situation, dû au paradoxe. Le paradoxe dissipé, tout pouvait rentrer dans l'ordre.

Mais alors comment notre député avait-il été convaincu qu'il n'y avait plus de mystère, c'est à dire qu'il y avait au moins un député non menteur ?

Tout simplement, un espoir secret était né en lui, et s'était transformé en certitude : parmi tous ses collègues (après tout, il ne les connaissait pas tous très bien) il y avait nécessairement un naïf qui n'était pas menteur.

Un journal du soir (encore lui), suivant en cela une de ses bonnes habitudes, publia un encadré consacré au "paradoxe d'Epiménide", histoire de faire un peu le tour de la question.

Enfin, l'heureux dénouement de la crise eut une conséquence notable : débordants de reconnaissance, les députés votèrent immédiatement les crédits nécessaires à la survie et au bon fonctionnement des IREM.

APPENDICE : UN CELEBRE PARADOXE

Le "prophète" cité par Saint Paul dans l'Epître à Titus (1.12) est Epiménide de Cnossos, personnage à demi légendaire de la Crète du VI^e siècle av. J.C., auquel on attribue l'adage : "Tous les Crétois sont des menteurs".

On peut y déceler un paradoxe (c'est à dire une contradiction qui conduit à remettre en question les fondements du raisonnement), mais seulement après une analyse à rebondissements.

Supposons que la déclaration d'Epiménide soit vraie. Alors tous les Crétois sont des menteurs, et donc Epiménide lui-même est un menteur.

A première vue, on pourrait en déduire que sa déclaration est fausse, Alors, en supposant qu'elle est vraie, on obtient une contradiction, et on doit donc admettre qu'elle est fausse.

On obtiendrait tout de suite un paradoxe si l'on pouvait poursuivre une démarche symétrique, c'est à dire, en supposant qu'elle est fausse, montrer qu'elle est vraie. Et l'on se croirait autorisé à poursuivre cette démarche si l'on ne prenait pas garde au fait suivant :

La négation de "tous les Crétois sont des menteurs", ce n'est pas "tous les Crétois sont non menteurs" mais c'est exactement "il existe (au moins) un Crétois non menteur".

On a été conduit à admettre que la déclaration d'Epiménide est fausse, et cela signifie donc qu'il existe (au moins) un Crétois non menteur.

Mais qu'est-ce qu'un Crétois non menteur ? il faut préciser ce qu'on entend par "menteur".

Adresse et salutation.

1. ¹Paul, serviteur de Dieu, apôtre de Jésus Christ pour amener les élus de Dieu à la foi et à la connaissance de la vérité ordonnée à la piété, ²dans l'espérance de la vie éternelle promise avant tous les siècles par le Dieu qui ne ment pas ³et qui, aux temps marqués, a manifesté sa parole par une proclamation dont un ordre de Dieu notre Sauveur m'a confié la charge, ⁴à Tire mon vrai fils en notre foi commune, grâce et paix de par Dieu le Père et le Christ Jésus notre Sauveur.

Établissement des presbytres.

⁵Si je t'ai laissé en Crète, c'est pour y achever l'organisation⁶ et pour établir dans chaque ville des presbytres⁷, conformément à mes instructions. ⁸Chaque candidat doit être irréprochable, n'avoir été marié qu'une seule fois, avoir des enfants croyants, qui ne puissent être accusés d'inconduite et ne soient pas insoumis. ⁹L'évêque, en effet, en sa qualité d'intendant de Dieu, doit être irréprochable: ni arrogant, ni coléreux, ni buveur, ni batailleur, ni avide de gains déshonnêtes, ¹⁰mais au contraire hospitalier, ami du bien, pondéré, juste, pieux, maître de soi, ¹¹attaché à l'enseignement sûr, conforme à la doctrine; ne doit-il pas être capable, à la fois, d'exhorter dans la saine doctrine et de confondre les contradicteurs?

Lutte contre les faux docteurs.

¹²Nombreux sont en effet les esprits rebelles, les vains discoureurs, les seduc-

teurs, surtout chez les circoncis. ¹³Il faut leur fermer la bouche; ces gens-là bouleversent des familles entières, enseignant pour de scandaleux profits ce qui ne se doit pas. ¹⁴L'un d'entre eux, leur propre prophète, a dit: "Crétois: perpétuels menteurs, mauvaises bêtes, ventres paresseux." ¹⁵Ce témoignage est vrai; aussi reprends-les vertement, pour qu'ils conservent une foi saine, ¹⁶sans prêter attention à des fables juives et aux prescriptions de gens qui tournent le dos à la vérité.

¹⁷Tout est pur pour les purs. Mais pour ceux qui sont souillés et qui n'ont pas la foi, rien n'est pur. Leur esprit même et leur conscience sont souillés. ¹⁸Ils font profession de connaître Dieu, mais, par leur conduite, ils le renient: êtres abominables, rebelles, incapables d'aucun bien.

Devoirs particuliers à certains fidèles.

2. ¹Pour toi, enseigne ce qui est conforme à la saine doctrine. ²Que les vieillards soient sobres, dignes, pondérés, robustes dans la foi, la charité, la constance. ³Que pareillement les femmes d'âge aient le comportement qui sied à des saintes: ni médisantes, ni adonnées au vin, mais de bon conseil; ainsi elles apprendront aux jeunes femmes à aimer leur mari et leurs enfants, ⁴à être réservées, chastes, femmes d'intérieur, bonnes, soumises à leur mari, en sorte que la parole de Dieu ne soit pas blasphémée. ⁵Exhorte également les jeunes gens à garder en tout la pondération, ⁶offrant en ta personne un exemple de bonne conduite: pureté de doctrine, dignité, ⁷enseignement sain, irréprochable,

Le début de l'Épître à Tite, où Paul de Tarse fait allusion à Epiménide de Cnosos. Il faut noter que Saint Paul n'était pas le seul à mal juger les habitants de Crète: les Bibles du 16^e siècle les appellent "Crétins" ou "Crèteins" !

Si un "menteur" est quelqu'un qui ment quelquefois, alors même si Epiménide est un menteur sa déclaration n'est pas nécessairement fausse.

Si un "menteur" est quelqu'un qui ment toujours, alors, comme on l'a vu, on est conduit à admettre qu'il existe (au moins) un Crétois non menteur, c'est à dire un Crétois qui dit quelquefois la vérité. Et il n'y a aucun paradoxe dans cette situation: Ce peut être même Epiménide qui dit quelquefois la vérité, bien que sa déclaration soit fausse.

Pour aller vers un paradoxe, imaginons la situation suivante: au cours d'une assemblée générale chaque Crétois prononce une phrase, et un Crétois "menteur" est un Crétois dont la phrase prononcée est fausse. De plus, la phrase prononcée par Epiménide est sa célèbre déclaration. Alors, comme précédemment, on est conduit à admettre qu'il existe (au moins) un Crétois non menteur, mais maintenant Epiménide, lui, est un menteur. Il n'y a encore aucun paradoxe dans cette situation: un Crétois menteur (Epiménide), un Crétois non menteur, et d'autres Crétois éventuels, menteurs ou non menteurs, peu importe.

Cependant, pour se tirer d'affaire, il a fallu supposer l'existence d'au moins deux Crétois, et que se passerait-il si la Crète était une île avec un seul habitant? C'est en cela qu'il y a quand même un paradoxe.

Dans le cas d'un seul habitant, l'affirmation d'Epiménide revient simplement à ce qui est à proprement parler le "Paradoxe du menteur" :

"Je mens"

sophisme attribué à Eubulide (IV^{ème} siècle av.J.C.) disciple et successeur d'Euclide de Mégare.

Considérons la phrase : "je mens", ou encore la phrase : "cette phrase est fausse". Si c'est vrai, c'est faux, et si c'est faux, c'est vrai.

Pourquoi est-ce très gênant d'obtenir une telle contradiction, même s'il faut aller la chercher loin ? C'est parce que cette contradiction se propage partout : par un raisonnement par l'absurde, avec une contradiction on peut démontrer n'importe quoi et donc que tout est vrai et faux à la fois. Il faut donc chercher à éliminer ce genre de paradoxe.

Quelle est l'origine du "Paradoxe du menteur" ? Pour certains, c'est l'usage de phrases qui n'ont pas de sens parce qu'elles se réfèrent à elles-mêmes. Cependant il y a des phrases qui se réfèrent à elles-mêmes et dont le sens ne pose pas de problème : par exemple la phrase (vraie) "cette phrase comporte cinq mots" ou la phrase (fausse) "cette phrase comporte six mots".

Par contre il y a de bonnes raisons pour considérer que la phrase : "cette phrase est fausse" ou la phrase : "cette phrase est vraie" n'ont pas de sens, bien que la dernière phrase ne produise pas de paradoxe.

D'autre part il suffit de peu de choses pour passer d'un paradoxe à une "vérité" intéressante. Par exemple, supposons que l'on s'entende sur une notion précise de phrase "démontrable", et telle que toute phrase démontrable soit vraie. Alors la phrase :

"Cette phrase n'est pas démontrable"

est une phrase non démontrable (sinon elle serait vraie et l'on aurait une contradiction) et donc aussi une phrase vraie. Ce n'est pas un paradoxe mais un exemple de phrase qui, bien que vraie, n'est pas démontrable au sens de la notion sur laquelle on s'était entendu au départ.

Si maintenant on formalise les notions de vérité et de démonstration (logique mathématique), ce qui était paradoxe ("cette phrase est fausse") puis remarque intéressante ("cette phrase n'est pas démontrable") peut conduire à un théorème (théorème d'incomplétude de Gödel). Voir par exemple, en français les ouvrages de logique mathématique de Kleene (Armand Colin) ou Pabion (Hermann), et aussi de Smullyan : "What is the name of this book ?" (Prentice Hall).

Enfin, dernier rebondissement de cette histoire où il n'était question que de menteurs et de mensonges, signalons que dans l'Encyclopaedia Universalis, Epiménide est considéré comme un exemple de "maître de vérité" (cf. M. Detienne : Les maîtres de vérité de la Grèce archaïque (Maspéro)).



... (air connu... des cinéphiles)

AH ! COU-RONS SOUS LA PLUIE...

Marc BLANCHARD
Lycée de Rochefort

La plupart des gens courent sous la pluie, en courbant l'échine.
Ont-ils raison ?

Essayons de répondre à la question.

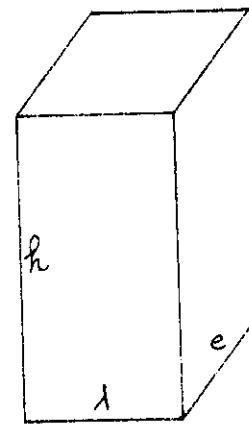
Un homme sous abri doit gagner un autre abri distant de l mètres, alors qu'il pleut régulièrement et verticalement (sans vent).

Soit δ la quantité d'eau par m^3 et par seconde dans l'atmosphère (l'humidité de l'air est supposée homogène, sans tenir compte de phénomène des gouttes).

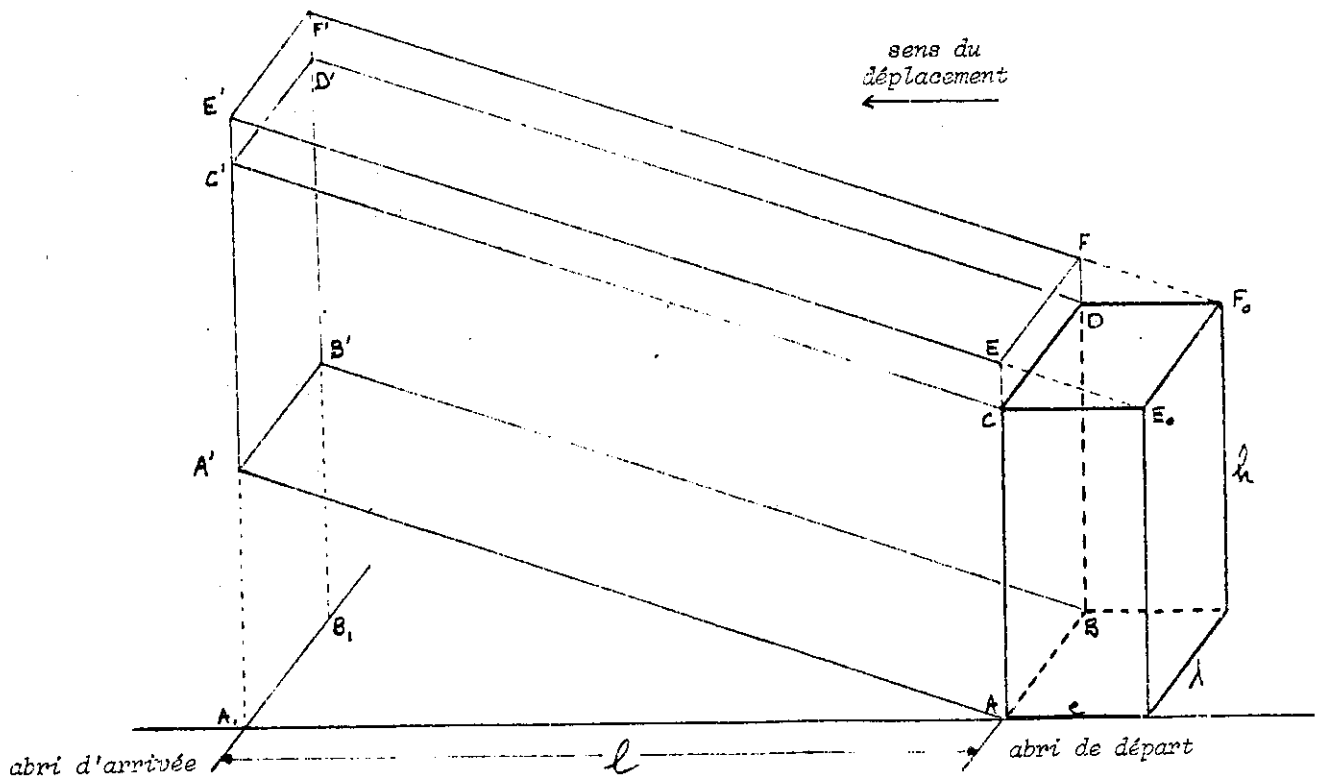
v est la vitesse de chute de la pluie et T est le temps mis par l'homme pour parcourir la distance de longueur l .

Pour simplifier les schémas, l'homme sera représenté sous la forme d'un ... parallélépipède !

Lorsque l'homme se déplace, la quantité d'eau qu'il reçoit est celle contenue à l'instant du départ dans le volume V précisé ci-après.



h : hauteur
 λ : largeur
 e : épaisseur



La face avant de l'homme, ABCD, reçoit lors du déplacement la quantité d'eau contenue dans le prisme oblique ABCDA'B'C'D' à l'instant du départ (On a $A_1A' = v.T$ une goutte en A' à l'instant du départ mouille le coin bas à gauche - le petit orteil - de la face avant de l'homme lorsqu'il atteint l'abri d'arrivée, en A_1).

La face supérieure CDE₀F₀ de l'homme reçoit la quantité d'eau contenue dans le prisme oblique CDEFC'D'E'F', à l'instant du départ.

Le volume V est celui de la réunion des deux prismes obliques :

$$V = \lambda \cdot \lambda \cdot (h + CE) = \lambda \cdot (h \cdot \lambda + e \cdot v \cdot T)$$

La quantité d'eau reçue par l'homme est donc :

$$Q = \delta \cdot V \cdot T = \lambda \cdot \delta \cdot (h \cdot \lambda \cdot T + e \cdot v \cdot T^2)$$

C'est une fonction croissante de T; il faut donc minimiser T pour recevoir le moins d'eau possible, autrement dit, courir le plus vite possible, d'autant plus que Q est un polynôme du second degré en T.

Le réflexe de la course est donc le bon.

Courber l'échine revient à augmenter e et à diminuer h (λ est supposé constant). Un homme étant, en première approximation, incompressible, le produit $\lambda \cdot e \cdot h$ (donc ici e.h) est constant.

Posons $\sigma = e \cdot h$ (surface de la silhouette de l'homme, vue de profil).

$$\text{Alors : } Q = \lambda \cdot \delta \cdot T \left(h \cdot \lambda + \frac{v \cdot T \cdot \sigma}{h} \right)$$

$$\text{Donc : } \frac{dQ}{dh} = \lambda \cdot \sigma \cdot T \left(\lambda - \frac{v \cdot T \cdot \sigma}{h^2} \right)$$

D'où le tableau de variation ci-contre, lorsque :

$$h = \sqrt{\frac{v \cdot T \cdot \sigma}{\lambda}} \quad Q_0 = 2\lambda \cdot \delta \cdot T \sqrt{v \cdot T \cdot \sigma \cdot \lambda}$$

$$\text{et } e = \sqrt{\frac{\lambda \cdot \sigma}{v \cdot T}}$$

h	0	$\sqrt{\frac{v \cdot T \cdot \sigma}{\lambda}}$	$+\infty$
$\frac{dQ}{dh}$	-	0	+
Q	$+\infty$	Q_0	$+\infty$

Soit un individu culminant à 1,60 mètres, mince (en moyenne, 10 cm d'épaisseur), tel que $\sigma = 0,16 \text{ m}^2$, courant le 100 mètres en 10 secondes (c'est un champion !). Si la vitesse de chute de la pluie est aussi de 10m/s, alors la quantité est minimale lorsque : $h = \sqrt{0,16} = 0,4 = e$

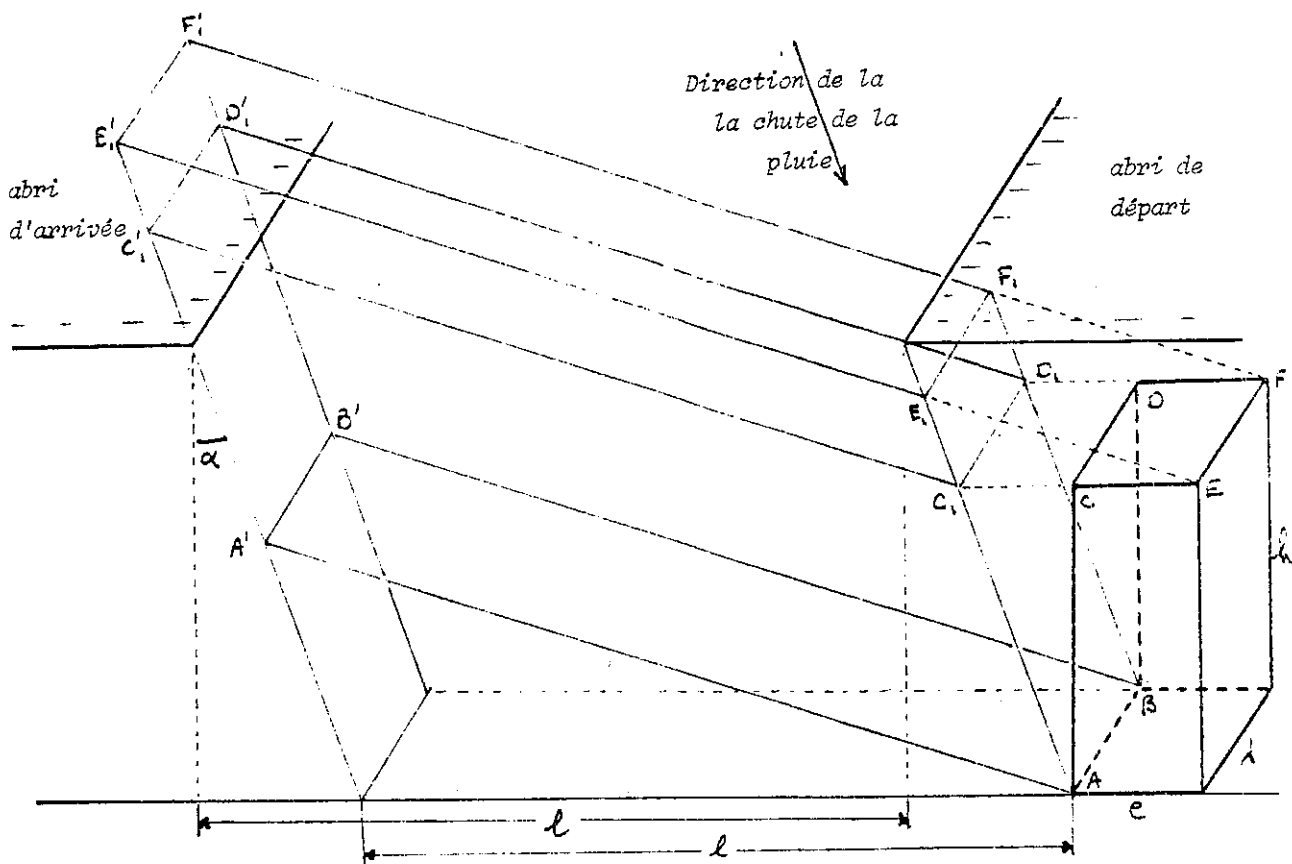
Le coureur a donc raison de faire le dos rond pour recevoir moins d'eau. Toutefois, il lui serait sans doute difficile de garder sa vitesse de pointe en se baissant jusqu'à 40 cm du sol ! Il conviendrait de tenir compte davantage des contraintes physiologiques.

Si le temps est en outre venteux, la pluie ne tombe pas verticalement. Le résultat est analogue, comme le montre la figure suivante.

Si α est l'angle de la direction de la chute de la pluie avec la verticale, le volume du prisme $ABE_1F_1A'B'E'_1F'_1$ est :

$$V = \lambda \cdot \left(h \cdot \lambda + v \cdot T (e \cdot \cos \alpha + h \cdot \sin \alpha) \right)$$

La quantité d'eau reçue au cours du déplacement est :



$$Q = \delta \cdot V \cdot T = \lambda \cdot \delta [h \cdot \lambda \cdot T + v \cdot T^2 (e \cdot \cos \alpha + h \cdot \sin \alpha)]$$

La conclusion est donc la même que précédemment : il faut courir le plus vite possible lorsqu'on court face au vent. Sinon, la situation est toujours la même mais la situation se complique, car la face arrière peut être mouillée. Nous invitons le lecteur intéressé à se pencher sur la question.

En conclusion :

Il faut donc courir le plus vite possible et se baisser comme il convient. Pour plus de précision, il faudrait connaître la fonction donnant la vitesse maximale relativement à la position adoptée; h et e, par exemple, seront fonction de T.

La résistance de l'air n'est pas négligeable a priori. Un vent de face nécessite de courber davantage l'échine, le contraire pour un vent de dos.

On étudiera alors la variation de la nouvelle fonction Q de la variable T afin de minimiser.

Tout cela ne modifiera sans doute guère l'esprit de la conclusion. Il nous reste à méditer sur le bien-fondé étonnant de notre réflexe : nous avons tendance à courir tête baissée sous la pluie.

S'agit-il d'une attitude empirique innée ou imitative ? Méditons ...

LES SUITES

Michel BRIDENNE
Lycée Jean Giraudoux - Châteauroux

Voici quelques documents très incomplets qui m'ont servi à introduire les suites en Terminale D (année 1979-80).

Ce travail appelle les remarques suivantes :

Les "suites" cette année :

- les figures ont suscité un vif intérêt au moment de leur découverte,
- mais les élèves n'ont pas toujours compris ce que j'attendais d'eux (sincèrement souvent, de très mauvaise foi quelquefois) : la formulation des tâches à accomplir était donc à revoir ;
- mes interventions n'ont pas toujours été très bien dosées (trop en dire VS pas assez en dire) ;
- les élèves ont reproché le manque de structures (mais ça dépasse cette séquence) ; en fait je crois qu'ils signifiaient l'absence des introductions habituelles (définitions, exemples, théorèmes, applications...) ; formuler des hypothèses semble fantaisiste pour certains, en tous cas fastidieux, et certainement une perte de temps.
- l'étude des lois internes et externes sur l'ensemble des suites n'est pas adaptée au reste de la séquence et sera donc changée.

Les "suites" l'an prochain (?)

- essentiellement, je désire que les activités soient réalisées par les élèves et non par le prof. ; j'envisage d'axer mon travail plus sur l'observation des élèves, d'apporter des aides très ponctuelles, de ne formaliser que tardivement et à un niveau "adéquat" ;
- je voudrais réussir à choquer sur les limites virtuelles et réelles
- par ailleurs, il faudra prévoir un temps pour l'utilisation de machines à calculer ;
- je pense que je ne donnerai la liste des objectifs qu'à la fin du quatrième mouvement ;
- enfin, j'ai voulu faire apparaître les trois supports, tableau de données, représentation graphique, relation algébrique, pour habituer les passages de

l'un à l'autre suivant les avantages ou les inconvénients d'une situation donnée.

- tout ça (!) est inspiré de :

- . PMM 3031 (Cours Permama - Télé-Université - Québec)
- . Travaux du Greppo (IREM d'Orléans)
- . *Minorer, Majorer, Encadrer* (IREM de Rennes)
- . *Mathématiques pour une formation d'adultes* (CUIEEP) - Publication APM n°13
- . *Math-Economie-Gestion* (Daniel Fredon - Cédic)
- . *Réflexions diverses de Georges Glaeser*
- . *Diverses idées qui circulent à l'IREM d'Orléans.*

Premier mouvement : Ainsi de suite

Entreprendre les activités ci-dessous pour le thème A,
ET un des thèmes B (au choix) ET le thème C.

Activités :

TROUVER une relation entre l'aire (resp. le périmètre) d'une figure et l'aire (resp. le périmètre) de la figure précédente (dans l'ordre de construction).

ET

TROUVER une relation entre l'aire (resp. le périmètre) d'une figure et le numéro d'ordre (de construction) de cette figure.

ET

FAIRE un tableau de valeurs

ET

FAIRE une représentation graphique adaptée aux données du tableau.

ET

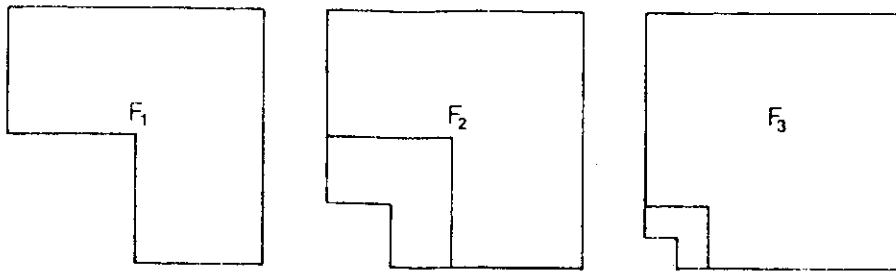
REPENDRE aux questions suivantes :

- Quelle est l'aire (resp. le périmètre) de la neuf cent quatre vingt septième figure ?
- En itérant indéfiniment la construction, l'aire (resp. le périmètre) semble-t-elle devoir être finie ? Justifier succinctement par écrit l'affirmation.

Thèmes proposés

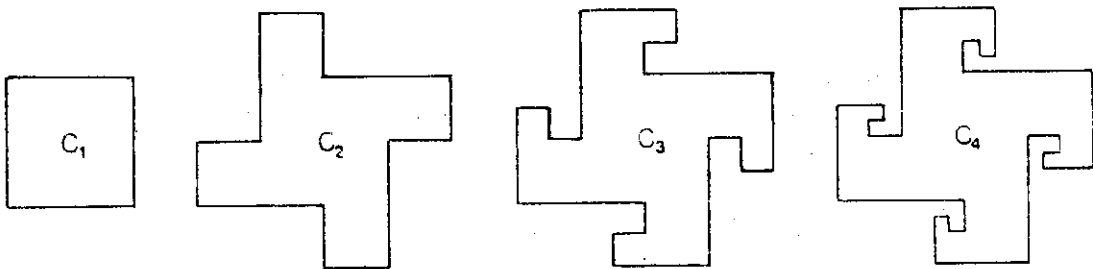
A - Les coudes...

Pour avoir un carré en F_1 , il nous manque un petit carré de côté $1/2$; en F_2 , il nous manque un plus petit carré de côté $1/4$; en F_3 , il nous manque un carré encore plus petit de côté $1/8$; ainsi de suite....



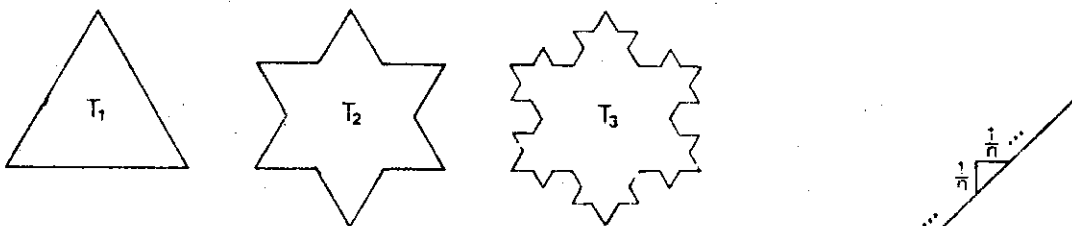
B1 - Les carrés s'enroulent...

Voyons comment construire cette suite de figures. La première est un simple carré dont la longueur d'un côté est 1 unité. Pour faire la deuxième, on ajoute, dans un mouvement de spirale, 4 carrés de côté 1/2 unité. Quant aux figures suivantes, on ajoute, à chaque fois, 4 carrés dont la longueur de côté est la moitié de la longueur de côté des carrés ajoutés à la figure précédente.



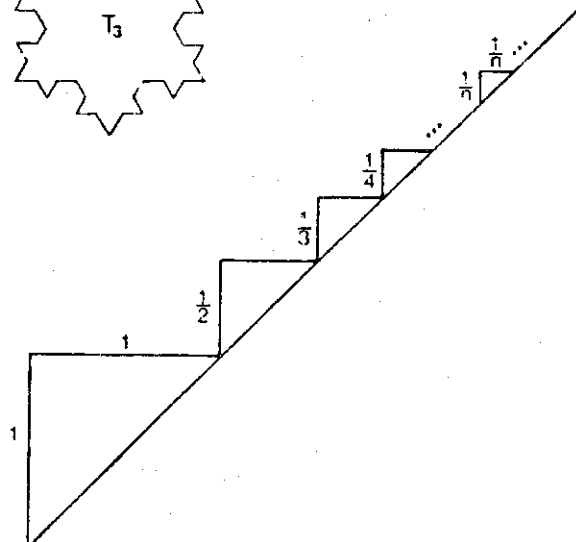
B2 - L'île

La suite de polygones T_1, T_2, T_3, \dots est obtenue ainsi: T_1 est un triangle équilatéral. A chaque étape, tout segment de droite est remplacé par 4 segments du tiers de la longueur du segment initial.



C - L'escalier

Il s'agit ici de calculer l'aire et la hauteur (cette dernière, à la place du périmètre), après la première marche, après la deuxième marche,...., après la n-ième marche.



Deuxième mouvement : Continu...

PRE-REQUIS

savoir majorer, minorer, encadrer

une somme,
un produit , de termes (positifs en particulier)
un quotient

des expressions de la forme $|A+B|$, $|A-B|$, $||A| - B|$

connaître l'équivalence :

$$\forall X, (X \in \mathbb{R}) \quad \forall A, (A \in \mathbb{R}_+) \quad [-A \leq X \leq A \Leftrightarrow |X| \leq A]$$

Choisis une ligne de suites parmi les lignes proposées puis entreprendre les activités pour chaque suite de la ligne.

Activités

FAIRE un tableau de valeurs

ET

FAIRE une représentation graphique adaptée aux données du tableau

ET

FORMULER le maximum d'hypothèses quant à la croissance, la décroissance, la majoration, la minoration, l'encadrement, la périodicité, le signe des termes de la suite..., puis VALIDER au moins deux des hypothèses formulées

ET

AFFIRMER l'existence (ou non) d'une limite finie ou non de la suite en explicitant, par écrit, le plus précisément et succinctement possible le pourquoi de l'affirmation.

$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = (-1)^n$	$\forall n \in \mathbb{N}, b_n = -n^2 + n$	$\begin{cases} C_0 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, C_n = \sqrt{4+C_{n-1}} \end{cases}$	$\forall n \in \mathbb{N}^*, d_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$
$\forall n \in \mathbb{N}^*, e_n = \frac{(-1)^n}{n}$	$\forall n \in \mathbb{N}, f_n = (-1)^n \frac{n-1}{2^n}$	$\forall n \in \mathbb{N}, g_n = (-3)^n$	$\begin{cases} h_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, h_{n+1} = \frac{2h_n + 3}{h_n} \end{cases}$
$\forall n \in \mathbb{N}, i_n = \frac{2n+1}{n+1}$	$\forall n \in \mathbb{N}, j_n = \left(\frac{9}{11}\right)^n$	$\forall n \in \mathbb{N}^*, h_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n}$	$\forall n \in \mathbb{N}, l_n = \sin n$
$p_0 = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_n = 2p_{n-1} + 1$	$\forall n \in \mathbb{N}^*, q_n = \frac{\cos n}{n}$	$\forall n \in \mathbb{N}, r_n = \frac{-n^2}{-5n+1}$	$\forall n \in \mathbb{N}, s_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$

Troisième mouvement

Les suites arithmétiques et géométriques seraient ici introduites par une étude sur les questions d'intérêts simples et composés et des capitalisations qui en résultent : ceci à partir de documents bancaires réels. Les prolongements éventuels dépendent des élèves.

En fait, je fais un appel d'offre de thèmes où interviennent "naturellement" les suites arithmétiques et géométriques et les sommes de termes consécutifs de telles suites.

Envoyer toute suggestion (même embryonnaire) à

Michel Bridenne. 29, rue des Etats-Unis. 36000 Châteauroux.

Quatrième mouvement

Le tableau ci-joint permet de lire les premiers termes d'un ensemble de suites; certaines de ces suites sont obtenues à l'aide d'autres suites du tableau.

Choisir trois lignes consécutives du tableau.

(1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; ...)	(1; 2; -1; 1; 3; -7; -10; -21; -39; -63; ...)	(0; -0,2; -0,2; -0,4; -0,6; -1; -1,6; -2,6; -4,2; -6,8)
(-2; 1; -1; 0; -1; -1; -2; -3; -5; -8; ...)	(1; 2; 6; 24; 120; 720; 5040; 40320; 362880; 3628800; ...)	(1; 3; 6; 10; 15; 21; 28; 36; 45; 55; ...)
(-4; 0; -6; -6; -10; -12; -16; -20; -26; -34; ...)	(1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; 0,00001; 0,000001; 0,0000001; 0,00000001; ...)	(0; 1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81; ...)
(-1,77; 0,531; -0,1593; 0,04779; -0,014337; 0,0043011; -0,00129033; 0,000387099; -0,000161697; 0,00003483891; ...)	(-1; 1; 0,416; 1,125; 0,7375; 1,135416; 0,841517857142; 1,1171875; 0,884982638; 1,098046875; ...)	(1,5; 0,5; 15,5; 22,5; 29,5; 36,5; 43,5; 50,5; 57,5; 64,5; ...)
(1; 1,5; 1,75; 1,875; 1,9375; 1,96875; 1,984375; 1,9921875; 1,99609375; 1,998046875; ...)	($\frac{8}{15}, \frac{8}{15}, -\frac{8}{15}, \frac{8}{15}, -\frac{8}{15}, \frac{8}{15}, \frac{8}{15}, \frac{8}{15}, -\frac{8}{15}, \frac{8}{15}$)	(2; 2; 4; 6; 10; 16; 26; 42; 68; 110; ...)
(1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; ...)	(2; 16; 30; 44; 58; 72; 86; 100; 114; 128; ...)	($\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \dots$)
(1; 1,83; 0,49; 2,6; 2,83; 5,83; 8,3; 14,49; 22,5; 37,3)	(2; 3; 3,5; 3,75; 3,875; 3,9375; 3,96875; 3,984375; 3,9921875; 3,99609375; ...)	(3; 3; 3; 6; 4,5; 5,4; 6,3; 7,285714; 8,25; 9,2; 10,2; ...)
(0,4; 0,16; 0,064; 0,0256; 0,01024; 0,004096; 0,0016384; 0,00065536; 0,000262144; 0,0001048576; ...)	(0; 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; ...)	(1,3; 2,75; 5,4; -9,16; 14; 0,875; 26,8; 34,7; 43,63; 53,583; ...)
(1,0; 1,1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; ...)	(8; $\frac{15}{2}, \frac{10}{3}, \frac{27}{4}, \frac{52}{5}, \frac{19}{6}, 7, \frac{47}{8}, \frac{34}{9}, \frac{57}{10}, \dots$)	(2; -1; 1; 0; 1; 1; 2; 3; 5; 8; ...)
(-0,5; -1; -3; -12; -60; -360; -2520; -20160; -181440; -1814400; ...)	(0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; ...)	(1; 1,5; 1,83; 2,083; 2,283; 2,45; 2,59285714; 2,717857142; 2,820968253; 2,920968253; ...)
(0; 0,5; 0,4; 0,3; 0,2352941176470588; 0,1923076; 0,162; 0,14; 0,1230769; 0,103756; ...)	($\pi; 4\pi; 9\pi; 16\pi; 25\pi; 36\pi; 49\pi; 64\pi; 81\pi; 100\pi; \dots$)	(-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; ...)
($-\frac{2}{3}; 1,5; 0,83; 2,3; 3,16; 5,5; 8,6; 14,16; 22,83; 37;$)	(1; 4; 1; 5; 9; 2; 6; 5; 3; 5; ...)	(-1; -8; -27; -64; -125; -216; -343; -512; -729; -1000; ...)

Activités : Pour chaque suite des lignes choisies ,
DIRE si elle peut être obtenue au moyen d'autres suites du
tableau
ET, le cas échéant, COMMENT L'OBTENIR.

(voir des éléments de réponses pages suivantes).

Cinquième mouvement : Finale

Synthèse dont le niveau de formalisation dépendra de ce qui est
apparu précédemment :

- qu'est ce qui définit une suite réelle ?
- quand deux suites ne sont-elles pas égales ?
- les structures de l'ensemble des suites muni de lois convenables
- énoncés de théorèmes généraux relatifs aux limites.
- étude de q^n , $q \in \mathbb{R}^*$
- convergence, divergence
- résultats particuliers concernant les suites arithmétiques et géométriques.

(0; 1,5; 0,6; 1,25; 0,8; 1,16; 0,857142; 1,125; 0,8; 1,1; ...)
(0,23; 6,531; 11,8407; 20,04779; 29,985663; 42,0043011; 55,99870967; 72,000337099; 89,9998078103; 110,00003483891; ...)
(-1; 4; -27; 256; -3125; 46656; -823543; 16777216; -387420489; ...)
(0; $\frac{4}{3}$; $\frac{8}{3}$; 4; $\frac{16}{3}$; $\frac{20}{3}$; 8; $\frac{28}{3}$; $\frac{32}{3}$; 12; ...)
(1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; ...)
(-2; -1,5; -1,75; -2,416; -3,116; -3,883; -4,69285714; -5,532142857; -6,393253968; -7,271031745; ...)
(0,3; -0,25; -0,6; -0,83; -1; -1,125; -1,2; -1,3; -1,36; -1,416; ...)
(1; 1,05; 0,25; 0,125; 0,0625; 0,03125; 0,015625; 0,0078125; 0,00390625; 0,001953125; ...)
(0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; ...)
(1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{7}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{10}$; ...)
(5; 3; 1; -1; -3; -5; -7; -9; -11; -13; ...)
(-5; -1; 7; 19; 53; 77; 105; 137; 173; 213; ...)

Activités de synthèse :

(non encore élaborées)

- retour au premier mouvement : confrontation des réalités...
- exercices à chercher (du type 1.2.3.4..... du pavé 4)
- étude de sous-structures
un exemple de suite de Fibonacci (rectangles, ou lapins, ou...)
ensemble des suites de Fibonacci
- construire des suites.

Réponse.

La grille ci-dessous, destinée aux enseignants (dans un premier temps), est construite comme suit :

- il s'agit d'une matrice à douze lignes et quatre colonnes.
- chaque suite est notée u_{ij} quand elle se trouve à la i -ième ligne et à la j -ième colonne (!) :
- ou bien u_{ij} est définie par son terme général ou une relation récurrente.
- ou bien u_{ij} est exprimée comme combinaison linéaire d'autres suites de la grille : $u_{ij} = a.u_{rs} + b.u_{kl}$

Est-il besoin de préciser qu'il existe une correspondance bi-univoque entre cette grille et le tableau des premiers termes des suites données dans les pages qui précèdent.

$u_{11} = u_{91} + u_{82}$	$u_{12} = -2 u_{82} + u_{122}$	$u_{13} = -\frac{1}{5} u_{82}$	$u_{14} = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$
$u_{21} \begin{cases} v_1 = -2 \\ v_2 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+2} = v_{n+1} + v_n \end{cases}$	$u_{22} = (n!)_{n \in \mathbb{N}^*}$	$u_{23} = \left(\sum_{i=1}^{i=n} i\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$	$u_{24} = 2u_{23} + u_{41}$
$u_{31} = 2u_{21} = 2u_{102}$	$u_{32} = (10^{-n})_{n \in \mathbb{N}}$	$u_{33} = (n^2)_{n \in \mathbb{N}}$	$u_{34} = ((-n)^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$
$u_{41} \begin{cases} v_1 = 5,9 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = -0,3v_n \end{cases}$	$u_{42} = u_{14} - u_{84}$	$u_{43} = \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 7n + \frac{3}{2}$	$u_{44} = \frac{4}{3} u_{102}$
$u_{51} = \left(\frac{i-n}{i}\right)_{i=0}^{i=n} \Big)_{n \in \mathbb{N}}$	$u_{52} = -\frac{8}{5} u_{63}$	$u_{53} = u_{61} + u_{91}$	$u_{54} = \forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = 1$
$u_{61} \begin{cases} v_1 = 1 \\ v_2 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+2} = v_{n+1} + v_n \end{cases}$	$u_{62} = -u_{54} + 2u_{43}$	$u_{63} = \left(\frac{(-1)^n}{3}\right)_{n \in \mathbb{N}}$	$u_{64} = -u_{73} + u_{103}$
$u_{71} = u_{121} - u_{63}$	$u_{72} = 2u_{61}$	$u_{73} = \left(n + \frac{2}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$	$u_{74} = \left(\frac{-2n+1}{n+3}\right)_{n \in \mathbb{N}}$
$u_{81} = \left(\frac{2}{5}\right)^n_{n \in \mathbb{N}}$	$u_{82} \begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+2} = v_{n+1} + v_n \end{cases}$	$u_{83} = u_{23} + u_{74}$	$u_{84} = \left(\frac{1}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$
$u_{91} \begin{cases} v_1 = 1 \\ v_2 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+2} = v_{n+1} + v_n \end{cases}$	$u_{92} = 7u_{104} + u_{122}$	$u_{93} = -u_{21}$	$u_{94} = \forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = 0$
$u_{101} = -\frac{1}{2} u_{22}$	$u_{102} = (n)_{n \in \mathbb{N}}$	$u_{103} = \left(\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$	$u_{104} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$
$u_{111} = \left(\frac{n}{n^2+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$	$u_{112} = * u_{122}$	$u_{113} = -u_{114} = u_{102}$	$u_{114} = (-2n+5)_{n \in \mathbb{N}}$
u_{121}	$u_{122} = \left(\begin{array}{l} \text{pour tout } n \text{ non nul} \\ v_n \text{ est la } n\text{-ième décimale de } \pi \end{array}\right)$	$u_{123} = ((-n)^3)_{n \in \mathbb{N}^*}$	$u_{124} = -u_{114} + 2u_{33}$

SUITES

Objectifs visés

A la fin de cette séquence, tu dois être capable de :

- 1/ ENONCER et UTILISER le principe de récurrence.
- 2/ UTILISER la notion de suite réelle.

- 3/ FAIRE DES HYPOTHESES sur des suites réelles ;
VERIFIER une ou plusieurs de ces hypothèses.
- 4/ CONSTRUIRE des suites réelles vérifiant certaines conditions.
- 5/ PROUVER qu'une suite réelle est : croissante,
décroissante,
stationnaire.
- 6/ DEMONTRER qu'une suite est convergente, et
CALCULER si possible sa limite.
- 7/ PROUVER qu'une suite réelle est divergente.
- 8/ UTILISER les structures de l'ensemble des suites réelles muni des
lois convenables.
- 9/ RECONNAITRE qu'une suite est arithmétique, le JUSTIFIER, ECRIRE le
 $(n+1)^{\text{ième}}$ terme en fonction du premier terme et de la raison, UTILISER
le critère de divergence des suites arithmétiques, CALCULER la somme
des n premiers termes d'une suite arithmétique en fonction de son premier
terme et de sa raison.
- 10/ RECONNAITRE qu'une suite est géométrique, le JUSTIFIER, ECRIRE le
 $(n+1)^{\text{ième}}$ terme en fonction du premier terme et de la raison, UTILISER
le critère de convergence des suites géométriques, CALCULER la somme des
 n premiers termes d'une suite géométrique en fonction de son premier
terme et de sa raison.
- 11/ UTILISER la terminologie des suites pour les intégrales récurrentes.

PUBLICATIONS DE L'APMEP : Commandez-les à votre Régionale !

(Voir page 32)

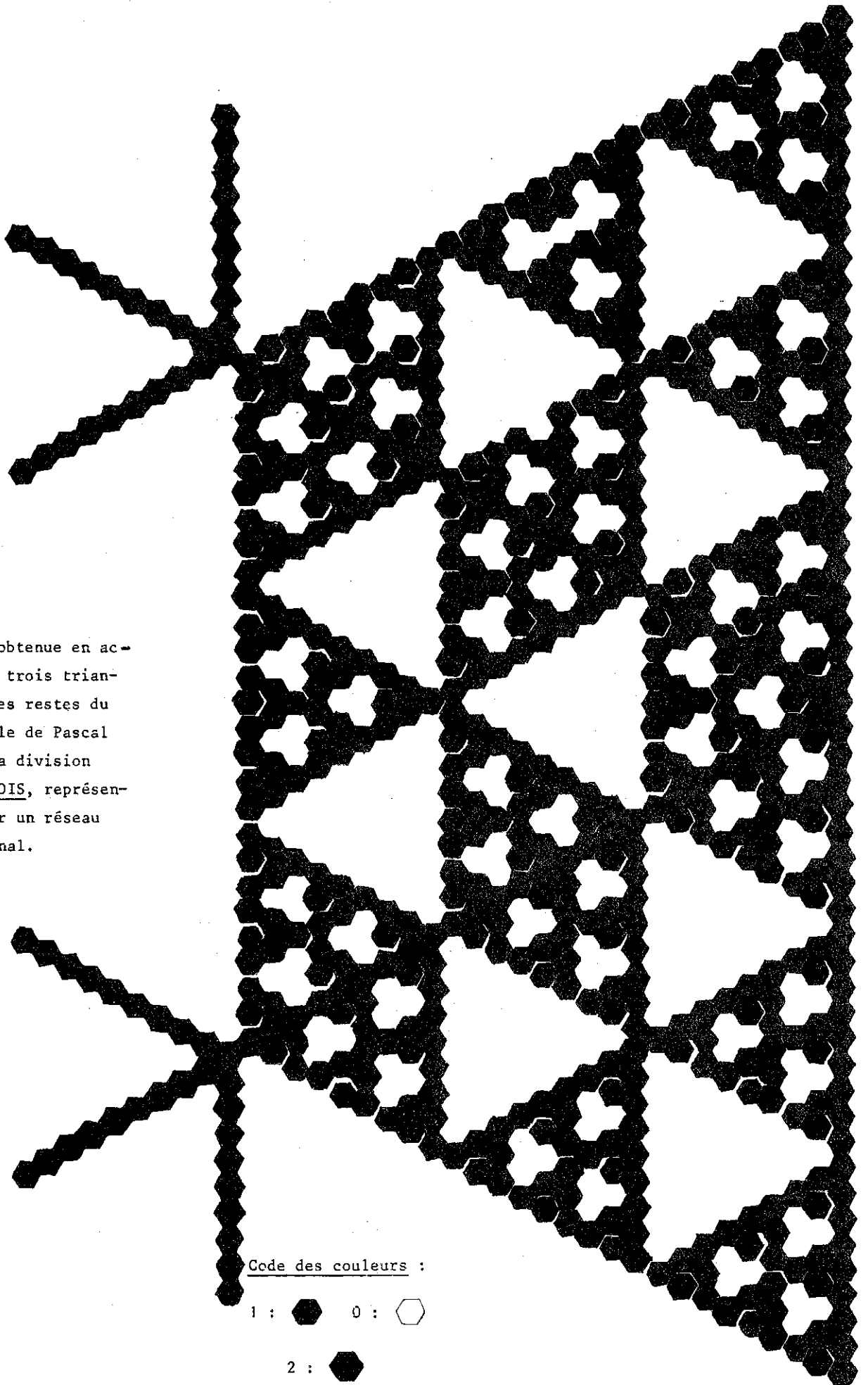
NOUVELLE PUBLICATION : "Réseaux à Faire ...

... Pavages à colorier"

Une coproduction APMEP - IREM d'Orléans . 10 F seulement !

(A commander à l'IREM d'Orléans - 45045 Orléans Cedex)

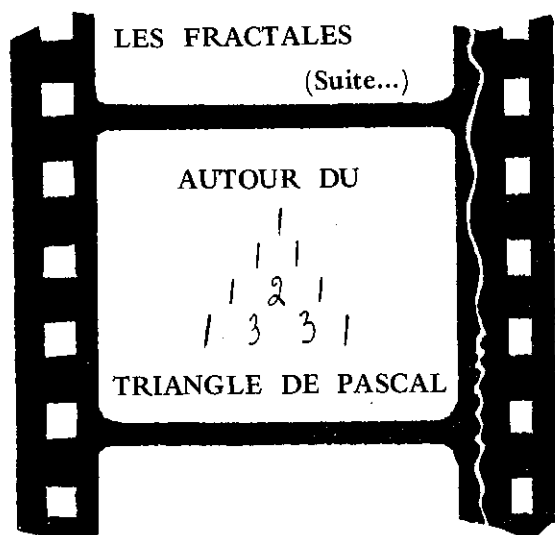
Frise obtenue en accolant trois triangles des restes du triangle de Pascal dans la division par TROIS, représentés sur un réseau hexagonal.



Code des couleurs :

1 :  0 : 

2 : 



Michel DARCHE
Lycée Jean Zay - Orléans

Population : de la 6^e à la Terminale et après

Contenus mathématiques : - coefficients binômiaux (triangle de Pascal)
- fractales
- congruences
- similitudes
- morphismes et isomorphismes additifs.

Intentions : 1. Proposer des activités mettant en oeuvre l'utilisation spontanée de morphismes (ex: morphismes entre le triangle de Pascal, les restes des coefficients modulo n , les couleurs ...)
2. Utiliser le concept de fractale pour induire et généraliser le triangle de Pascal modulo n , et éventuellement passer de n à $n+1$.

Objectifs : 1. Faire des additions d'entiers, et calculer des restes de division.
2. Identifier et utiliser des procédures de construction ("patterns")
3. Choisir et/ou identifier des règles de coloriage.
4. Pour le prof : être capable d'arrêter les élèves une fois qu'ils ont commencé à colorier ...

Matériel : - Grilles (carrés, triangles, hexagones ...) de format 1 fois, 2 fois, 4 fois ... 21 x 29,7 cm.
- Feutres de couleur.
- Ciseaux et colle pour corriger les erreurs.

Méthode : Cette activité peut être proposée avant ou après un travail ayant pour thème le triangle de Pascal.
On peut faire travailler les élèves en groupe, chaque groupe choisissant un modulo, et coloriant des triangles à côtés adjacents.

Bibliographie : Sur le triangle de Pascal en couleur

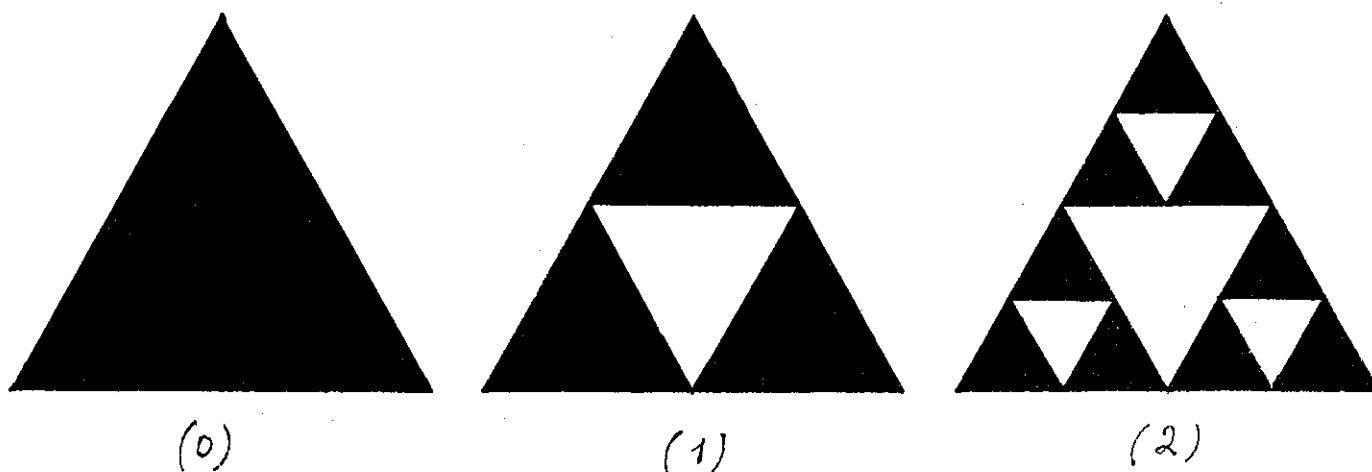
- (1) *Pascal in colour*, par David Rooke (*in Mathematics Teaching, couverture et page 45, n° 80, Septembre 1977*).
- (2) *Designs from mathematical patterns*, par Stanley Bezuszka, Margaret Kenney et Linda Silvey (*Creative Publications, Palo Alto, California 1979*).

Sur le triangle de Pascal modulo un entier

- (3) *The incredible Pascal triangle*, par Stanley Bezuska et Margaret Kenney (Boston College Mathematics Institute, Massachusetts).
- (4) *Pascal's Triangle and Computer Art*, par Charles Lund (*in Mathematics Teacher*, pages 170 à 184, n°3, volume 72, Mars 1979).
- (5) *Tirer parti des aberrances* (*in Quelques apports de l'Informatique à l'enseignement des Mathématiques*, pages 51 à 57, Publication n° 20 de l'APMEP, Paris 1977).

Sur le triangle de Pascal

- (6) *Le triangle de Pascal*, par Jacques Lecoq (*Irem de Basse Normandie*, Septembre 1975).
- (7) *Activités Numériques pour le premier cycle*, par Claude Fessaguet (*Irem de Poitiers*, Mars 1979).
- (8) *Combien de chemins*, par Martin Gardner (*in "Haha" ou l'éclair de la compréhension mathématique*, Pour la Science (diffusion Belin) Paris 1979).
- (9) *Probabilités au CM₁ : Distribution de Gauss et triangle de Pascal* (*in Activités Recherches Pédagogiques*, n° 4, Février 1972).
- (10) *Combinatoire (surtout la 2^e et la 3^e partie)* (*Cahier n° 7, Irem de Poitiers, année 1977-1978*).

1 UN TRIANGLE FRACTAL

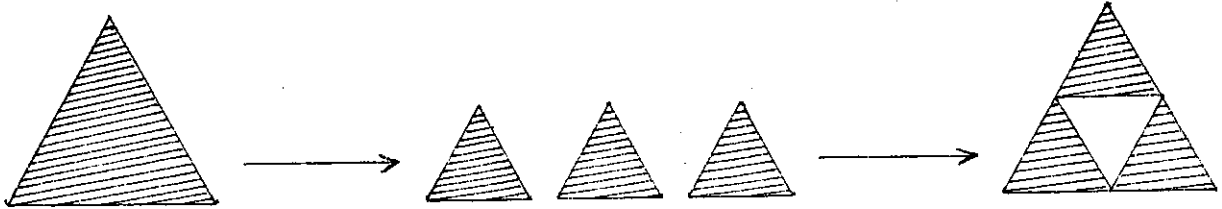
On passe de la figure (0) à la figure (1) en ôtant le triangle central joignant le milieu des côtés.

On passe de la figure (1) à la figure (2) en ôtant le triangle central de chacun des triangles constituant la figure (1).

Et ainsi de suite ... (de figures !).

Réponse 1. Dessiner trois triangles à l'échelle 1/2. Les disposer en pyramides.

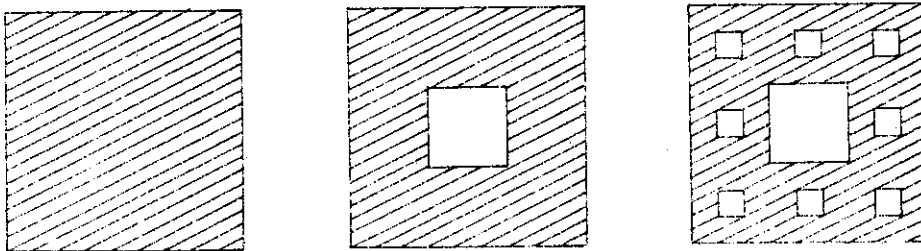
Exemple :



On réalise "astucieusement" cette transformation à l'aide d'une photocopieuse réductrice.

Il existe des cerfs-volants construits suivant ce principe, à partir de tétraèdres.

Réponse 2. On peut citer en exemple le carré :



Voir Bibliographie n° (8), livre de Martin Gardner, page 160.

Réponse 3. Voici quelques éléments de réponse :

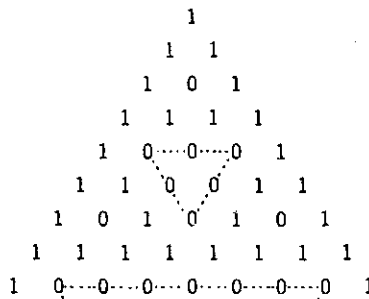
On procède de façon analogue à la première question du paragraphe précédent, mais pas pour tout n malheureusement.

Par exemple : modulo 2 et modulo 3, cela "marche" bien.

modulo 4, cela ne "marche" pas tout à fait. Dire pourquoi (le fait que n soit premier ou pas est déterminant).

Table d'addition modulo 2

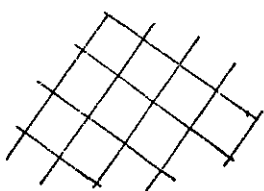
+	0	1
0	0	1
1	1	0



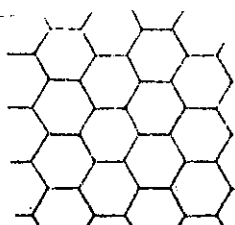
Huit premières lignes des restes du triangle de Pascal, modulo 2.

Table d'addition modulo 3

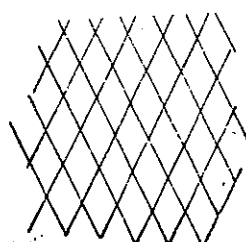
+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1



carrés



hexagones



losanges

3 PASCAL EN COULEURS

L'activité du second paragraphe peut se réaliser en codant chaque reste à l'aide d'une couleur. Pour cela, on utilise une grille sur laquelle on fait apparaître un triangle (Voir quelques exemples de grilles ci-contre).

Pour éviter d'avoir à reproduire sur une grande surface de tels réseaux, ce qui est fastidieux, on peut se procurer le dossier

"Réseaux à faire, Pavages à colorier" (APMEP-IREM d'Orléans. Fév. 80. 10 F)

On trouvera dans les deux pages suivantes (p. 26 et 27) quelques exemples de réalisations.

4 FRISES

Une fois que l'on s'est amusé avec le triangle de Pascal en couleurs, on est mûr pour se lancer dans la construction de frises.

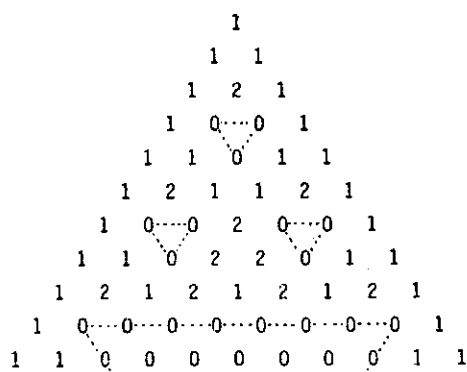
Matériel nécessaire : Grilles (par ex. celles du dossier précédemment cité)
Feutres de couleurs.

Si l'on a des relations chez un fabricant de carrelage, on peut remplacer grilles et feutres par des carreaux de forme et de couleur diverses...

On trouvera pages 20 et 28 deux exemples de grilles construites à l'aide de triangles de Pascal en couleur.

5 AUTRES ACTIVITES SUR LE TRIANGLE DE PASCAL

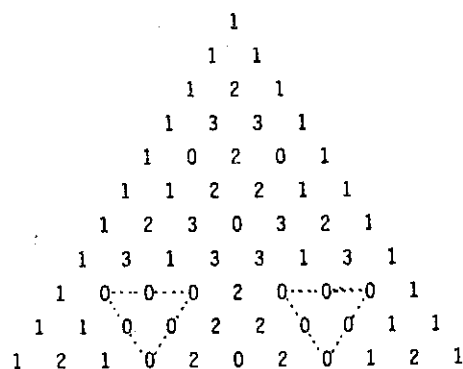
- * Dénombrement de chemins (cf. Bibliographie n° 8)
- * Planche de Galton et distribution de Gauss (cf. Bibliographie n° 9)
- * Déplacements dans New-York (document de Daniel Poisson. Préparation à l'examen spécial d'entrée à l'Université. CUEEP. Université de Lille).
- * Divers types de dénombrement : voir article de Daniel Fredon à la page 29 de ce numéro.





Dix premières lignes des restes du triangle de Pascal, modulo 3.

Table d'addition modulo 4

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

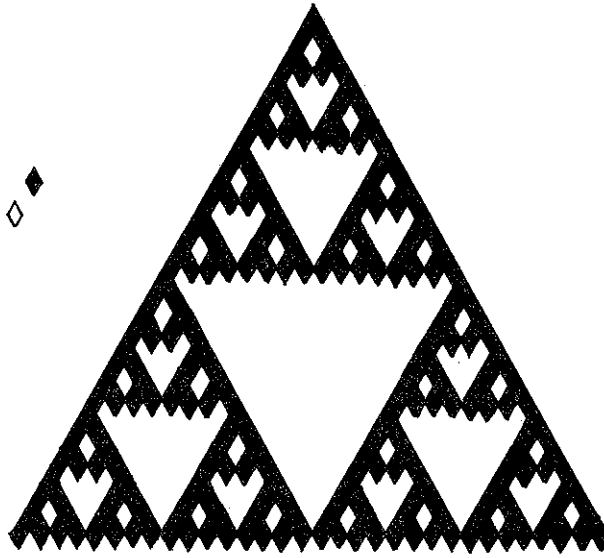


Dix premières lignes des restes du triangle de Pascal, modulo 4.

Code des couleurs 1 : 
 0 : 

Triangle des restes
 du triangle de Pascal
 dans la division
 par DEUX.






Représenté sur un
 réseau losangé.

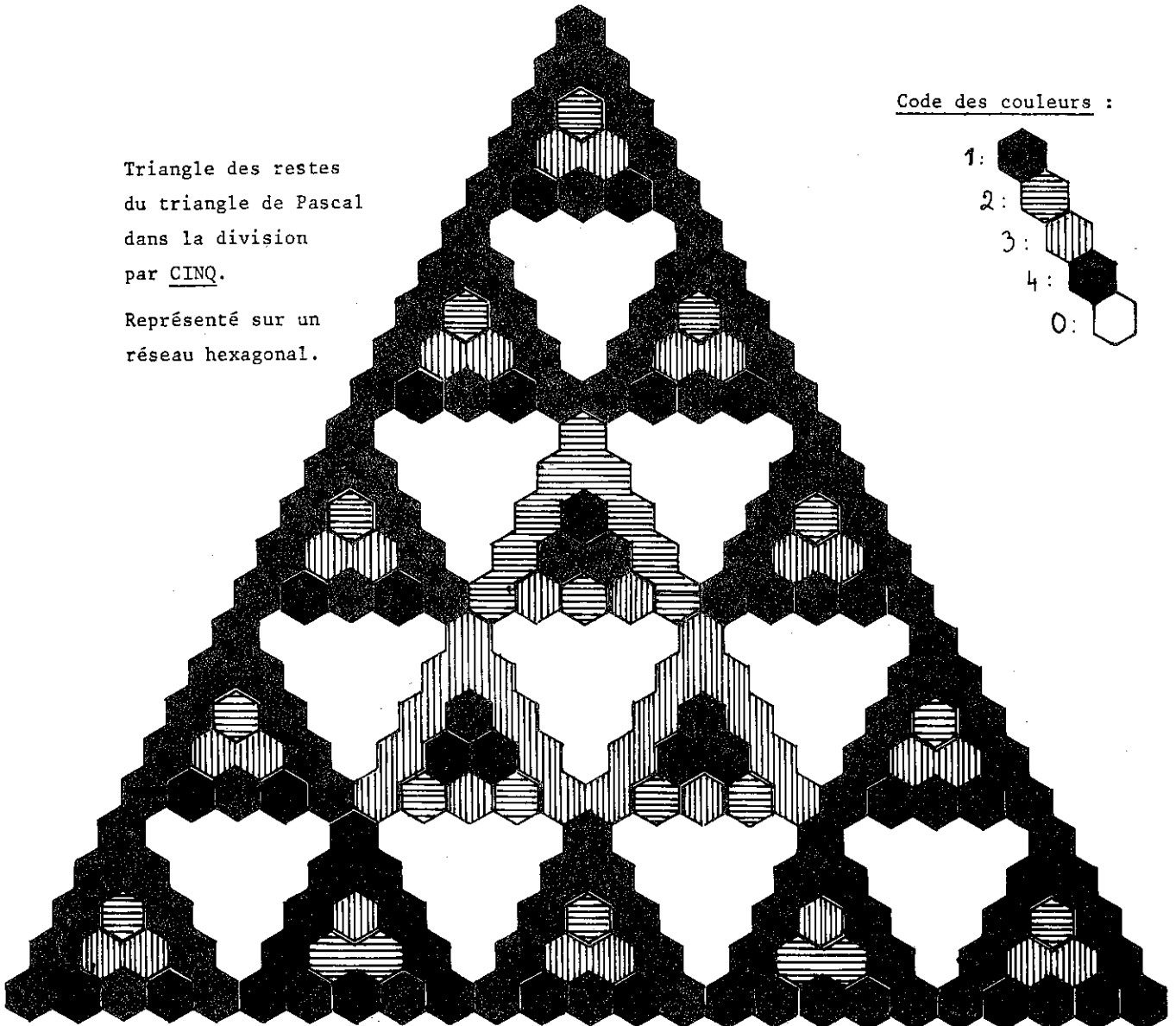


Triangle des restes
 du triangle de Pascal
 dans la division
 par CINQ.

Représenté sur un
 réseau hexagonal.

Code des couleurs :

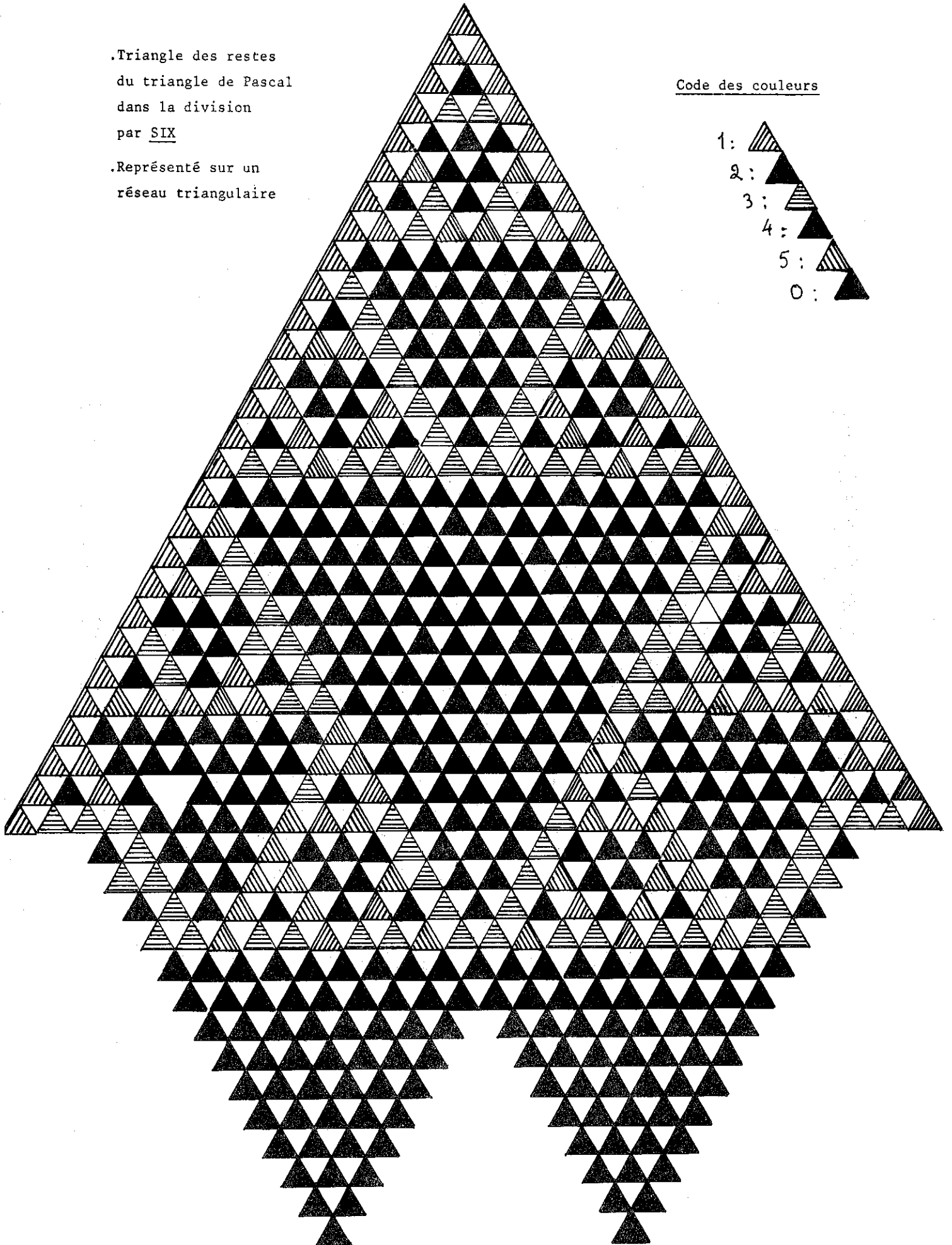
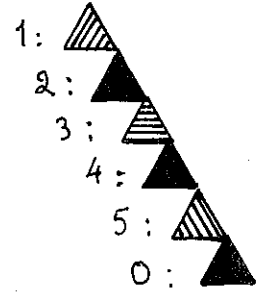
1: 
 2: 
 3: 
 4: 
 0: 

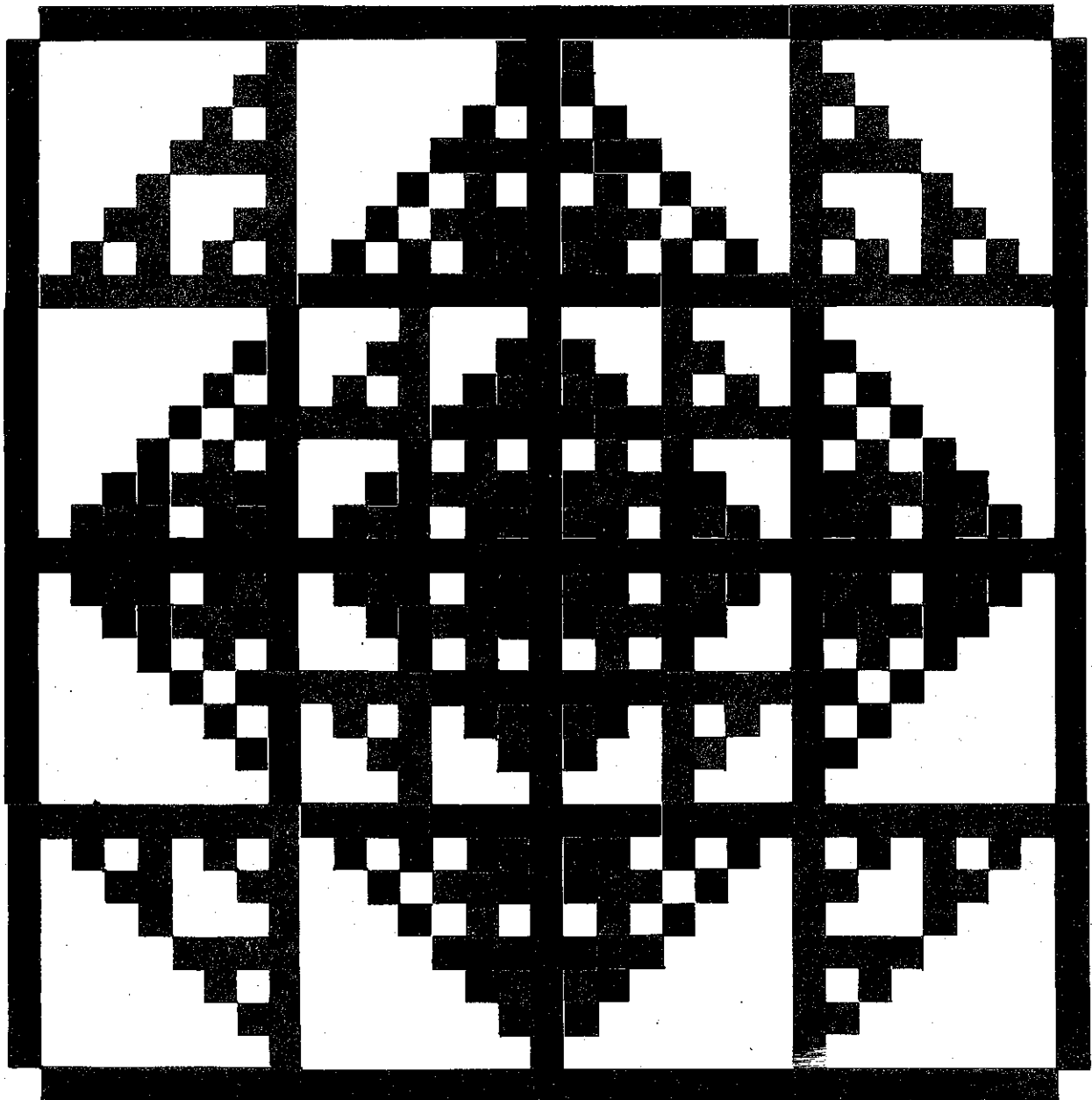


.Triangle des restes
du triangle de Pascal
dans la division
par SIX

.Représenté sur un
réseau triangulaire

Code des couleurs





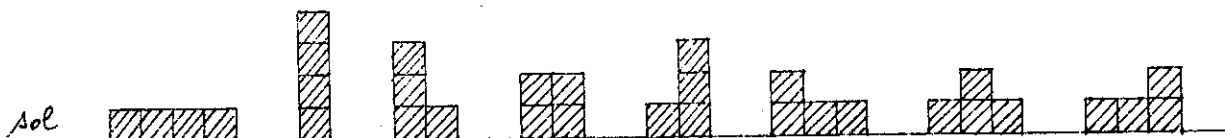
Frise obtenue en accolant quatre triangles des restes du triangle de Pascal dans la division par QUATRE, représentés sur un réseau carrelé.

Code des couleurs : 1 : ■ 2 : ■ 3 : ■ 0 : □

TRIANGLE DE PASCAL ET DÉNOMBREMENT

 Daniel FREDON
 Université de Limoges

- 1 Avec 4 carrés identiques, on peut réaliser les 8 figures ci-dessous, que nous allons interpréter comme les 8 façades possibles de buildings faits avec 4 cubes :

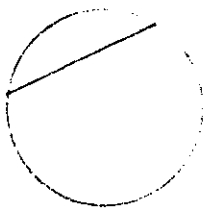


Cette interprétation nous interdit des constructions des types ci-contre :



Avec n cubes, combien peut-on faire de buildings ayant p cubes à la base, la construction respectant les règles induites par l'exemple donné ?

- 2 On se donne n points dans un plan et on trace les cercles qui passent par trois de ces points. Combien y a-t-il de cercles (si aucun cercle ne contient plus de trois points), et en combien de points au maximum se recoupent-ils en dehors des points donnés ?

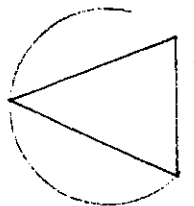


On écartera toute particularité de la figure.

Réponses : $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ et $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(2n-1)}{72}$

- 3 On a n droites de plan qui se coupent toutes deux à deux et telles que trois d'entre elles ne soient jamais concourantes.

Combien y a-t-il de points d'intersection sur la figure ?

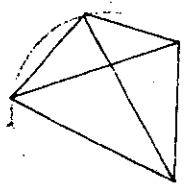


- 4 On considère un cercle. Si on prend 2 points sur ce cercle, il y a une corde qui les joint. Cette corde détermine à l'intérieur du cercle 2 régions.

Puis on prend trois points. En les joignant on obtient 3 cordes qui déterminent 4 régions.

Quatre points permettent de tracer 6 cordes qui déterminent 8 régions.

On augmente le nombre de points sur le cercle, et on s'arrange pour qu'il n'y ait jamais trois cordes concourantes.



Compléter "expérimentalement" le tableau ci-contre.

La succession des nombres relatifs au dénombrement des cordes se retrouve dans le triangle de Pascal. Expliquez ce résultat.

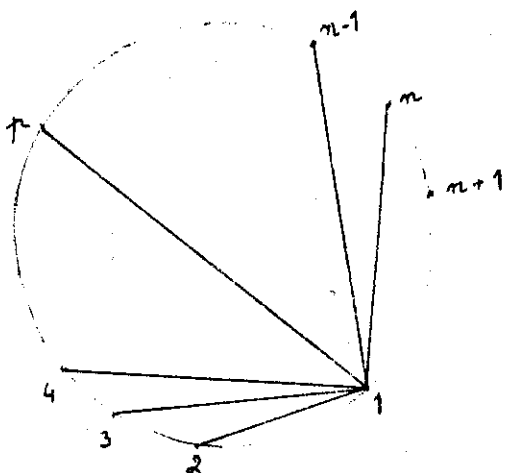
nombre de points	2	3	4	5	6	7
nombre de cordes	1	3	6			
nombre de régions	2	4	8			

Vous allez prendre un cercle avec 4 (ou 5) points et observer ce qui se produit lorsqu'on rajoute un point.

Combien y a-t-il de nouvelles cordes ?

Chaque tracé d'une nouvelle corde augmente le nombre de régions. De combien ?

Lorsqu'on rajoute un 5^e point (resp. un 6^e), le nombre de régions augmente d'une certaine valeur q . Comparer q et le nombre de points de concours des anciennes cordes avec les nouvelles.



On suppose que l'on a sur un cercle n points numérotés $1, 2, 3, \dots, n$ et que l'on ajoute un $(n+1)$ ^e point suivant le schéma ci-contre.

En traçant la corde $(n+1,1)$, on augmente de 1 le nombre de régions.

En traçant la corde $(n+1,2)$, on augmente le nombre de régions d'une certaine valeur m . Cette valeur m est égale au nombre de segments qui apparaissent sur cette corde, découpés par les cordes issues de 1. Ce nombre m est donc égal à $(n-2) + 1$ (un de plus que le nombre d'intersection).

De même en traçant la corde $(n+1,3)$ on augmente le nombre de régions d'une certaine valeur m' . Cette valeur m' est égale au nombre de segments dont est formée la corde. Ces segments sont déterminés par les cordes issues de 1 et de 2 et qui les coupent. Il y a $2(n-3)$ cordes et $2(n-3) + 1$ segments.

Le même raisonnement appliqué à la corde $(n+1,p)$ montre que le tracé de cette corde augmente le nombre de régions de $(p-1)(n-p) + 1$.

Le tracé de toutes les cordes augmente le nombre de régions de :

$$N = n + (n-2) + 2(n-3) + 3(n-4) + \dots + (p-1)(n-p) + \dots + (n-2)\{n-(n-1)\}$$

$$N = n + n + 2n + 3n + \dots + (n-2)n - |1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + (n-2)(n-1)|$$

$$N = n + n \binom{1}{1} + \binom{1}{2} + \dots + \binom{1}{n-2} - 2 | \binom{2}{2} + \binom{2}{3} + \dots + \binom{2}{n-1} |$$

$$N = n + n \binom{2}{n-1} - 2 \binom{3}{n} = n + 3 \binom{3}{n} - 2 \binom{3}{n}$$

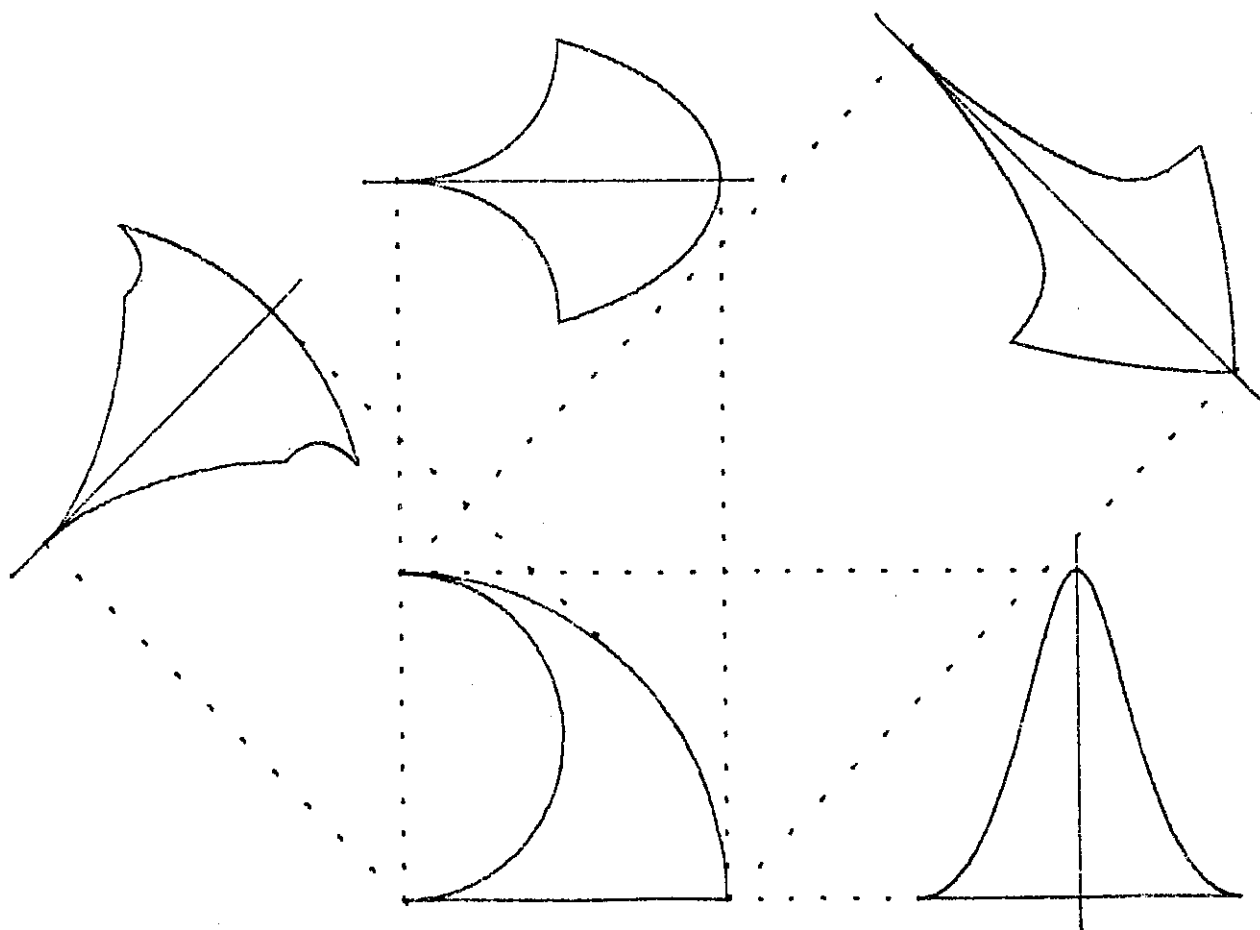
$$N = \binom{1}{n} + \binom{3}{n}$$

Conclusion : Quelle est le nombre de régions déterminées par n points sur le cercle ?

SYMÉTRISONS

Nicole CHERAMY
Lycée Grandmont - Tours

A la lecture de l'article "AIRES et PERIMETRES" paru dans le PLOT n° 9, j'ai eu l'idée d'utiliser un ordinateur pour symétriser une figure non polygonale. Voici ce que j'ai obtenu sur un exemple. Etes-vous d'accord ? (matériel utilisé : HP 30 avec table traçante de l'IREM d'Orléans).



.....
Osciller (*os-si-lé*) v.i. (lat. *oscillare*). Exécuter des oscillations. *Pendule qui oscille. Fig* : Varier, hésiter : *osciller entre deux partis.*

Osculateur, trice (*os-ku*) adj. (du lat. *osculari*, baiser). *Géom*: Se dit de lignes, plans, surfaces se touchant d'une façon particulière : *plan osculateur.*

Osculation (*os-ku-la-si-on*) n.f. *Géom* : genre de contact de lignes, de plans ou surfaces osculatrices.

Osé (*zé*), e adj. Fait ou tenter avec audace. *Tentative osée. Hardi, audacieux : vous êtes bien osé.*

.....

Extrait du Petit Larousse Illustré
Edition de 1946, page 729

Certifié conforme à l'original

P. Orno-Mathix

LES PUBLICATIONS DE L'A.P.M.E.P.

Commandez ces brochures à votre Régionale
(voir adresse en dernière page)

Le premier prix est "port compris"

Le prix entre parenthèses est "port non compris"

8. *Mots I*, 1974, 100 p., 14 F (10 F).
9. *Elem-Math I*, 1975, 56 p., 6 F (4 F).
10. *Carrés magiques*, par Belouze, Glaymann, Haug et Herz, 1975, 48 p., 6 F (4 F).
11. *Mots II*, 1975, 108 p., 14 F (10 F).
12. *Substitutions et groupe symétrique*, par J. Dautrevaux. Épuisé.
13. *Mathématique pour la formation d'adultes* (CUEEP), par P. Loosfelt et D. Poisson, 1976, 189 p., 21 F (15 F).
14. *A la recherche du noyau des programmes de mathématiques du premier cycle. Savoir minimum en fin de troisième* (IREM de Toulouse - A.P.M.E.P.), 2ème édition 1976, 220 p., 21 F (15 F).
15. *Mots III*, 1976, 136 p., 16 F (12 F).
16. *Elem-Math II*, 1976, 56 p., 8 F (6 F).
17. *Hasardons-nous*, 1976, 220 p., 31 F (25 F).
19. *Elem-Math III, La division à l'école élémentaire*, 1977, 100 p., 14 F (10 F).
20. *Quelques apports de l'Informatique à l'Enseignement des Mathématiques*, 1977, 280 p., 31 F (25 F).
21. *Géométrie au premier cycle, tome 1*, 1977, 208 p., 31 F (25 F).
22. *Géométrie au premier cycle, tome 2*, 1978, 328 p., 36 F (30 F).
23. *Pavés et bulles*, par Françoise Pécaut, 1978, 288 p., 31 F (25 F).
24. *Calculateurs programmables et algèbre de quatrième (une recherche inter-IREM)*, 1978, 120 p., 24 F (20 F).
25. *Mots IV*, 1978, 152 p., 16 F (12 F).
26. *Elem-Math IV, Aides pédagogiques pour le Cours Préparatoire*, 1978, 64 p., 13 F (9 F).
27. *Pour une mathématique vivante en Seconde*, 1979, 128 p., 19 F (15 F).
29. *Elem-Math V, Aides pédagogiques pour le Cours Élémentaire*, 1979, 192 p., 24 F (18 F).
30. *Les manuels scolaires de mathématiques*, 1979, 280 p., 36 F (30 F).
31. *Calculatrices 4 opérations (Elémentaire et premier cycle)*, 1979, 176 p., 19 F (15 F).
32. *Texte d'orientation A.P.M.E.P. 1978 dans le prolongement des Chartes de Chambéry et de Caen*, 2 F (sans port : gratuit). [Ce texte figure aussi dans le Bulletin n° 314].
33. *Activités mathématiques en Quatrième-Troisième, tome I*, 1979, 248 p., 31 F (25 F).
34. *Recherche inter-IREM, 1973-78, en géométrie de 4ème-3ème, dite "O.P.C." : réflexion critique et évaluation*, 1979, 50 p., 34 F (30 F).
35. *Du quotidien à la mathématique : une expérience en formation d'adultes*, 1979, 180 p. environ; 32 F (28 F).