

plot

BULLETIN DES REGIONALES A.P.M.E.P.
DE POITIERS, LIMOGES ET ORLEANS-TOURS

Le Supplément du PLOT consacré aux TRANSFORMATEURS est paru durant les vacances. Nous souhaitons que nombreux soient ceux qui ont pris du plaisir et de l'intérêt à ces mécanismes dont le principe est ancien et que nous avons remis au goût du jour.

Prochainement, le numéro du Supplément consacré aux PENTIMETRES, INTEGRAPHERS et autres DERIVOGRAPHES va sortir; encore une actualisation de très anciens mécanismes. Le numéro du Supplément consacré à une synthèse sur les polyèdres est prévu pour la toute fin de l'année.

Nous vous souhaitons de bonnes lectures, avec le PLOT et avec ses Suppléments, ... et une bonne année scolaire.

L'équipe d'animation

.....Adresse du journal : IREM. Université, 45046 Orléans Cedex.....
Directeur de Publication : Pascal Monsellier.....numéro CPPAP : 63181
Imprimé par le Centre Régional de Documentation Pédagogique, 55 rue Notre-
Dame de Recouvrance, 45000 Orléans.....Equipe d'animation : Roger
Crépin, Pascal Monsellier, Serge Parpay.....

Dépot légal : 3^e trimestre 1983

Toutes les publicités contenues dans le PLOT le sont à titre gratuit.

PRÉSENCE D'ÉVARISTE GALOIS 1811 - 1832

Une publication A.P.M.E.P.
consacrée à l'un des mathématiciens le plus incompris de son époque
et dont les idées ont pourtant profondément marqué
l'évolution de la science

56 pages

dans un format exceptionnel : 21 × 29,7
illustrées de reproductions photographiques de pages manuscrites
d'Evariste Galois.



Prix : 45 F

Prix port compris : 51 F

Adressez-vous à une
Régionale APM

Né le 25 octobre 1811 à Bourg-la-Reine, Evariste Galois mourut des
suites d'un duel le 31 mai 1832, il y a donc tout juste cent cinquante ans...

SOMMAIRE

- G. WALUSINSKI — *Evariste Galois et nous.*
- R. TATON — *Evariste Galois et ses contemporains*, suivi d'une bibliographie complète et de 16 documents.
- A. DAHAN — *L'œuvre algébrique d'Evariste Galois.*
- J. DIEUDONNÉ — *L'influence de Galois.*
- D. GUY — "Mathématiques en fête" au Collège et Lycée R. Rolland d'Argenteuil.

plot

BULLETIN DES REGIONALES APMEP DE POITIERS, LIMOGES ET ORLEANS-TOURS

Sommaire du n° 24

Rencontres

- Léonce LESIEUR - Présence d'Evariste Galois 3
Jean BRETTE - Excursion mathématique 10

Pratique

- Michel DOFAL - Sur la Géométrie de l'espace 18
Jean SAUVY - Le Bras doré 25
James TOUILLET - Découpages 26
Jacques BELLIKAUD - Numération au C.P. (2) 27

Echanges

- Michel LABROUSSE - Mots croisés 17
Maths et B.D. 31
Régionale de POITIERS 32
AGENDA & ABONNEMENTS 34

1983

TOUJOURS PLUS,
TOUJOURS MIEUX !

LE SUPPLEMENT DU **plot**

VOUS PROPOSE POUR 1983

3 NOUVEAUX NUMEROS HORS-SÉRIE DU P L O T

Deux pochettes permettant de réaliser et faire réaliser avec du carton, d'utiliser au rétroprojecteur :

Supplément n° 3 : Des TRANSFORMATEURS

- classiques : translateur, homothétiseur, symétriseur, inverseur, ...
- moins classiques qui ... transportent la figure comme la grande roue, la pompe, le glisseur,...
- non standards comme ceux qui transforment une droite en ... haricot, un cercle en spirale,...



avec
carton
et rivets

pour les jeunes
et.... le rétro !



Supplément n° 4 : Des PENTIMETRES :

- celui qui donne la pente d'une droite ou d'une tangente,
- un intégraphe qui permet de construire des courbes intégrales,
- un dérivographe qui permet de construire la courbe dérivée à partir de la courbe image d'une fonction.

DE PLUSpour compléter les suppléments 1 et 2 de 1982 nous vous proposons en

Supplément n° 5 : un dossier complet de fiches cartonnées (15x21) sur les polyèdres donnant toutes les informations techniques avec dessins ou photos pour réaliser et colorier avec les PLOT-MATERIEL 1 et 2

- les 9 polyèdres réguliers convexes ou étoilés,
- les 13 semi-réguliers convexes et leurs duaux,
- les 92 autres polyèdres convexes à faces régulières,
- d'autres polyèdres à fossettes ou étoilés comme ceux qui sont composés d'un polyèdre et de son dual.

Pour recevoir ces numéros hors-série, il suffit de souscrire aux suppléments en même temps que vous renouvelez votre abonnement au PLOT (voir page 34)

Présence d'Evariste Galois

Léonce LESIEUR - Paris

Ce texte reprend la conférence faite par l'auteur (professeur à l'Université de Paris-Sud, Orsay), à la Régionale APMEP de Limoges, le 19 Janvier 1983.

Sans reprendre en détail la vie et l'oeuvre de GALOIS qui ont déjà fait l'objet de nombreuses publications et que beaucoup d'entre vous connaissent, il me faut bien, cependant, en situer les faits principaux dans leur époque.

Je vais le faire au moyen de la Chronologie empruntée à l'édition critique des Ecrits et Mémoires d'Evariste GALOIS, par P. BOURGNE et J. P. AZRA, éditée à PARIS en 1962 (541 pages).



CHRONOLOGIE (D'APRES BOURGNE & AZRA)

1777. Naissance de Gauss.

1789. Naissance de Cauchy.

1802. Naissance d'Abel.

1804. Naissance de Jacobi.

Le 25 octobre 1811.

Evariste Galois naît à Bourg-la-Reine, deuxième enfant de Nicolas Gabriel Galois, maître de pension, et de Adélaïde-Marie Demante, fille aînée de Thomas Demante, président du Tribunal de Louviers.

1813. Mort de Lagrange.

1815. Cent jours : M. Galois est élu maire de Bourg-la-Reine; 18 juin : Waterloo.

1818. Mort de Monge.

1822. Naissance d'Hermite.

1818-1823.

Enfance d'Evariste à Bourg-la-Reine. Sa mère lui apprend le latin et lui fait lire Plutarque.

Le 6 octobre 1823.

Entre en Quatrième au collège royal de Louis-le-Grand, où il obtient une bourse. Il y sera pensionnaire jusqu'en 1829. Une insurrection collégienne trouble ce premier trimestre, réprimée à la Saint-Charlemagne par l'expulsion d'une centaine d'élèves.

1823-1826.

Latin, grec, français à Louis-le-Grand. Evariste est un élève distingué, brillant. Il obtient un accessit de version grecque au Concours Général de Troisième. Marque quelque fatigue en Seconde.

1826-1827.

Les mathématiques sont introduites en Seconde et Rhétorique. Evariste redouble sa Seconde, après un trimestre en Rhétorique.

1827. Mort de Laplace.

Janvier-mars 1827.

Révélation de son goût pour les mathématiques. Il lit d'un trait la géométrie de Legendre, et s'empare bientôt de Lagrange.

Premier prix de Mathématique au Concours Général et accessit de grec, à la fin de l'année.

Octobre 1827-1828.

Rhétorique. Deuxième année de Mathématiques préparatoires. Education mathématique dans Lagrange. Préparation à Polytechnique, échec. Accessit au Concours Général.

Octobre 1828-1829.

Elève de l'excellent M. Richard en Mathématiques Spéciales.

1^{er} avril 1823.

Publie (c'est la première fois) une Démonstration d'un théorème sur les fractions continues périodiques dans les Annales de Gergonne.

6 avril 1829.

Mort d'Abel.

25 mai et 1^{er} juin 1829.

Présente à l'Académie des Sciences ses premières recherches sur les équations algébriques de degré premier, par l'intermédiaire de Cauchy.

Juillet 1829.

Temps d'épreuves douloureuses :

Le 2 : M. Galois, le père, se suicide.

Quelques jours plus tard, deuxième et définitif échec à Polytechnique. L'examinateur Dinet décide de cette « incapacité ».

Octobre 1829.

Evariste Galois entre à l'École Préparatoire (nom de l'École Normale sous la Restauration).



29 décembre 1829.
Bachelier ès lettres. Bachelier ès sciences.

4 février 1830.
Engagement dans l'Université.

Février 1830.
Présente un important Mémoire à l'Académie des Sciences sur les conditions pour qu'une équation soit soluble par radicaux afin de concourir au Grand prix de Mathématiques.

Avril 1830.
Fait paraître dans le Bulletin de Férussac, une Analyse d'un mémoire sur la résolution algébrique des équations.
Mort de Fourier.

Juin 1830.
Apprend la perte de son Mémoire. « Mais la perte de ce Mémoire est une chose très simple. Il était chez M. Fourier qui devait le lire, et, à la mort de ce savant, le Mémoire a été perdu. »

Fait paraître dans le Bulletin de Férussac du même mois : Notes sur la résolution des équations numériques, et l'important article : Sur la théorie des nombres. Il songe à une publication générale, rédige un nouveau Mémoire sur le même sujet, écrit le Discours Préliminaire. Le Grand prix de Mathématiques est décerné à Abel et Jacobi.

Juillet 1830.
A la révolution, dissentiment entre l'élève de l'École Normale et son directeur, M. Guignaut. Il ira s'accusant, M. Cauchy suit le roi Charles X et quitte la France.

Août-décembre 1830.
Passe ses examens de licence. Il se lie à des étudiants républicains (Raspail, Blanqui, Napoléon Aimé Lebon, etc.) et il entre dans les artilleurs de la Garde nationale.

Décembre 1830.
Les Annales de Gergonne font paraître ses Notes sur quelques points d'analyse. Dernière publication.
Crise avec M. Guignaut. Il adresse à la Gazette des Écoles une lettre contre le directeur de l'École Normale, qui le chasse. L'affaire fait scandale et occupe la presse.

2 janvier 1831.
La Gazette des Écoles publie sa Lettre sur l'enseignement des sciences sous les initiales E. G.

4 janvier 1831.
Arrêt du Conseil royal prononçant que l'élève Galois quittera immédiatement l'École Normale et qu'il sera statué ultérieurement sur son sort.

Janvier 1831.
Ouvre un cours de mathématiques à la librairie Caillot, 5, rue de la Sorbonne.
Sur l'invitation de Poisson, présente à nouveau un Mémoire sur la résolution des équations, remis le 17 à l'Institut.
Agitation au Quartier latin.

9 mai 1831.
Au banquet des Vendanges de Bourgogne, où l'on célèbre l'acquisition des artilleurs au « Procès des dix-neuf », il lève un toast à Louis-Philippe avec un poignard. Il est arrêté le lendemain.

15 juin 1831.
Procès en Cour d'Assises; il est acquitté.

4 juillet 1831.
Sur le rapport de Poisson, l'Académie refuse d'approuver le Mémoire sur la résolution des équations.

14 juillet 1831.
Au cours d'une manifestation républicaine, Evariste Galois et son ami Duchatelet sont arrêtés sur le Pont Neuf en tête d'un petit groupe d'étudiants.

Juillet-octobre 1831.
Détenue à Sainte-Pélagie, où il retrouve parmi divers républicains, Raspail, Blanqui, etc.; elle est marquée par quelques incidents.

23 octobre 1831.
Il est condamné en Police Correctionnelle à 6 mois de prison. Duchatelet à 3 mois. Jugement confirmé en Cours d'Appel le 3 décembre 1831.

Novembre 1831.
Émeutes à Lyon.

Décembre 1831-mars 1832.
Toujours détenu à Sainte-Pélagie, où il aura des visites d'Auguste Chevalier, de sa sœur, de sa tante Céleste Marie Guinard, où il rencontrera Nerval.
Nouveau projet de publication. Il relit son Mémoire sur la résolubilité des équations et rédige sa Préface en décembre. Travaille sur les fonctions elliptiques.
Transfert disciplinaire à la Force (22-31 janvier).

Mars 1832.
Menace de choléra à Paris.

Le 16 mars 1832.
Il est transféré à la maison de santé du Sieur Faultrier. Le choléra se déclare dans Paris.

Mars-avril 1832.
Reprend ses travaux mathématiques.
Rédige quelques essais, et pense collaborer à la Revue Encyclopédique.

14 mai 1832.
Voil se rompre un amour malheureux avec Mademoiselle Stéphanie D.⁽¹⁾

25 mai 1832.
Écrit à Chevalier, forme des projets pour aller dans le Dauphiné, et se vouer à ses travaux mathématiques (il doit être libéré le 1^{er} juin).

26-28 mai 1832.⁽²⁾
Provoqué en duel après la rupture amoureuse et dans des circonstances fort obscures, ayant épuisé tout moyen de conciliation, il rédige le 23 mai une lettre à A. Chevallier, qui reste son testament mathématique, il classe ses papiers, et se rend enfin le 30 au matin près de l'étang de la Glacière, non loin de la pension Faultrier. On l'y trouvera quelques heures plus tard, abandonné par ses témoins, et mortellement atteint.

Le 31 mai 1832.
A 10 heures du matin, Evariste Galois meurt à l'hôpital Cochin dans les bras de son frère, après avoir refusé les offices d'un prêtre.

Le 2 juin 1832.
Ses amis républicains accompagnent son corps au cimetière Montparnasse, où il est enterré en fosse commune.

4 juin 1832.
Émeutes à Paris. Barricades du cloître Saint-Mery.

Septembre 1832.
Le Revue Encyclopédique publie la Lettre à Auguste Chevalier et l'article nécrologique que ce dernier fit sur son ami.

1834. Mort de Legendre.

1836. Mort d'Ampère.

1843. Liouville annonce à l'Académie des Sciences, séance du 4 juillet : « ... j'espère intéresser l'Académie en lui annonçant que dans les papiers d'Evariste Galois j'ai trouvé une solution aussi exacte que profonde de ce beau problème : Étant donnée une équation irréductible de degré premier, décider si elle est ou non soluble par radicaux. »

Novembre-décembre 1846.
Première publication de l'œuvre mathématique d'Evariste Galois.

(1) On sait maintenant le nom entier : Stéphanie Dumotel (Stéphanie Félicie Poterin du Motel).

(2) On connaît le nom de son adversaire : Pescheux d'Herbinville.

Et maintenant, que reste-t-il de tout cela ? Eh bien, c'est assez extraordinaire : les résultats fondamentaux de GALOIS sont encore enseignés à l'heure actuelle et les idées qu'il a semées ont des prolongements inattendus. Bien sûr, le langage n'est pas tout-à-fait le même et on attribue peut-être à GALOIS des paternités qu'il n'a pas eues. Mais l'essentiel subsiste.

Je voudrais, pour commencer, et sans prétendre faire un Cours, indiquer comment on expose généralement la théorie de GALOIS de nos jours.

EXTENSION GALOISIENNE D'UN CORPS K

La présentation moderne de la théorie de GALOIS commence par la notion d'extension galoisienne d'un corps k , et on démontre le théorème fondamental par des procédés d'algèbre linéaire.

On poursuit l'étude en l'appliquant à la théorie des équations algébriques à coefficients dans k .

EXTENSIONS FINIES DE k -

Si K est un corps et k un sous-corps de K , K admet une structure naturelle d'espace vectoriel sur k . Si la dimension de cet espace vectoriel est finie, on la note $[K : k]$, et on dit que K est une EXTENSION FINIE de k DE DEGRE $[K : k]$.

Exemple : C'est une extension de \mathbb{R} de degré 2 (extension quadratique).

LE GROUPE DE GALOIS $G = \text{Gal}(K, k)$ -

A toute extension finie K de k , on associe le groupe G constitué par les k -automorphismes de K , c'est-à-dire l'ensemble des automorphismes de K laissant invariant chaque élément de k .

Ce groupe G est appelé le GROUPE DE GALOIS de K sur k , et noté $G = \text{Gal}(K, k)$.

Le groupe $G = \text{Gal}(K, k)$ est fini, d'ordre $m = \text{Card}(G) \leq [K : k]$

LE CORPS DES INVARIANTS DE G -

Les éléments de K qui sont invariants par les k -automorphismes de G forment un sous-corps F de K , appelé corps des

invariants de G , ou corps des éléments fixes de K par G , noté $F = \text{Fix}(K, G)$. On a évidemment $\text{Fix}(K, G) \supseteq k$.

Dans l'exemple de l'extension \mathbb{C} de \mathbb{R} , G est constitué de la transformation identique Id_G , et de l'automorphisme de conjugaison.

$\sigma : a + bi \mapsto a - bi$. On a $m = 2 = \text{card}(G)$.

Le corps des invariants de G est \mathbb{R} ; on a ici $F = k$.

EXTENSION GALOISIENNE -

Un premier résultat général est le suivant, qui conduit à la notion d'extension galoisienne (finie).

Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) k EST LE CORPS DES INVARIANTS de $G = \text{Gal}(K, k)$.
- (ii) LE CARDINAL DE G EST EGAL AU DEGRE DE L'EXTENSION.

En abrégé, $\text{Fix}(K, G) = k$
 $\iff \text{Card } G = [K : k]$.

L'extension finie K de k est dite galoisienne si elle vérifie une de ces conditions.

Exemples : \mathbb{C} est une extension galoisienne de \mathbb{R} .

L'extension algébrique $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ n'est pas une extension galoisienne de \mathbb{R} car $G = \text{Gal}(K, \mathbb{Q})$ se réduit à l'identité, alors que K est un espace vectoriel de base $(1, 2^{1/3}, 2^{2/3})$ sur \mathbb{Q} , d'où $\text{Card } G = 1 < [K : \mathbb{Q}] = 3$.

On a aussi $F = \text{Fix}(K, G) = K \neq \mathbb{Q}$.

K étant une extension galoisienne finie de k , le THEOREME FONDAMENTAL DE LA THEORIE DE GALOIS ETABLIT UNE CORRESPONDANCE BIJECTIVE DECROISSANTE ENTRE LES SOUS-GROUPES H de $G = \text{Gal}(K, k)$ ET LES SOUS-CORPS k' de K CONTENANT k : cette correspondance est définie par les applications (inverses l'une de l'autre)

$H \mapsto k' = \text{Fix}(K, H)$,

$k' \mapsto \text{Gal}(K, k') = H$

On a de plus : $\text{Card } H [K : k']$, $i(H) = [k' : k]$ où $i(H)$ désigne l'index de H dans G , c'est-à-dire le nombre de classes de G modulo H .

Enfin :

LE CORPS k' EST UNE EXTENSION GALOISIENNE DE k SI ET SEULEMENT SI $H = \text{Gal}(K, k')$ EST INVARIANT DANS G . ON A ALORS L'ISOMORPHISME $\text{Gal}(k', k) \simeq \text{Gal}(K, k) / \text{Gal}(K, k')$.

Ce beau théorème ramène l'étude des sous-corps de K contenant k , à celle des sous-groupes de G .

Quand on pense qu'à l'époque de Galois on possédait à peine la notion de groupe, et que le groupe G , mis en évidence par GALOIS, est loin d'être apparent, on comprend qu'Evariste ait pu être incompris par les mathématiciens de son temps. Mais son génie a été reconnu par la suite, et on ne peut qu'admirer sa théorie qui, comme on va le voir, jette une éclatante lumière sur celle des équations algébriques.

LE GROUPE DE GALOIS D'UNE EQUATION

Pour plus de simplicité, nous considérons un corps k de caractéristique nulle ou un corps fini.

CORPS DE DECOMPOSITION d'UNE EQUATION -

On considère l'équation $f(X) = 0$, où $f(X)$ est un polynôme à coefficients dans k (ce qu'on note $f(X) \in k[X]$)

Cette équation n'a pas nécessairement de racines dans k , mais il existe des extensions K' de k dans lesquelles $f(X)$ se décompose en facteurs du premier degré

$$f(X) = a_0 (X - x_1) \dots (X - x_n) \quad (x_i \in K')$$

La plus petite extension de k dans K' vérifiant cette condition est le sur-corps $K = k(x_1, \dots, x_n)$ de k engendré par k et les racines x_1, \dots, x_n de $f(X)$. C'est une extension finie de k , appelée CORPS DE DECOMPOSITION de $f(X)$ sur k , et qui est unique à un k -isomorphisme près.

On peut donc considérer le groupe de GALOIS $G = \text{Gal}(K, k)$ de cette extension, que l'on appelle le GROUPE DE GALOIS DE L'EQUATION $f(X) = 0$ sur k , et que l'on note $G(f; k)$. On montre que ce groupe est isomorphe à un sous-groupe du groupe des permutations des racines distinctes de f .

Une propriété remarquable de cette extension est qu'elle est toujours galoisienne. Mieux encore, réciproquement, toute extension galoisienne de k est de ce type. Nous énonçons :

SI k EST UN CORPS FINI OU DE CARACTERISTIQUE NULLE, LES DEUX PROPOSITIONS SUIVANTES SONT EQUIVALENTES :

(i) K EST UNE EXTENSION GALOISIENNE DE k .

(ii) K EST LE CORPS DE DECOMPOSITION D'UNE EQUATION

$$f(X) = 0 \text{ sur } k, \text{ où } f \in k[X]$$

Exemple :

Considérons l'équation $x^3 - 2 = 0$ sur le corps $k = \mathbb{Q}$.

Le polynôme $f(X) = X^3 - 2$ se décompose dans \mathbb{C} en :

$$f(X) = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3) \text{ avec } x_1 = \sqrt[3]{2}, x_2 = jx_1, x_3 = j^2x_1.$$

Le corps de décomposition de $f(X)$ sur \mathbb{Q} est :

$$K = \mathbb{Q}(x_1, x_2, x_3) = \mathbb{Q}(x_1, j)$$

C'est un espace vectoriel de dimension 6 sur \mathbb{Q} , car il admet $(1, j, j^2, x_1, jx_1, j^2x_1)$ pour base.

(Rappelons que $j = (-1 + i\sqrt{3})/2$).

Par ailleurs, le groupe G des \mathbb{Q} -automorphismes de K est le groupe \mathfrak{S}_3 des permutations des racines

$$x_1, x_2, x_3.$$

On a bien ici :

$$\text{Card } G = 6 = [K : \mathbb{Q}].$$

La correspondance bijective entre sous-corps de K et sous-groupes de G est la suivante :

$$\mathbb{Q} \leftrightarrow \mathfrak{S}_3 \quad K \leftrightarrow \text{Id}$$

$$\mathbb{Q}(j) \leftrightarrow G_0, \quad \mathbb{Q}(x_1) \leftrightarrow G_1,$$

$$\mathbb{Q}(x_2) \leftrightarrow G_2, \quad \mathbb{Q}(x_3) \leftrightarrow G_3$$

où G est le sous-groupe de $G = \mathfrak{S}_3$

formé des permutations paires (dites circulaires) et G_i

($i = 1, 2, 3$), le sous-groupe de G laissant x_i invariant (composé de l'identité et de la transposition des deux autres éléments).

Le groupe G_0 étant invariant dans G , $Q(j)$ est une extension galoisienne de Q (c'est l'extension relative au polynôme $X^3 - 1$).

Par contre, pour $i = 1, 2, 3$, $Q(x_i)$ n'est pas une extension galoisienne de Q , car G_i n'est pas un sous-groupe invariant de G .

APPLICATION A LA RESOLUTION DES EQUATIONS ALGEBRIQUES

Et maintenant, on comprend comment le théorème fondamental de la théorie de GALOIS s'applique à la résolution des équations algébriques. On définit des équations successives auxiliaires utiles pour la résolution de l'équation au moyen d'une suite de sous-groupes successifs du groupe de GALOIS de l'équation, chacun étant invariant dans le précédent. Une telle suite maximale, dite de JORDAN-HOLDER, donne la meilleure méthode pour résoudre l'équation au moyen d'équations plus simples. Il faut mentionner ici que LAGRANGE avait déjà obtenu avant GALOIS des résultats intéressants dans cette voie, qui consiste à remplacer l'équation par plusieurs autres, mais il n'avait pu édifier une théorie générale. Il faut remarquer aussi que c'est JORDAN qui, 50 ans après GALOIS, a développé la théorie des substitutions et des sous-groupes invariants qui permet à la théorie de GALOIS de s'exprimer totalement. Comme JORDAN a travaillé lui-même dans une solitude presque totale, on mesure mieux encore la formidable avance des idées de GALOIS sur celles des Mathématiciens de son temps.

EQUATIONS RESOLUBLES PAR RADICAUX

C'est la résolution par radicaux des équations algébriques à coefficients entiers qui a constitué la motivation première des recherches du jeune GALOIS, et il a réussi là où d'autres avaient échoué pendant plusieurs siècles.

Le problème général est de trouver une expression des racines d'une équation de degré n à coefficients dans un corps k , au moyen d'un nombre fini d'opérations d'addition, multiplication, division et d'extraction de racines (d'ordre quelconque) à partir d'éléments de k . On savait le faire, lorsque $k = Q$, pour les équations de degré 2, 3 ou 4, avec des radicaux d'ordre 2 ou 3 (formules de CARDAN). Le problème restait ouvert

pour un degré au moins égal à 5, mis à part le travail d'ABEL sur l'impossibilité de la résolution de l'équation générale de degré 5, qui venait de paraître en 1826.

GALOIS ramène ce problème à une question de théorie des groupes au moyen de la notion de GROUPE RESOLUBLE.

Un groupe fini G est dit résoluble s'il existe une suite décroissante finie de sous-groupes :

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \dots \supset G_n = \{e\}$$

telle que G_i soit invariant (on dit aussi : distingué) dans G_{i-1} , et que le groupe quotient G_{i-1}/G_i soit abélien ($i = 1, 2, \dots, n$).

Les groupes symétriques S_3 et S_4 sont non abéliens mais résolubles. TOUT GROUPE ABELIEN EST RESOLUBLE.

Cela étant, la réponse de GALOIS à la question de la résolution des équations par radicaux est d'une élégance limpide qui contraste avec la complexité du problème posé.

SOIT k UN CORPS DE CARACTERISTIQUE NULLE OU UN CORPS FINI. POUR QUE L'EQUATION $f(x) = 0$, ou $f \in k[X]$, soit RESOLUBLE PAR RADICAUX SUR k , IL FAUT ET IL SUFFIT QUE LE GROUPE DE GALOIS $G(f, k)$ SOIT RESOLUBLE.

On retrouve ainsi la résolubilité par radicaux des équations de degré 2, 3, 4 puisque S_2, S_3 , et S_4 sont résolubles.

Par contre, l'équation "générale" de degré $n \geq 5$ n'est pas résoluble par radicaux, car (moyennant une définition raisonnable de la notion d'équation générale sur k) on démontre que le groupe de GALOIS d'une telle équation est S_n , et que S_n n'est pas résoluble pour $n \geq 5$.

Mais il peut se faire que certaines équations de degré ≥ 5 sur Q soient résolubles par radicaux : par exemple, l'équation binomiale $X^n - 1 = 0$.

Il existe aussi des équations non générales de degré 5, par exemple l'équation à coefficients numériques $X^5 - 5X + 1 = 0$ qui ne sont pas résolubles par radicaux.

Le théorème de GALOIS l'explique parfaitement : dans le premier cas, $X^n - 1 = 0$, le groupe de GALOIS sur Q est celui d'une extension cyclotomique obtenue avec une racine primitive nème de l'unité et il est abélien, donc résoluble.

Dans le second cas, $X^5 - 5X + 1 = 0$, le groupe de GALOIS sur Q est le groupe symétrique S_5 qui n'est pas résoluble.

CONSTRUCTIONS A LA REGLE ET AU COMPAS

On sait qu'un nombre x est constructible à la règle et au compas si, et seulement si, on peut l'obtenir par des extensions quadratiques successives à partir de Q , c'est-à-dire au moyen d'un nombre fini d'opérations rationnelles et d'EXTRACTIONS DE RACINES CARREES.

Alors, le polynôme irréductible sur Q (dit aussi minimal) dont x est racine, noté $f(X) = \text{Irr}(x, Q)$, a pour degré une puissance de 2 et son groupe de GALOIS également. L'équation $f(X) = 0$ est un cas particulier d'équation résoluble par radicaux, un groupe d'ordre 2^r étant un cas particulier de groupe résoluble.

POUR QUE LE NOMBRE x SOIT CONSTRUCTIBLE A LA REGLE ET AU COMPAS, IL FAUT ET IL SUFFIT QUE x SOIT ALGEBRIQUE SUR Q , ET QUE LE GROUPE DE GALOIS DU POLYNOME MINIMAL $f(X) = \text{Irr}(x, Q)$ AIT POUR CARDINAL UNE PUISSANCE DE 2.

Par exemple, les racines de l'équation irréductible $X^4 - 2X^2 + 9 = 0$ sont constructibles à la règle et au compas : on le voit directement par la résolution de l'équation ou encore en déterminant le groupe de GALOIS qui est le groupe de KLEIN d'ordre 4 (S. MAC LANE et G. BIRKHOFF - Algèbre t.2 : les grands théorèmes, p. 104).

Une condition nécessaire (mais non suffisante) de constructibilité de x est que x soit algébrique sur

Q de degré 2^r ($r \in N$). On en conclut déjà l'impossibilité des constructions à la règle et au compas pour des problèmes fameux qui ont occupé les mathématiciens pendant des siècles :

LA QUADRATURE DU CERCLE, qui équivaut à la construction de $x = \sqrt{\pi}$; or, π est transcendant sur Q (c'est-à-dire non algébrique).

LA DUPLICATION DU CUBE, qui revient à la construction d'une racine de l'équation irréductible $X^3 - 2 = 0$. Ici, x est bien algébrique, mais de degré 3, qui n'est pas une puissance de 2.

LA TRISECTION DE L'ANGLE $\theta = \frac{\pi}{3}$, qui équivaut (en posant $x = \cos \frac{\theta}{3}$) à la résolution de l'équation irréductible $4X^3 - 3X - 1/2 = 0$. Là encore, x est algébrique sur Q , mais de degré 3, d'où l'impossibilité.

Par contre, LA TRISECTION DE L'ANGLE $\theta = \frac{\pi}{2}$ est possible à la règle et au compas, puisqu'elle équivaut à construire $x = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ou encore le polygone régulier de 12 côtés.

D'une façon générale, le problème de la construction des polygones réguliers a été complètement résolu par GAUSS, indépendamment des travaux de GALOIS :

LE POLYGONE REGULIER DE n COTES EST CONSTRUCTIBLE SI, ET SEULEMENT SI, n EST DE LA FORME

$$n = 2^r p_1 p_2 \dots p_n,$$

OU LES p_i sont des nombres premiers distincts de la forme

$$1 + 2^{2^m}$$

Pour $n = 7$, l'heptagone régulier n'est pas constructible,

Pour $n = 17$, le polygone régulier est constructible et une solution géométrique a été donnée par GAUSS.

Il faut remarquer que la condition " x est algébrique de degré 2^r " n'est pas suffisante pour la constructibilité : les racines de l'équation irréductible $X^4 - 2X + 2 = 0$, sont bien de degré 4 = 2^2 , mais ne sont pas constructibles à la règle et au compas, car le groupe de GALOIS de l'équation est le groupe symétrique S_4 d'ordre 24.

PRESENCE DE GALOIS

LA THEORIE DE GALOIS EST ENCORE ENSEIGNEE MAINTENANT, NON SEULEMENT A CAUSE DE LA RICHESSE DES STRUCTURES d'ALGEBRE QU'ELLE MET EN OEUVRE, MAIS AUSSI A CAUSE DES APPLICATIONS QU'ELLE A DANS CERTAINES BRANCHES.

LA THEORIE DES NOMBRES en est une qui, avec KUMMER et DEDEKIND, a introduit la notion d'idéal à la fin du siècle dernier ; elle occupe encore actuellement, avec des problèmes anciens ou modernes, un grand nombre de mathématiciens actifs de tous âges. Eh bien, tous les traités classiques sur les nombres algébriques sont obligés de faire intervenir la théorie de GALOIS dans plusieurs chapitres.

Citons :

- P. SAMUEL - Théorie Algébrique des Nombres (1964) Chap. VI : Extensions Galoisiennes des corps de Nombres.

- P. RIBENBOIM - Algebraic Numbers (1972) Chapitre 11 : The Ramification of Prime Ideals in Galois Extensions - Chap. 12 : The Fundamental Theorem of Abelian Extensions.

(Une extension abélienne est une extension finie galoisienne dont le groupe de GALOIS est abélien.)

LA THEORIE DE GALOIS POUR LES EXTENSIONS DE DEGRE INFINI est une généralisation au cas où l'extension K du corps de base k est de dimension infinie. Elle a été introduite par W. KRULL qui définit le groupe de GALOIS d'une telle extension en utilisant des procédés topologiques, et elle a été appliquée fructueusement à des problèmes d'Algèbre (P. RIBENBOIM : l'Arithmétique des Corps, 1972, Chap. VI, VII, VIII).

LA THEORIE DE GALOIS POUR LES CORPS NON COMMUTATIFS est relative à une extension non commutative K du corps k . Les idées du cas commutatif y sont utiles et fournissent des résultats intéressants (B.L. VAN DER WAERDEN : Algebra, Vol. 2).

Plus récemment, des travaux russes, américains, français, etc... considèrent des anneaux A , non commutatifs, munis d'un groupe fini G d'automorphismes, et le sous-anneau des invariants par G , et ils en déduisent des propriétés de l'anneau A lui-même.

UNE THEORIE DE GALOIS ABSTRAITE a été développée par plusieurs auteurs, en particulier M. KRASNER qui en a fait le sujet de son cours de 3ème Cycle à PARIS VI, ces dernières années. Elle consiste à considérer des correspondances (galoisiennes) entre des ensembles, qui généralisent la correspondance entre les sous-corps et les sous-groupes dans la théorie de GALOIS classique.

UNE THEORIE DE GALOIS POUR LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES "semble avoir suscité un nouvel intérêt ces dernières années" dit J. BASS, dans la Jaune et la Rouge, Publication de l'Ecole Polytechnique, n° 376, 1982.

Dans cette théorie, on associe un "groupe de GALOIS" à l'équation différentielle, groupe dont les propriétés traduisent certaines propriétés de l'équation.

(cf. par exemple : C. POMMARET : Galois Theory of differential equations, à paraître aux éditions GORDON and BREACH).

Comme on le voit, GALOIS est toujours vivant par son oeuvre dans l'Univers des Mathématiciens, et cela explique la chaleur de l'hommage qui lui est rendu dans de nombreuses Universités du monde entier à l'occasion du 150ème Anniversaire de sa mort. Cet intérêt va aussi à sa personne dont la courte vie a été marquée par un destin exceptionnel. Les historiens des Sciences et les autres n'ont pas encore fini d'en analyser tous les détails, et, tout récemment encore, un article documenté et passionné que toute l'Américaine Mathématique a lu, vient de lui être consacré par T. ROTHMAN dans le Bulletin de l'American Mathematical Monthly, Febr. 1982. Cet article a été traduit en Français dans le numéro de Juillet 1982 de la Revue "POUR LA SCIENCE".

Excursion mathématique

Jean BRETTE - Paris

L'auteur travaille au Palais de la Découverte, et nos lecteurs connaissent sans doute ses articles qu'on retrouve régulièrement dans la Revue du Palais. Il a accepté d'emmener les lecteurs du PLOT dans cette excursion originale où l'on découvrira bien des beaux sommets.

Faire des mathématiques consiste, essentiellement, à se poser des problèmes et, si possible, à les résoudre. Chaque pas en avant suscite de nouvelles questions, nécessitant quelquefois de nouveaux outils pour surmonter l'obstacle.

Cette démarche s'apparente un peu à l'excursion en montagne où, après une marche d'approche en terrain vallonné, les premiers contreforts vous obligent à remplacer vos baskets par des crampons et votre bâton de pèlerin par des pitons, quand ils ne vous obligent pas à faire demi-tour ou à aller chercher un professionnel !!!

Bref, j'ai un faible pour les problèmes à retombées multiples qui conduisent de l'école primaire à la recherche. En voici un, qui se présente initialement comme une récréation anodine.

☆☆☆

Soit quatre entiers a, b, c, d positifs ou nuls, et S la transformation qui fait correspondre au quadruplet $(a, b, c, d) = q$ le quadruplet $q' = (|a-b|, |b-c|, |c-d|, |d-a|)$.

On constate, sur quelques exemples, qu'il existe apparemment, pour chaque quadruplet q , un entier $n(q)$ tel que :

$$S^{n-1}(q) \neq (0,0,0,0) \text{ et}$$

$$S^n(q) = (0,0,0,0)$$

Exemples :

q	4	2	1	0
$S(q)$	4	2	1	1
S^2	2	1	0	3
S^3	1	1	1	3
S^4	0	0	2	2
S^5	2	0	2	0
S^6	2	2	2	2
S^7	0	0	0	0

q	13	7	5	1
$S(q)$	12	6	2	4
S^2	6	4	2	8
S^3	2	2	2	6
S^4	0	0	4	4
S^5	4	0	4	0
S^6	4	4	4	4
S^7	0	0	0	0

Dans ces deux cas $S^7(q) = (0,0,0,0)$.

(Pour la commodité de l'écriture, on a effectué quelques permutations circulaires qui ne changent évidemment rien au problème).

D'où la première question :

Question 1 : Est-ce que c'est vrai pour tout quadruplet q d'entiers ?

Réponse : OUI

Preuve :

a) Puisqu'on effectue des différen-

ces, chaque élément d'une ligne est inférieur ou égal au plus grand de la ligne précédente.

b) Considérons le même problème modulo 2. A une permutation circulaire ou une symétrie près, le quadruplet de départ q devient, modulo 2, l'un des suivants :

(1000) ; (1100) ; (1010) ;
(1110) ; (1111) ; (0000).

Considérons, dans F_2^4 la "descendance" de $q = (1, 0, 0, 0)$.

q	1	0	0	0	
$S(q)$	1	1	0	0	
S^2		0	1	0	1
S^3	1	1	1	1	
S^4		0	0	0	0

Tous les quadruplets mentionnés plus haut sont présents, à l'exception de (1,1,1,0) qui donne $S(q) = (1,1,0,0)$ et conduit donc également à (0,0,0,0).

Revenons maintenant aux quadruplets de N^4 . On a obtenu le résultat suivant :

Tout quadruplet q conduit à un quadruplet q' dont chaque terme est pair en quatre itérations au plus. On peut donc diviser chaque terme de q' par 2, ce qui ne modifie pas la longueur de la descendance, et on obtient alors un quadruplet q'' dont les termes sont strictement inférieurs au plus grand de q' , et a fortiori du plus grand de q .

Si l'on s'en tient aux plus grands éléments des quadruplets analogues à q'' , c'est-à-dire après division par 2, on a donc une suite d'entiers positifs ou nuls strictement décroissante, elle est donc finie.

* * * * *

D'où la :

Question 2 : Cette propriété est-elle vraie pour un k -uplet, k -quelconque > 0 ?

Réponse : NON !

Preuve : Un contre-exemple

1	0	0
1	1	0
	0	1
1	1	0

etc...

On peut alors se poser la :

Question 3 : Quelles sont les valeurs de k telles que tout k -uplet conduise, en un nombre fini d'itérations, au k -uplet nul (0,0,0,...,0) ?

Réponse : $k = 2^j$

Preuve : Elle est due à Robert MILLER (*) et est tout à fait analogue à celle utilisée plus haut dans le cas $k = 4$.

Considérons le k -uplet $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k)$ et le k -uplet de F_2^k associé : $(b_1, b_2, b_3, \dots, b_k)$ avec $b_i = a_i \pmod{2}$. La transformation S (de N^k dans N^k) devient, dans F_2^k ,

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui est linéaire et dont le polynôme caractéristique est :

$$p(T) = (\lambda + 1)^k + 1$$

(*) MILLER R. A game with n numbers American Mathematical Monthly, March 1978, pp 184-185.

Si, pour tout $q \in \mathbb{N}^k$, il existe un $n(q)$ tel que $S^n(q) = (0, 0, \dots, 0)$, alors on a aussi, dans \mathbb{F}_2^K , $T^n(b_1, \dots, b_k) = (0, 0, \dots, 0)$ et, par conséquent T est nilpotente.

On doit donc avoir

$$(\lambda + 1)^k + 1 = \lambda^k \pmod{2} \quad (1)$$

Supposons alors que $k = 2^j \cdot m$ avec m impair. Alors (1) s'écrit :

$$((\lambda + 1)^{2^j})^m \equiv \lambda^{2^j \cdot m} \pmod{2} \text{ ou encore}$$

$$(\lambda^{2^j} + 1)^m \equiv \lambda^{2^j \cdot m} \pmod{2}$$

Supposons que $m > 1$. Alors, à gauche, le coefficient de $\lambda^{2^j \cdot (m-1)}$

est $\binom{m}{1} = m \equiv 1 \pmod{2}$. A droite, il est nul. On doit donc avoir, pour que T soit nilpotente : $m=1$.

Réciproquement, si $k=2^j$ alors le polynôme caractéristique de T

$$\text{est } p(T) = (\lambda + 1)^{2^j} + 1 = \lambda^{2^j} + 1 + 1 =$$

$\lambda^{2^j} \pmod{2}$. Les valeurs propres de T sont donc nulles et T est nilpotente.

Revenons à S . On vient de démontrer que $S(q)$ conduit, en un nombre fini d'itérations, à un k -uplet dont chaque terme est pair. En divisant par 2 on obtient un k -uplet dont chaque terme est strictement inférieur au plus grand terme de l'itération précédente, et on achève la démonstration comme pour $k = 4$.

Note : On vient de démontrer que : si tout k -uplet s'annule en un nombre fini d'itérations alors

$k = 2^j$. Cela ne signifie pas que pour un k donné, il n'existe aucun k -uplet non réduit à (a, a, \dots, a) et s'annulant en n itérations.

En effet, soit $k = 2^j \cdot m$ (m impair) et considérons le k -uplet obtenu en juxtaposant

2^j -uplets identiques. Il est clair que si le 2^j -uplet s'annule en n itérations, alors le k -uplet considéré aussi.

Exemple : le 4-uplet $(4, 2, 1, 0)$ s'annule en 7 itérations ; il en est de même pour tous les $4 \times k$ -uplets de la forme

$$(4 \ 2 \ 1 \ 0 ; 4 \ 2 \ 1 \ 0 \dots 4 \ 2 \ 1 \ 0)$$

1 2 ... k
comme on le vérifie aisément.

* * * * *

Revenons aux quadruplets. Nous venons de voir que tout quadruplet q s'annule en $n(q)$ itérations. Mais :

Question 4 : Est-ce que, pour tout n , il existe $q \in \mathbb{N}^4$ tel que

$$S^{n-1}(q) \neq (0, 0, 0, 0) \text{ et}$$

$$S^n(q) = (0, 0, 0, 0) ?$$

Réponse : OUI

Preuve : Nous allons construire $q(n)$ par récurrence.

Commençons par quelques remarques évidentes :

a) les quadruplets q et λq ont des descendance de même longueur. En effet

$$S^k(\lambda q) = \lambda S^k(q).$$

b) Soit $q = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ un quadruplet et $a = \min_i(a_i)$

Alors les descendance de q et de $q' = (a_1 - a, a_2 - a, a_3 - a, a_4 - a)$ ont la même longueur. En effet, les différences entre deux termes consécutifs sont les mêmes :

$$a_i - a_{i+1} = a_i - a - (a_{i+1} - a).$$

On peut donc supposer que q est de la forme

$(a_1, a_2, a_3, 0)$ à une permutation circulaire près ou, pour éviter trop d'indices $(a, b, c, 0)$.

c) Le quadruplet $(1, 0, 0, 0)$ qui s'annule en 4 itérations et que l'on notera q_4 , vérifie

$$a_4 > b_4 + c_4.$$

Connaissant $q_{n-1} = (a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}, 0)$ s'annulant en $(n-1)$ itérations et vérifiant $a_{n-1} > b_{n-1} + c_{n-1}$, on se propose de trouver $q_n = (a_n, b_n, c_n, 0)$ avec $a_n > b_n + c_n$, ce qui nous permettra d'itérer.

Puisque q_{n-1} s'annule en $n-1$ itérations, il en est de même du quadruplet

$$q'_{n-1} = q + (d, d, d, d) = (a_{n-1} + d, b_{n-1} + d, c_{n-1} + d, d) \text{ avec } d \geq 0.$$

Le quadruplet $q_n = (b_{n-1} + c_{n-1} + 3d, c_{n-1} + 2d, d, 0)$ s'annule alors en n itérations pour un d convenablement choisi.

En effet, $S(q_n) = (b_{n-1} + c_{n-1} + 3d, b_{n-1} + d, c_{n-1} + d, d)$ est égal à q'_{n-1} si $b_{n-1} + c_{n-1} + 3d = a_{n-1} + d$ c'est-à-dire

$$d = (a_{n-1} - b_{n-1} - c_{n-1}) / 2$$

On vérifie que d est bien positif puisque $a_{n-1} > b_{n-1} + c_{n-1}$ par ailleurs on a bien $b_{n-1} + c_{n-1} + 3d > c_{n-1} + 2d + d$

On pourrait donc prendre

$$a_n = (3a_{n-1} - b_{n-1} - c_{n-1}) / 2$$

$$b_n = a_{n-1} - b_{n-1}$$

$$c_n = (a_{n-1} - b_{n-1} - c_{n-1}) / 2$$

ou encore, pour s'assurer de rester dans N :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{pmatrix}$$

quitte à diviser q_n par 2 quand a_n, b_n et c_n sont pairs, ce qui se produit pour $n = 0$ ou 1 modulo 3.

Le tableau ci-contre donne q_n pour $n \leq 20$.

Arrivés à ce point, on peut se poser de nouvelles questions. Par exemple, la suivante :

Question 5 : puisque q et λq possèdent des descendance de même longueur, tout ce qui est vrai pour les quadruplets de N^4 l'est aussi pour les quadruplets de Q^4 ; il suffit de réduire au même dénominateur et de multiplier le quadruplet par celui-ci. Mais que se passe-t-il quand

$q \in \mathbb{R}^4$? par exemple si

$$q = (\pi, e, \sqrt{2}, 1) ?$$

Réponse : pour le quadruplet ci-dessus, $n(q) = 5$!!!

Voir la descendance de ce quadruplet dans l'encadré.

Il semble donc que le fait que q contienne des algébriques irrationnels ou même des transcendants ne change pas grand'chose. D'où la :

Question 7 : Existe-t-il des quadruplets $q \in \mathbb{R}^4$ qui ne s'annu-

n	a _n	b _n	c _n	0	n	a _n	b _n	c _n	0
2	1	0	1	0	12	37	17	6	0
3	1	1	0	0	13	44	20	7	0
4	1	0	0	0	14	105	48	17	0
5	3	2	1	0	15	125	57	20	0
6	3	1	0	0	16	149	68	24	0
7	4	2	1	0	17	355	162	57	0
8	9	4	1	0	18	423	193	68	0
9	11	5	2	0	19	504	230	81	0
10	13	6	2	0	20	1201	548	193	0
11	31	14	5	0					

Valeurs de $q_n = (a_n, b_n, c_n, 0)$ pour $2 \leq n \leq 20$

lent jamais ?

Réponse : OUI !

Preuve : Soit (a, b, c, d) un quadruplet. En soustrayant de chaque terme le plus petit d'entre eux (disons d), on se ramène à l'étude des quadruplets de la forme $(a', b', c', 0)$. En divisant chaque terme par le plus grand, on est ramené à l'étude de l'une des deux formes "normalisées" :

$(1, B, C, 0)$ et $(A, 1, C, 0)$
où A, B, C sont < 1 .

On appellera pôle une forme dont la descendance est de longueur infinie. Les formes du type $(A, 1, C, 0)$ ne comportent pas de pôles.

Preuve :

A	1	C	0
A	1-A	1-C	C
2A-1	C-A	1-2C	C-A
E	F	G	F
E-F	E-F	F-G	F-G
0	H	0	H
H	H	H	H
0	0	0	0

On a posé :

$$E = |2A-1|; F = |C-A|; G = |1-2C|$$

Il existe au moins un pôle de type $(1, B, C, 0)$.

π	e	$\sqrt{2}$	1	$\pi-1$
$e-1$	$2e-\pi-\sqrt{2}$	$e+1-2\sqrt{2}$	$\pi-\sqrt{2}$	$\pi-\sqrt{2} \rightarrow e+1$
$-e+\pi+\sqrt{2}-1$	$\pi+1-e-\sqrt{2}$	$-e-1+\sqrt{2}+\pi$	$\pi-\sqrt{2}$	$\rightarrow e+1$
δ	δ	δ	δ	δ
0	0	0	0	0

Descendance du quadruplet $(\pi, e, \sqrt{2}, 1)$

Preuve : 1 B C 0
 1 1-B B-C C

Supposons $C < B-C < 1-B < 1$
 en normalisant, on obtient :
 1-C 1-B-C B-2C 0
 puis 1 $\frac{1-B-C}{1-C}$ $\frac{B-2C}{1-C}$ 0
 qui est égal au quadruplet initial
 si $B = (1-B-C)/(1-C)$ et
 $C = (B-2C)/(1-C)$

ce qui donne $C^3 - 5C^2 + 7C - 1 = 0$
 (qui n'a qu'une racine réelle)
 et $B = 3C - C^2$
 d'où $C = .1607132447858389 \dots$
 et $B = .4563109873079236 \dots$

Nous reviendrons plus loin sur ce pôle. Pour l'instant :

Question 8 : Existe-t-il d'autres pôles dans le carré $[0,1] \times [0,1]$?

Réponse : OUI, \exists un nombre pair de pôles dans le carré.

Preuve :

a) si $p_1 = (1, B_1, C_1, 0)$ est un pôle, alors $p_2 = (1, 1-C_1, 1-B_1, 0)$ est aussi un pôle.

En effet, en une itération p_2 devient $(C_1, B_1 - C_1, 1 - B_1, 1)$ qui est précisément identique à $S(p_1)$ à l'ordre de lecture près.

Les pôles situés dans le carré unité sont donc symétriques 2 à 2 par rapport à la droite $B + C = 1$.

b) Il n'y a aucun pôle sur cette droite. En effet, les quadruplets correspondants ont pour descendance :

 1 B 1-B 0
 1 1-B (2B-1) 1-B
 B E E B

 O F O F
 F F F F
 0 0 0 0
 avec $E = ||1-B| - |2-B||$
 $F = |B - E|$

Je ne sais pas, aujourd'hui, démontrer proprement qu'il n'y a pas d'autres pôles que les deux précédents, $P_1 = (1, 0.456\dots, 0.160\dots, 0)$ et son symétrique P_2 .

J'en suis pourtant persuadé, comme en témoigne la cartographie ci-jointe, obtenue expérimentalement à l'aide d'un ordinateur. Les nombres mentionnés indiquent, pour chaque zone, la longueur de la descendance. Les frontières sont effectivement des segments de droites. Elles correspondent, en fait, aux différents changements de signes qui interviennent lors des itérations. La carte se complète par symétrie par rapport à $B + C = 1$.

On notera les situations extrêmement discontinues qui existent aux divers points d'intersection de ces droites ; par exemple au point $B = 1/2$ $C = 1/2$.

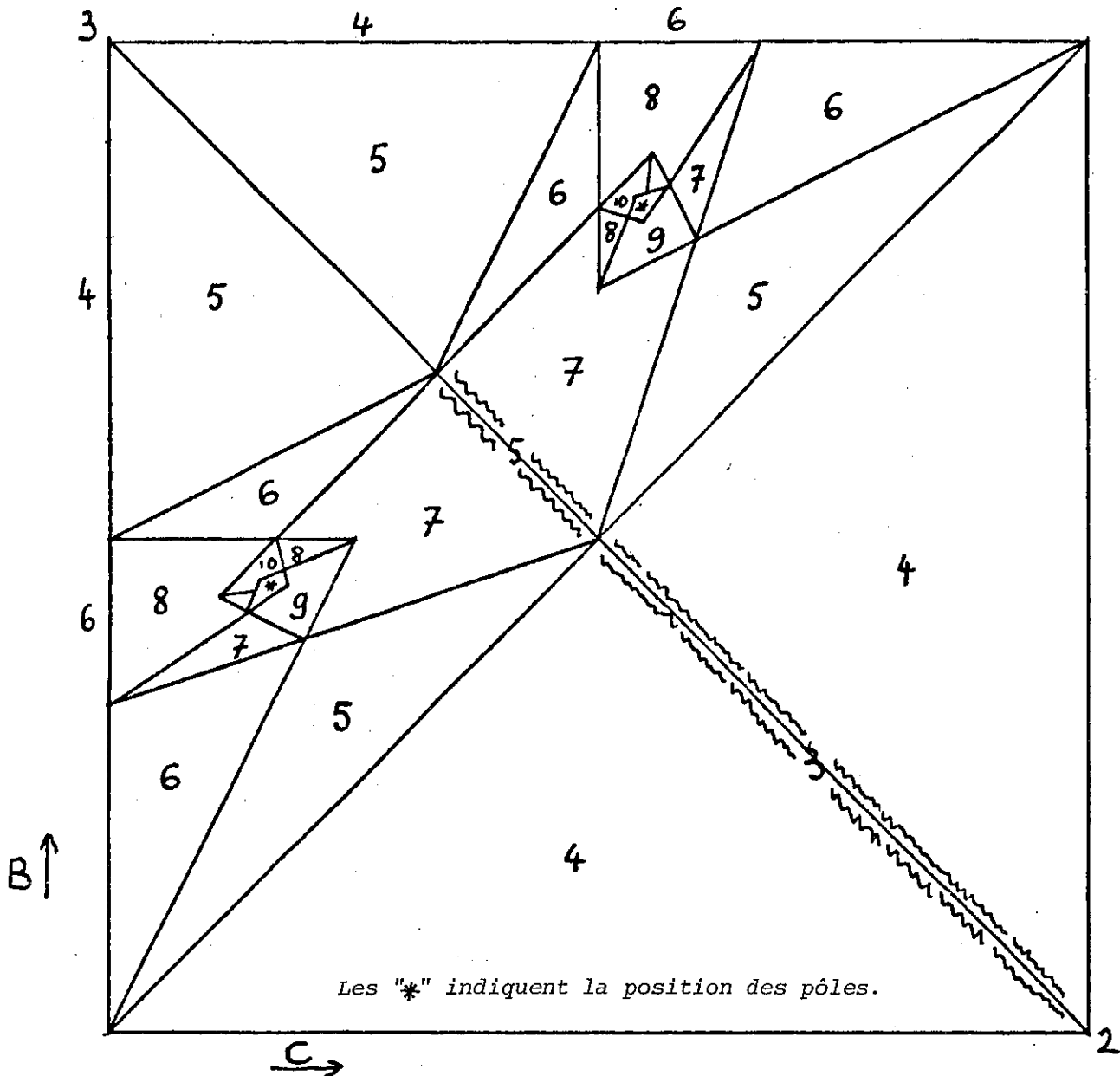
1	0.5	0.5	0	n = 3
1	0.51	0.49	0	n = 5
1	0.5	0.49	0	n = 7
1	0.49	0.5	0	n = 4

Les (quelques) frontières qui sont en traits ondulés représentent des bords "ouverts". La situation se reproduit évidemment le long de chaque frontière, mais cela nuirait à la lisibilité du dessin !

☆☆☆

T
 très bien, dira-t-on peut-être, l'excursion était jolie, mais où est la haute montagne ? J'y viens.

On peut, bien sûr, se poser



de multiples questions rattachées à ce problème. Pour passer d'un étage au suivant, nous avons pris la valeur absolue de la différence de deux termes consécutifs mais on peut, comme le fait FOOK-BUN-WONG, considérer d'autres fonctions, par exemple remplacer $|a - b|$ par $|\phi(a) - \phi(b)|$ où ϕ est l'indicateur d'Euler.

On peut aussi remarquer que le tableau de la page 14 fournit, accessoirement, de très bonnes approximations simultanées, par des fractions de même dénominateur, des nombres $B = 0,4563\dots$ et $C = 0,1607\dots$, fractions qui sont respectivement b_n / a_n et c_n / a_n .

Voici le problème :

Trouver un algorithme permettant d'approcher simultanément deux nombres réels quelconques par des fractions de même dénominateur p/r et q/r (pas nécessairement irréductibles mais telles que $p; q, r, n$ aient pas de facteurs communs).

En utilisant le principe des tiroirs de DIRICHLET, on peut montrer qu'il existe une infinité de telles fractions vérifiant :

$$|\alpha - \frac{p}{r_n}| \leq k r_n^{-3/2} \quad \text{et} \\ |\beta - \frac{q}{r_n}| \leq k r_n^{-3/2}$$

On souhaite aussi que les déterminants construits sur trois solutions consécutives p_i, q_i, r_i soient égaux à $+ ou - 1$. (On notera au passage que c'est bien le cas pour le tableau :

$$\begin{vmatrix} 9 & 4 & 1 \\ 11 & 5 & 2 \\ 13 & 6 & 2 \end{vmatrix} = -1 \text{ par exemple)}$$

On souhaite enfin, par analogie avec le développement en

fraction continue d'un irrationnel quadratique, que l'algorithme soit périodique lorsque les deux nombres à approcher appartiennent au même corps cubique. (On constatera que c'est également le cas pour le tableau 5).

JACOBI, et plus récemment DUBOIS (CAEN) ont proposé de tels algorithmes, mais on ne sait pas démontrer s'ils vérifient la troisième condition.

Alors, à vos crampons!!

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

B. FREEDMAN - The four number game (Scripta Mathematica 14, 1948). B. MILLER - A game with n numbers (American Math. Monthly 3, 1978). J. BRETTE - Encore des différences (Revue Palais de la Découverte 7 n°75, 1979). M. DUMONT & J. MEEUS - The four number game (Journ. of Recreational Math. 13 (2) 1978). FOOK BUN WONG - Ducci process (The Fibonacci quarterly 20 (2) 1982).

Mots Croisés

Michel Labrousse - Limoges

Horizontalement

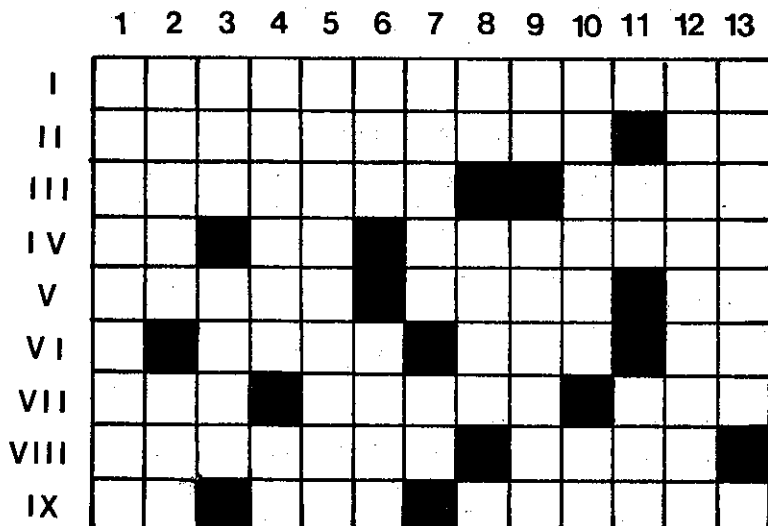
- I. 'Peut être sphérique.
- II. Dérivable au sens complexe - Grecque.
- III. Est dans un ensemble - Commence
- IV. Lettres de Boole - Initiales de Mac Laurin - Qualifie une structure ou une loi, parfois.
- V. Idéale - Ne fait plus partie du Royaume Uni - Soleil égyptien renversé.
- VI. Mena en justice - Plusieurs sont

souvent à envisager en mathématiques - Travaux pratiques.

- VII. Devenirait mol devant élève - Petit trait - La fin d'une partie.
- VIII. Peut suivre une série - Réflexion du son.
- IX. Saint - Tente - Font, peut être, un algorithme.

Verticalement

1. Se démontrent
2. Mathématicien français (1652-1719) - Possèdent.
3. L'Australie par exemple - Désire.
4. Remplacées par les effaceurs ! - Satellite de Jupiter.
5. Peuvent être de la patrie de Niels Abel
6. Refus - Mesure d'une surface
7. Ça pique ! - Note
8. Maths-Physique anciennement - Sur la côte d'azur.
9. Interjection - Inversé : a son billet
10. Mince - Précède aussi bien devant qu'après.
11. Paresseux - Ne se prend pas qu'à 5 heures.
12. Copie.
13. Muse de la musique.



Solution page 30

Sur la Géométrie de l'Espace

Michel DOFAL - Orléans

L'auteur, IPR de Maths, a exposé en Mars 83, lors des rencontres du Loiret sur les programmes de Première, une approche possible des programmes de géométrie en Première S et E. L'enseignement de la géométrie n'étant pas sans poser des problèmes dans le second cycle, nous lui avons demandé de rassembler ses propositions dans l'article qui suit.

L'objectif essentiel de cette présentation est de parvenir à un traitement économique (en temps) du programme de géométrie de l'espace en lère S, compte tenu de la faible familiarisation des élèves avec ce domaine en classe de seconde. Il est important de remarquer qu'une partie de cet exposé (tout ce qui concerne l'incidence) peut être adaptée pour le travail en classe de seconde sur cette question.

Plan de la démarche proposée :

0. Activités préliminaires de "préparation".
1. Incidence.

2. Vecteurs issus de l'espace E.
3. Extension à l'espace du "produit scalaire plan".
4. Orthogonalité dans E.
5. Orientation de l'espace.
6. Produit mixte.
7. Produit vectoriel.

Auxiliaire pédagogique utilisé :

(pour 1. et 2.) une série de transparents pour rétroprojecteurs reproduits sur une page ci-après. Chaque transparent à réaliser est répertorié par son numéro : ① ② ③ etc...



0. ACTIVITES PRELIMINAIRES DE "PREPARATION"

Ces activités sont à réaliser à la maison.

Le parallélépipède.

- 1) Construire (carton) deux parallélépipèdes P_1 et P'_1 dont les faces soient des parallélogrammes non rectangles et dont les arêtes mesurent 11 cm ; 6 cm ; 9 cm.
- 2) Découper un morceau de P_1 et le recoller à un endroit précis pour obtenir un nouveau parallélépipède P_2 ayant deux faces opposées rectangulaires.
- 3) Peut-on faire cette opération sur P_2 pour obtenir un parallélépipède P_3 ayant 4 faces rectangulaires ?
- 4) Réaliser enfin un parallélépipède P_4 ayant ses six faces rectangulaires en appliquant à nouveau - si possible - la même opération à P_3 .
- 5) Conclusions concernant le volume d'un parallélépipède quelconque ?

Objectifs :

1. réaliser effectivement un parallélépipède oblique (P'_1) aux fins d'observations ultérieures ;
2. "valider" physiquement (à la manière dont, en 5ème, par découpage, on valide la formule permettant d'obtenir la mesure de l'aire du parallélogramme) la formule permettant d'obtenir la mesure du volume

d'un parallélépipède quelconque (mesure d'une surface "de base" multipliée par "hauteur") (formule qui sera utilisée en 6.)

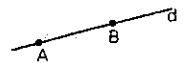
Représentation conventionnelle du parallélépipède

Afin de gagner du temps il serait bon que chaque élève puisse préparer une dizaine d'exemplaires (assez grand format) de la représentation du parallélépipède (donner des indications pour éviter certains alignements fortuits). D'autre part les noms des différents points qui interviennent seront mis en commun, sur le parallélépipède lui-même puis sur sa représentation.

I. INCIDENCE

Objectifs : Il s'agit d'arriver à la maîtrise des contenus minimaux explicités ci-après. (1)

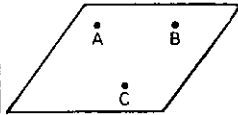
Règle 1 : Etant donné deux points distincts A et B dans l'espace, il y a une droite d et une seule contenant A et B ; on la désigne par (AB).



(1) Les règles que nous énonçons sont extraites du manuel de Seconde de l'IREM de Strasbourg (éd. Istra).

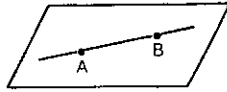
On dit aussi : deux points distincts A et B déterminent une droite. Plusieurs points sont dits alignés s'ils appartiennent à une même droite.

Règle 2 : Etant donné trois points A, B, C non alignés, il y a un plan et un seul, noté ABC, contenant ces trois points.

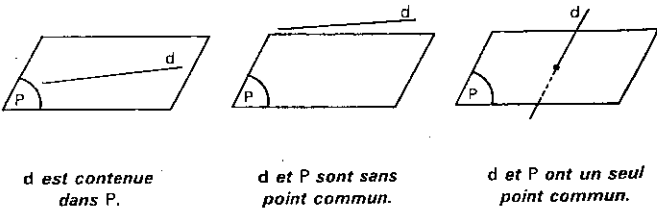


Des points A, B, C, D, ... appartenant à un même plan sont dits coplanaires.

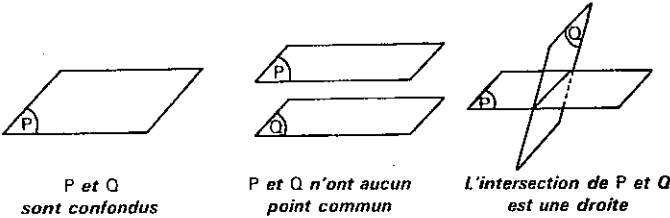
Règle 3 : Si A et B sont deux points distincts, la droite (AB) est contenue dans tous les plans passant par A et B.



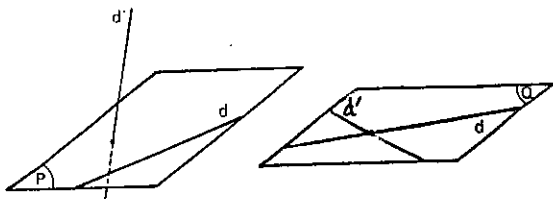
Règle 4 (Positions relatives d'une droite et d'un plan) :
Etant donné une droite d et un plan P dans l'espace, il y a trois possibilités :



Règle 5. (Positions relatives de deux plans) :
Etant donné deux plans P et Q dans l'espace, il y a trois possibilités :



Règle 6.
Etant donné deux droites d et d' de l'espace, il n'y a que deux possibilités.
a) Il n'existe aucun plan contenant à la fois d et d' (les droites sont dites NON-COPLANAIRES).
b) Il existe un plan contenant à la fois d et d' (les droites sont dites COPLANAIRES).



Règle 7 :
Quand une figure de l'espace est contenue dans un plan, on peut utiliser toutes les propriétés et tous les théorèmes de la géométrie euclidienne plane.

A. Droites parallèles

Définition :
d et d' sont parallèles (on note $d // d'$) signifie que

1. ELLES SONT COPLANAIRES et
2. ELLES SONT PARALLELES au sens du parallélisme dans un plan.

Propriété :

- 1) Si deux droites sont parallèles à une

même droite, elles sont parallèles entre elles.

- 2) Soit une droite d et un point A n'appartenant pas à d. Il y a une droite d' et une seule passant par A et parallèle à d.

B. Plans parallèles

Définition :
P et P' sont parallèles (on note $P // P'$) signifie que :
• ou bien $P = P'$
• ou bien P et P' sont disjoints ($P \cap P' = \emptyset$)

Propriétés :

- 1) Si deux plans sont parallèles à un même plan, ils sont parallèles entre eux.
- 2) Soit un plan P et un point A ; il y a un plan et un seul contenant A et parallèle à P.

C. Droites et plans parallèles.

Définition :

Soit d une droite, P un plan.
d est parallèle à P (on note $d // P$) signifie :
• ou bien d et P n'ont aucun point commun
• ou bien d est contenue dans P.

Théorème dP :

Une droite d est parallèle à un plan P si et seulement si elle est parallèle à une droite de P.

Théorème PP :

Deux plans sont parallèles si et seulement si l'un contient deux droites sécantes parallèles à l'autre.

Théorème dPQ :

Soit une droite et deux plans P et Q ; si d est parallèle à P et Q et si les plans P et Q sont sécants, alors la droite commune à P et Q est parallèle à d.

Règle 8 :

A tout couple de points A, B de l'espace est associé un nombre positif ou nul, appelé distance de A et B, noté AB. La distance a les propriétés suivantes :

- a) $AB = 0$ si et seulement si les points A et B sont confondus.
- b) Quels que soient les points A, B, C, on a $AC \leq AB + BC$ (inégalité triangulaire); l'égalité n'a lieu que si B appartient au segment [AC].
- c) Dans chaque plan de l'espace, la distance a toutes les propriétés de la distance du plan euclidien.

Commentaires et indications succinctes sur les démarches.

- R1 R2 R3 sont l'occasion de remettre en place un minimum de symbolisme ensembliste.

Projeter le transparent (1) et demander de citer des plans contenant (AB). Attention : aucune certitude concernant la coplanarité des points ABHE. Même question avec (KL) permet une certaine exploration : on peut projeter (1) + (4) puis (+) (4').

- R4 Il s'agit de faire décrire de tels exemples de configurations sur le parallélépipède en restant prudent encore (on utilisera le mot "plausible" et on préservera le futur (proche) qui permettra bientôt de raisonner) ainsi il est "plausible" que (AB) et (DCHE) sont sans point commun.

- R5 Projeter ① : question : quels rapports entre (AGC) et (IJM) ? ajouter ③
 Projeter ① + ② : quels rapports entre (KIL) et (IJM) ? ajouter ③ et laisser imaginer (AGE).

Remarque 1 : Il est "plausible" que (AFGB) et (EHCD) n'ont aucun point commun... nous aurons bientôt la possibilité de le démontrer. Essayer de faire conjecturer les situations respectives de (IJM) et (KLN) (projeter ① + ② + ③ + ④). Laisser en suspens.

Remarque 2 : Il est possible de démontrer maintenant que (AB) et (DCHE) sont sans point commun.

- R6. Droites parallèles A)
 Les propriétés 1) et 2) peuvent être démontrées en tenant compte de la règle 7. Peut-être conviendrait-il de réserver ces démonstrations pour les meilleurs et de permettre à tout le monde de mettre en oeuvre ces propriétés.
 Démontrer que DAGH sont coplanaires et autres quadruplets du même genre.
 Projeter ②. KLMJ sont-ils coplanaires ? Ajouter ③, penser à (AGE)
 Quelle est la nature de KLMJ ?
 Projeter ① + ② et faire faire des conjectures - (ILNJ) ? (IMNK) ?
 Projeter ① + ⑤ puis ② et faire résoudre tous les problèmes posés.

Droites et plans parallèles.

Les théorèmes dP et PP ont des démonstrations faciles et exemplaires (La formulation en SSI mérite d'être sérieusement décortiquée et ses 2 moments d'être posés).

Le théorème dPQ est très facile à démontrer. Ces théorèmes vont être des clés extrêmement puissantes permettant de résoudre certains problèmes en suspens :

- ainsi (AFGB) // (EHCD)
- ainsi (IJM) // (KLN) ;

faire conjecturer d'autres parallélismes de plans ; (KJML) // (AFGB) ?

La configuration extrêmement riche peut donner lieu - si on en a le temps - à des explorations supplémentaires.
 Projeter ① + ② + ③. Le point O (voir ⑤) est à l'intérieur de l'octaèdre ② le point B à l'extérieur - d'où le problème posé en traçant (OB). Quelle est la trace de (OB) sur la facette (LJM) ? Il est assez facile de montrer qu'il s'agit du centre de gravité du triangle IJM. Si on réalise les mêmes traces sur les autres facettes on fait ressurgir un nouveau parallélépipède homothétique du parallélépipède de départ dans une homothétie de centre O et dont vous déterminerez le rapport.

II. VECTEURS ISSUS DE L'ESPACE

Remarque 1.

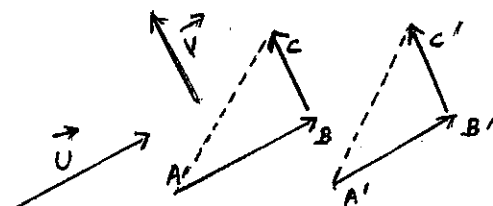
Dans la partie précédente les élèves ont pu à certains moments être tentés d'utiliser des propriétés "évidentes" de vecteurs. Il serait maladroit de refuser toute argumentation de ce genre sous prétexte qu'on n'en a pas encore parlé. Par contre il faut inciter à la réflexion quant aux manipulations que l'on peut être tenté de faire et essayer de faire prendre conscience du problème de leur légitimité.

L'un de ceux-ci réside dans la légitimité de la transitivité de l'égalité vectorielle. Mis sous la forme $\vec{DA} = \vec{EF}$ et $\vec{EF} = \vec{HG}$ il est hors de doute que peu d'élèves se poseront des questions sur la possibilité de conclure à $\vec{DA} = \vec{HG}$. Aussi faudrait-il poser le problème différemment.

DAFE est un parallélogramme, EFGH est un parallélogramme. Que dire de AGHD ? La question a pu être résolue lorsqu'on s'est préoccupé de coplanarité des points AGHD (ce qui n'était pas évident) (DA)//(HG) et $\vec{DA} = \vec{HG}$ peuvent conduire à une solution ; (DA)//(HG) puis (AG)//(DH) comme sections par le plan (AGHD) des plans parallèles (AFGB) et (DEHC) conduisent à une autre solution ; enfin projeter ① + ④ + ④' en suggère une autre uniquement axée sur les milieux communs à certains bipoins.

On rappellera donc la définition d'un vecteur. V_3 désignera l'ensemble des vecteurs issus de E.

L'addition vectorielle exige toujours pour sa définition correcte de résoudre le problème d'indépendance vis à vis des représentants choisis. Pour le bien faire sentir, envoyer deux élèves au tableau qui dessinent chacun leurs représentants.

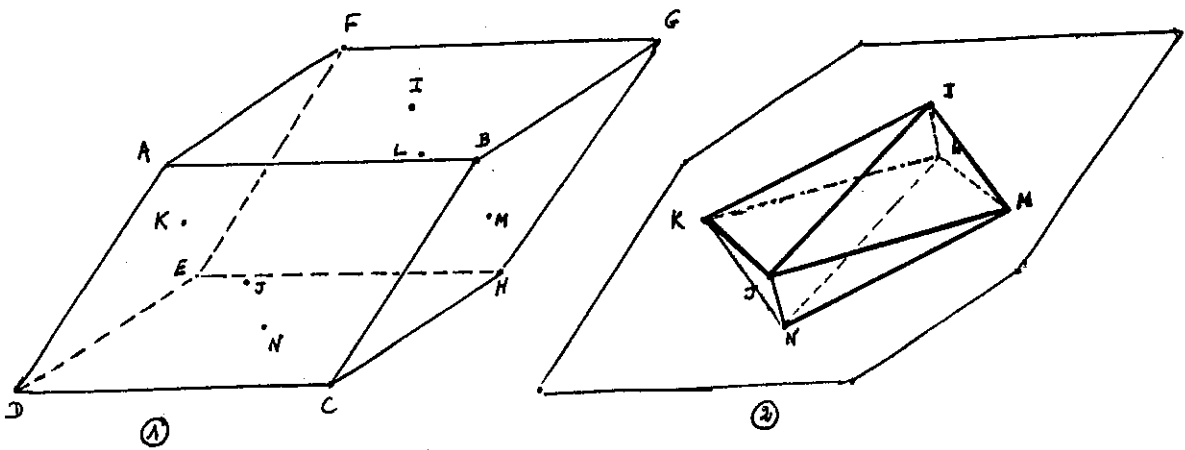


(Ce problème est exactement celui qui se posait précédemment).

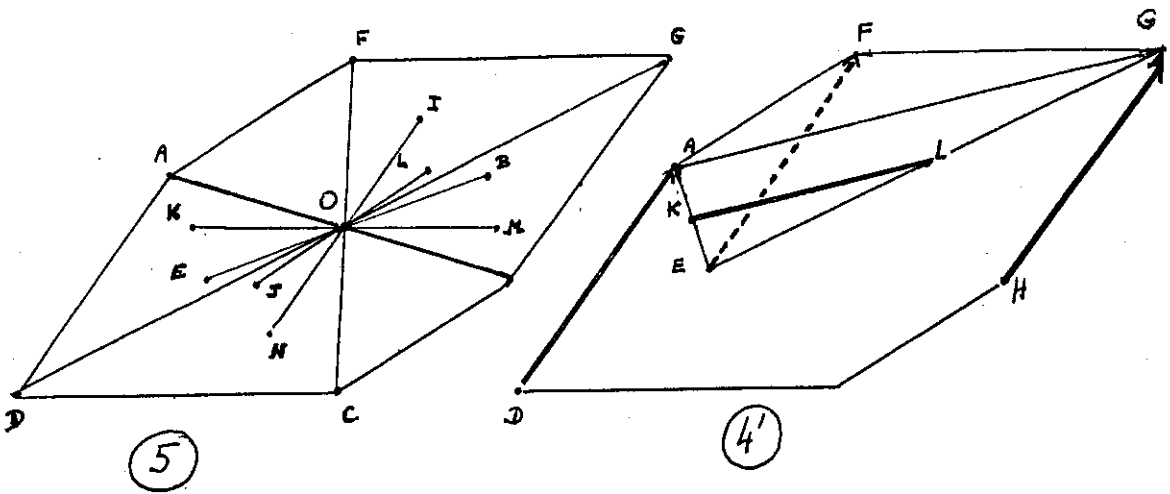
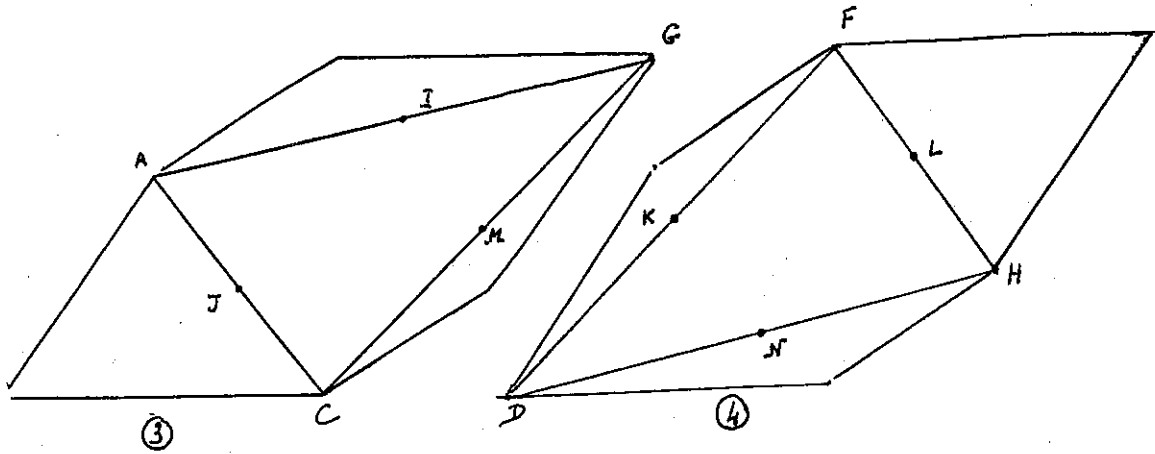
- . On mettra en évidence rapidement ses propriétés.
- . Et on fera observer que (projection de ①) si $\vec{u} = \vec{DC}$, $\vec{v} = \vec{DE}$, $\vec{w} = \vec{DA}$ alors $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{DG}$

La loi externe mérite d'être reconstruite avec soin car l'expérience montre que les élèves en possèdent assez mal la signification (même s'ils connaissent déjà le fonctionnement des formalismes) ce qui est nuisible à une bonne compréhension de la colinéarité.

- . On illustrera les 4 propriétés fondamentales de cette loi.



I J K L M N sont les centres des faces



Les figures à reproduire sur transparents (Plusieurs des traits peuvent être tracés en couleur pour améliorer la lecture).

Un bon exercice de synthèse : retrouver le résultat suggéré à la fin de (I) :

$$(OB) \cap (IJM) = \{?\}$$

par le calcul vectoriel. (Introduire B' isobarycentre de AGC. On arrive ainsi à $3\vec{BB}' = \vec{BE}$)

On fera observer la similarité de comportement des vecteurs issus d'une droite, d'un plan, de l'espace, eu égard aux opérations qui les concernent, ce qui légitimera de classer ces trois situations sous le mot générique d'espace vectoriel.

Il est rappelé qu'aucune étude sur la structure générale d'espace vectoriel n'est au programme.

Caractérisation des droites et plans de l'espace à l'aide des vecteurs (nécessaire en vue de IV).

Elle se fait à l'aide de problèmes.

- Problème 1.

\vec{u} est un vecteur non nul, A est un point de E ; quel est l'ensemble des points M de E tels qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ satisfaisant à $\vec{AM} = \lambda \vec{u}$?

- Problème 2.

(\vec{u}, \vec{v}) est un couple de vecteur non colinéaires, A un point de E ; quel est l'ensemble des points P de E pour lesquels il existe au moins un couple (x, y) de réels satisfaisant à $\vec{AP} = x \vec{u} + y \vec{v}$?

Bases de V_3

Vecteurs non coplanaires : $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un triplet de vecteurs non coplanaires si et seulement si les points OIJK tels que $O\vec{I} = \vec{i}$, $O\vec{J} = \vec{j}$, $O\vec{K} = \vec{k}$ sont les sommets d'un véritable tétraèdre (indépendance des représentants choisis).

- Montrer alors que pour tout triplet (a, b, c) de réels $(a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} = \vec{0}) \Rightarrow (a = 0 \text{ et } b = 0 \text{ et } c = 0)$

- Il est alors facile de réaliser tout vecteur \vec{v} comme combinaison linéaire de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, l'unicité des coefficients résultant du résultat précédent.

Retour sur le problème 2 et le problème 1. Interprétation en termes de bases - d'espaces vectoriels associés.

III. EXTENSION DU PRODUIT SCALAIRE A L'ESPACE

Les actes de foi qui ont été posés (en particulier règle 7 et suivantes) permettent de se trouver dans de bonnes conditions de sécurité.

Soit (\vec{u}, \vec{v}) un couple quelconque de vecteurs. A B C tels que $\vec{AB} = \vec{u}$; $\vec{AC} = \vec{v}$. Il existe au moins un plan contenant A B C. On pose $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{AB} \cdot \vec{AC}$ (ce qui ramène à la définition du produit scalaire plan). On peut objecter que si l'on choisit A' B' C' dans un autre plan il y a doute sur l'égalité $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{A'B'} \cdot \vec{A'C'}$ (c'est la structure métrique de

chaque plan qui est sollicitée... beaucoup d'élèves ne sentiront pas cela et se contenteront de l'apparence formelle $\vec{AB} = \vec{A'B'}$,

$\vec{AC} = \vec{A'C'}$ donc $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{A'B'} \cdot \vec{A'C'}$). Aussi, pour ceux qui veulent approfondir cette question, il est toujours possible d'avoir recours à la distance dans E. Ainsi :

$2 \vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB^2 + AC^2 - BC^2$ de même avec des "primes" ; comme $AB = A'B'$ $AC = A'C'$ et $BC = B'C'$ il en résulte $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{A'B'} \cdot \vec{A'C'}$.

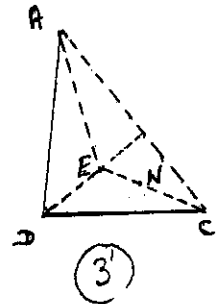
La seule difficulté d'ordre théorique à subsister est relative à la formule $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$. Deux options sont possibles :

1. demander aux élèves de l'admettre.
2. en dirigeant une démonstration qui nécessite de mobiliser quelques connaissances acquises dans le cadre d'exercices de révision sur le produit scalaire plan.

En particulier :

- a) la formule déjà citée $2 \vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB^2 + AC^2 - BC^2$
- b) le théorème de la médiane.

Projeter (1) (+) (3') ci-contre



$\vec{u} = \vec{DA}$, $\vec{v} = \vec{DE}$, $\vec{w} = \vec{DC}$ ($\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ étant donnés non coplanaires).

- sinon la propriété est évidente : c'est une propriété du produit scalaire plan - déterminent un parallépipède analogue à celui que l'on projette. On aura donc les égalités :

$$\begin{aligned} 2 \vec{u} \cdot \vec{v} &= DA^2 + DE^2 - AE^2 \\ 2 \vec{u} \cdot \vec{w} &= DA^2 + DC^2 - AC^2 \end{aligned}$$

d'où $2\vec{u} \cdot \vec{v} + 2\vec{u} \cdot \vec{w} = 2 DA^2 + DE^2 + DC^2 - (AE^2 + AC^2)$
or : $DE^2 + DC^2 = 2 DN^2 + \frac{EC^2}{2}$ (th. médiane à DFC)

et $AE^2 + AC^2 = 2 AN^2 + \frac{EC^2}{2}$ (th. médiane à AEC)

ainsi : $2 \vec{u} \cdot \vec{v} + 2 \vec{u} \cdot \vec{w} = 2 DA^2 + 2 AN^2 = 2(DA^2 + DN^2 - AN^2)$

$$\begin{aligned} 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + 2 \vec{u} \cdot \vec{w} &= 2(2 \vec{DA} \cdot \vec{DN}) = 2 \vec{DA} \cdot \vec{DH} = \\ &= 2 \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) \end{aligned}$$

On est maintenant en mesure de travailler confortablement l'orthogonalité dans E.

IV. ORTHOGONALITE DANS E

Définitions

1) $D \perp D'$ ssi $\vec{u} \cdot \vec{u}' = 0$

Conséquences : Tout vecteur dirigeant l'une est orthogonal à tout vecteur dirigeant l'autre.

2) $D \perp P(\vec{v}, \vec{w})$ ssi $(\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \text{ et } \vec{u} \cdot \vec{w} = 0)$

Conséquences :

1. Tout vecteur dirigeant D est orthogonal à tout vecteur issu de P.
2. Théorème. Pour qu'une droite soit orthogonale à un plan il faut et il suffit qu'elle soit orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Il est alors facile de démontrer :

1. L'unicité de la droite passant par un point et orthogonale à un plan.
2. L'unicité du plan passant par un point et orthogonal à une droite.
3. Les deux triptyques :

$$\begin{array}{l} d // d' \\ d \perp P \text{ et } d' \perp P \end{array} ; \begin{array}{l} P // P' \\ P \perp d \text{ et } P' \perp d \end{array}$$

dans lesquels deux des énoncés permettent d'inférer le troisième.

- On peut alors introduire les projections orthogonales.
- Puis réinterpréter \vec{u}, \vec{v} par \vec{OA}, \vec{OH} (en faisant jouer une projection orthogonale sur une droite).

V. ORIENTATION DE L'ESPACE

Il ne peut être question de fonder, au plan mathématique, la notion d'orientation de l'espace en classe de première.

L'idée est donc de partir de la présentation physique de la notion ("bonhomme d'Ampère" ou autre procédure) afin d'explicitier un minimum de propriétés opératoires qui permettront de résoudre les problèmes d'orientation de bases sans avoir recours en permanence à la procédure physique.

Il est particulièrement utile de faire admettre les 4 assertions suivantes (en les rendant plausibles aux yeux des élèves).

- 0₁ : les trièdres (ou repères) de l'espace se répartissent en deux classes. Deux repères d'une même classe seront réputés "avoir même orientation". Orienter l'espace c'est privilégier arbitrairement l'une des classes: ses éléments seront dits repères directs (ceux de la classe complémentaire seront dits indirects) de E.
- 0₂ : Pour tout bipoint (o, o') et toute base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de V_3 (o ; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) et (o' ; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) ont même orientation. Ce qui permet de fonder l'orientation de V_3 .

La notion d'indicatrice d'orientation peut fournir un langage commode pour la suite. Posons :

$$\begin{aligned} \epsilon(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= 1 \text{ si } (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \text{ est directe} \\ \epsilon(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= -1 \text{ si } (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \text{ est indirecte.} \end{aligned}$$

(ϵ n'est définie que sur les bases de V_3).

Il s'agit de faire admettre que pour toute base de V_3 :

$$0_3 : \epsilon(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -\epsilon(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) \text{ et que plus}$$

généralement, ϵ change de signe par transposition de deux vecteurs quelconques de base.

0₄ : Soit Π un plan dont (O,A,B) est un repère quelconque :

- Pour tout couple (C, C') de points situés de part et d'autre de Π . alors $\epsilon(\vec{OC}, \vec{OA}, \vec{OB}) = -\epsilon(\vec{OC}', \vec{OA}, \vec{OB})$.
- Pour tout couple (C, C') de points d'un même demi-espace alors $\epsilon(\vec{OC}, \vec{OA}, \vec{OB}) = \epsilon(\vec{OC}', \vec{OA}, \vec{OB})$.

Ces règles devraient permettre d'argumenter de tout problème courant posé par l'orientation de l'espace en 1ère, en attendant d'avoir à sa disposition un outil plus synthétique et performant.

Exemple : Comment orienter un plan Π de l'espace de manière cohérente avec une orientation choisie dans E ?

Soit (O,I,J,K) un repère de E tel que (O,I,J) soit un repère de Π parmi les bases $(\vec{OI}, \vec{OJ}, \vec{OK})$ et $(\vec{OJ}, \vec{OI}, \vec{OK})$ une seule est directe. Par convention on dira que Π est orienté de manière cohérente avec l'orientation choisie dans E si et seulement si on choisit pour orienter V_Π la base $B \in \{(\vec{OI}, \vec{OJ}), (\vec{OJ}, \vec{OI})\}$ telle que (B, \vec{OK}) soit directe.

Ce choix ne dépend que du demi-espace dans lequel est choisi le point K. Il est alors facile de justifier par 0₄ que le choix de K dans l'autre demi-espace conduit à choisir pour nouvelle base orientant V_Π de manière cohérente, le couple transposé de celui définissant B. Ainsi le choix d'un vecteur n'appartenant pas V_Π induit par la convention de cohérence une orientation de V_Π . (Dans les cas courants on choisira même \vec{OK} normé et orthogonal à V_Π).

VI. PRODUIT MIXTE DANS V_3 ORIENTE

Définition :

Soit $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \in (V_3)^3$.

- Si $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est une base de V_3 on pose

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \epsilon(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \times V(P)$$

- ϵ est l'indicatrice d'orientation
- V(P) est le volume du parallélépipède déterminé par $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

- Si $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ n'est pas une base de V_3

($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sont alors coplanaires)

- le parallélépipède P est aplati : $V(P) = 0$
- ϵ n'a pas d'existence. Nous poserons néanmoins $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$

Nous définissons ainsi une application de source $(V_3)^3$ et à valeurs réelles.

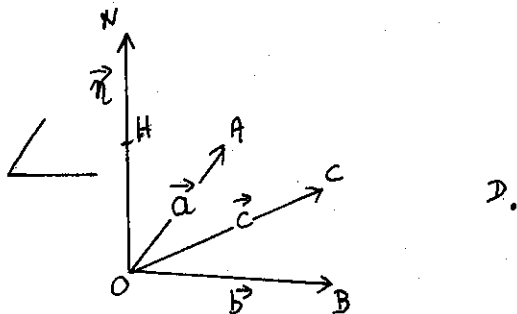
Le caractère alterné de cette application est immédiat : P est "le même", quant à ϵ elle est notoirement alternée (voir V) l'élément essentiel ici est l'existence in-

trinsèque de $V(P)$... qu'il serait sans doute peu adroit de remettre en cause.

C'est maintenant que l'on va recueillir les fruits des activités préliminaires décrites au début de cet article.

Interprétation.

1) Dans le cas où $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est une base de V_3



- Soit $O \in E$, $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$
- Soit D tel que $\vec{OD} = \vec{b}$
- S mesure l'aire du parallélogramme $OCDB$
- Soit $\vec{n} = \vec{OH}$ le vecteur unitaire normal au plan (b, c) tel que $(\vec{n}, \vec{b}, \vec{c})$ soit directe (V, exemple) \vec{n} dirige l'axe (O, \vec{n}) .

Si $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ directe alors A et N sont dans le même demi-espace. (justif. : règle 05) et $\epsilon(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = +1$.

or $V(P) = S \times OH$ et $OH = \vec{OH} = \vec{OA} \cdot \vec{n} = \vec{a} \cdot \vec{n}$
donc $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = S \times (\vec{a} \cdot \vec{n}) = (S\vec{n}) \cdot \vec{a}$

Si $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ indirecte alors A et N sont dans deux demi-espaces différents. (justif. règle 05) et $\epsilon(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -1$

or $V(P) = S \times OH$ et $\vec{OH} = -OH = -\vec{a} \cdot \vec{n}$
donc $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = S \times (-\vec{a} \cdot \vec{n}) \times (-1) = (S\vec{n}) \cdot \vec{a}$

2) Dans le cas où $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ sont coplanaires :

- ou bien $S = 0$ et pour tout plan contenant (\vec{OB}, \vec{OC}) , si \vec{n} est normal à ce plan on aura bien $(S\vec{n}) \cdot \vec{a} = 0 = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$
- ou bien $S \neq 0$ mais alors \vec{c} et \vec{b} sont non colinéaires, comme $(\vec{OA}, \vec{c}, \vec{b})$ sont coplanaires c'est que A se trouve dans le plan $(O; \vec{c}, \vec{b})$ donc $\vec{a} \cdot \vec{n} = 0$ donc $(S\vec{n}) \cdot \vec{a} = 0 = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$

Conclusion.

Pour tout triplet $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ de vecteurs $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (S\vec{n}) \cdot \vec{a}$, formule dans laquelle :

- \vec{n} est un vecteur unitaire normal au plan (O, \vec{b}, \vec{c}) (si celui-ci existe) tel que $(\vec{n}, \vec{b}, \vec{c})$ soit directe. Si (O, \vec{b}, \vec{c}) ne définissent pas un plan on choisit \vec{n} normale unitaire quelconque à un plan contenant (O, B, C) .
- S est la mesure de l'aire du parallélogramme construit à partir de \vec{b} et \vec{c} .

Conséquences.

1. Fixons \vec{b} et \vec{c} : $S\vec{n}$ est fixé. $\vec{a} \mapsto (S\vec{n}) \cdot \vec{a}$ est une forme linéaire (prop. pr. scal.) donc $\vec{a} \mapsto [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ est linéaire.
2. Fixons \vec{a} et \vec{c} :
Etudier $\vec{b} \mapsto [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ se ramène au cas précédent grâce à $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}]$.
3. Fixons \vec{a} et \vec{b}

Conclusion.

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \mapsto [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ est donc une application trilineaire alternée (le caractère alterné a déjà été souligné).

Calcul à l'aide de coordonnées :

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de V_3 .

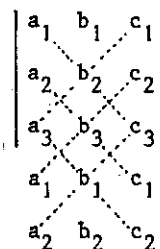
1. Le développement automatique (en jouant sur la trilinearité) donnera $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = h(a_1, b_1, c_1) \times [\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}]$ (où h est une fonction des coordonnées).

Cas où $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormée directe

$[\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}] = +1$ ($\epsilon = 1$ et $V(P) = 1$: vol. du cube unité).

2. Moyen mnémotechnique pour le calcul de $h(a_1, b_1, c_1)$
Donner la règle de Sarrus par exemple (sans explication ! il s'agit d'un simple moyen mnémotechnique !).

$h(a_1, b_1, c_1) = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3$



3. Applications.

- 1) Condition analytique de coplanarité de 3 vecteurs ; application au calcul d'une équation cartésienne d'un plan défini par point et base du plan vectoriel directeur.
- 2) Calculs de volumes de parallélépipèdes.
- 3) Test de réponse à la question : " $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est-il une base de V_3 ". (nullité ou non de $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$) et à la question de l'orientation. (Quel est le signe de $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ s'il n'est pas nul ?)

VII. PRODUIT VECTORIEL DANS V_3 ORIENTE

Etude de l'application $(\vec{b}, \vec{c}) \mapsto S\vec{n}$

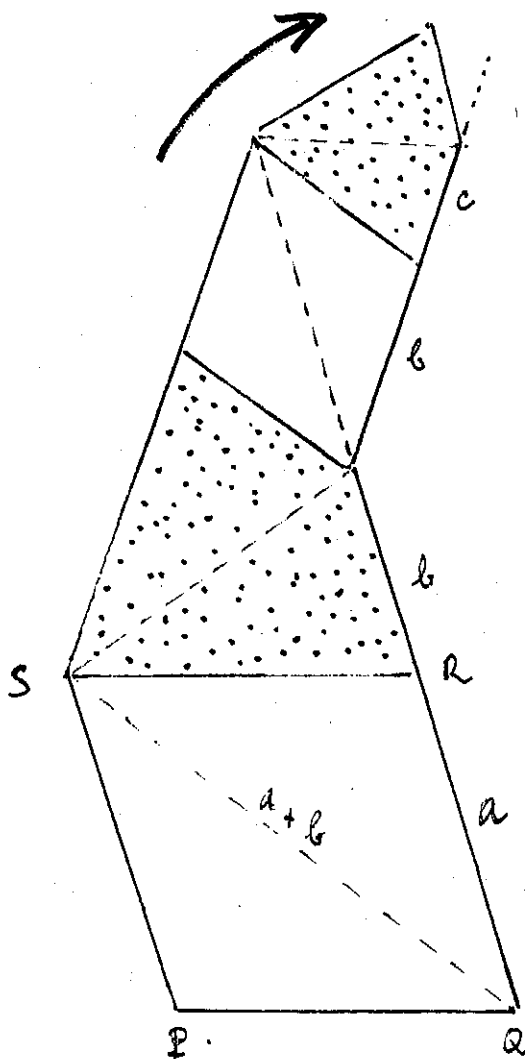
($S\vec{n}$ sera noté $\vec{b} \wedge \vec{c}$ et appelé produit vectoriel de \vec{b} par \vec{c}).

Rappel :

• Si (\vec{b}, \vec{c}) sont non colinéaires \vec{n} est tel que ➤

Le Bras Doré

Jean SAUVY A.R.P. · Meudon



A partir du losange doré PQRS, vous pouvez construire un "bras articulé", style robot (également doré, en forme de spirale) par un jeu répété de règle et de compas.

Trouvez l'algorithme constructif et utilisez-le pour prolonger l'amorce ci-jointe.

Vous obtiendrez, une nouvelle fois, l'image de l'unité structurelle dans la diversité formelle.

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = 1,618... = \phi$$

$(\vec{n}, \vec{b}, \vec{c})$ directe.

Si (\vec{b}, \vec{c}) sont colinéaires on pose naturellement $\vec{b} \wedge \vec{c} = \vec{0}$; réciproquement si $\vec{b} \wedge \vec{c} = \vec{0}$ il est facile de démontrer que \vec{b} et \vec{c} sont colinéaires.

Propriétés:

Propr. 1 : Pour tout couple (\vec{b}, \vec{c})
 $\vec{b} \wedge \vec{c} = -(\vec{c} \wedge \vec{b})$

Propr. 2 : Pour tout triplet $(\vec{x}, \vec{b}, \vec{c})$
 $[\vec{x}, \vec{b}, \vec{c}] = S\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{x} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c})$

D'où résulte la bilinéarité dès qu'on a établi (lors de l'étude de l'orthogonalité) :

$$\forall \vec{x} (\vec{x} \cdot \vec{v} = \vec{x} \cdot \vec{w}) \rightarrow \vec{v} = \vec{w}.$$

Conclusion :

L'application $(\vec{b}, \vec{c}) \rightarrow \vec{b} \wedge \vec{c}$ est donc bilinéaire alternée.

Expression analytique de $\vec{b} \wedge \vec{c}$ (la base de référence étant orthonormée directe.

a) On sait que si l'on pose $\vec{b} \wedge \vec{c} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$ alors $X = \vec{i} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c})$ etc...
 d'où $X = [\vec{i}, \vec{b}, \vec{c}]$ $Y = [\vec{j}, \vec{b}, \vec{c}]$
 $Z = [\vec{k}, \vec{b}, \vec{c}]$ d'où les coordonnées.

b) On peut aussi exploiter la bilinéarité pour obtenir directement les coordonnées de $(\vec{b} \wedge \vec{c})$ après calcul de $\vec{i} \wedge \vec{j}$; $\vec{j} \wedge \vec{k}$; $\vec{i} \wedge \vec{k}$ et confronter les résultats obtenus. ●

Découpages

James TOUILLET · Parthenay

Avec les élèves, nous avons découpé un rectangle (2;1) pour obtenir un carré d'aire 2, un rectangle (5;1) pour obtenir un carré d'aire 5, un rectangle (4;2) pour obtenir un carré d'aire 8. Pour faire un carré d'aire 3, nous n'avons pas trouvé de solution simple. Or $2 < 3 < 4$; comment découper dans un carré d'aire 4

un carré d'aire 3 après avoir fait apparaître un carré d'aire 2 ? Si les carrés d'aire 4 et 2 ont le même centre, il existe entre les deux une figure formes de rectangles ayant une aire de 2 dm^2 .

Voici une solution possible. En avez-vous d'autres ?

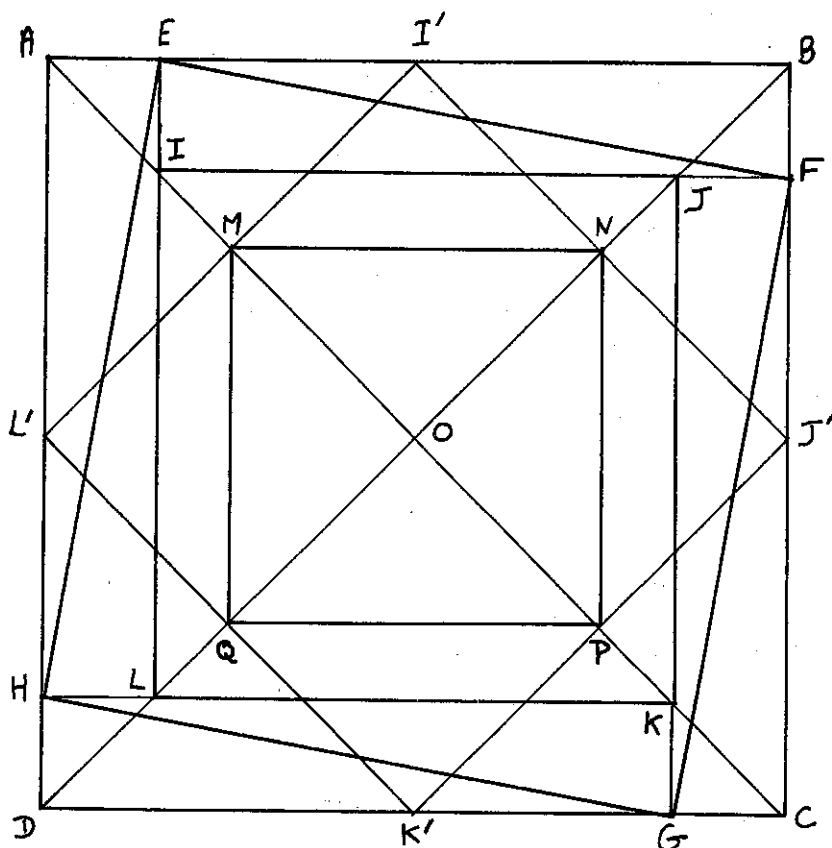
(ABCD) a pour côté 2 et pour aire 4.

(I'J'K'L') a pour aire 2 et pour côté $\sqrt{2}$; si on le fait tourner autour de O de 45° , on obtient (IJKL).

Il existe quatre rectangles (AELH), (BFIE), (CGJF) et (DHKG) d'aire $1/2$ que l'on peut découper en deux triangles rectangles d'aire $1/4$. M, N, P, Q étant les milieux des demi-diagonales, on a :

(ABCD) \rightarrow 4 (EFGH) \rightarrow 3 (IJKL) \rightarrow 2 (MNPQ) \rightarrow 1.

Coloriage et découpage peuvent amener à exprimer des remarques.



Jacques BELLICAUD · Poitiers

Dans un premier article (cf PLOT n° 23, 2^e trim. 83), l'auteur avait montré comment, dès le cours préparatoire, l'usage des calculatrices pouvait faciliter l'apprentissage de la suite des nombres. Il achève aujourd'hui son propos en rapportant le travail qui a débouché sur l'apprentissage des "groupements par 10" et de la numération écrite.

TROISIEME ETAPE : ASPECT CARDINAL DU NOMBRE , LES GROUPEMENTS PAR DIX

Même s'il y a parfois références à des collections (ou des paquets de bûchettes), c'est surtout, jusqu'ici, "l'aspect ordinal du nombre qui est privilégié".

Aussi envisageons-nous de travailler l'autre "aspect" du nombre et en particulier de nous acheminer vers la notion de dizaines.

Nous proposons alors aux enfants de dénombrer des collections de bûchettes. Le travail de la 2^{ème} étape étant pratiquement compris pour 14 élèves sur 17, il n'y a, en fait, aucun problème.

Certains élèves, cependant, devant une collection importante, ne dénombrent pas unité par unité mais font des "petits paquets", sortent leur calculette et mettent en place une écriture additive. Le signe + est utilisé plusieurs fois.

Cette méthode est privilégiée et de nombreux exercices ont lieu : codage et décodage d'une collection - communication - vérification par groupe et réciproquement.

Au cours de la seconde séquence de ce type nous relevons, dans un groupe, l'écriture suivante :

$$10 + 10 + 10 + 10 + 5 = 45$$

Un élève du groupe chargé de la vérification et du décodage s'exclame : "Ben, y en a des dix, je ne sais pas combien y en a ?".

Cette réflexion nous donne l'idée de proposer à l'ensemble des élèves de la classe cet exercice : "Recherche des paquets de 10 dans une collection et conduisant à une écriture additive."

Les réussites sont excellentes pour les trois collections proposées suivantes :

$$38 - 34 - 27$$

Toujours suivant le principe de la communication-vérification par groupe et réciproquement nous obtenons de nombreuses écritures additives qui donnent lieu à la "construction" d'étiquettes:

Ex. $10 + 1 = 11$
 $10 + 7 = 17$
 $10 + 9 = 19$
 $10 + 10 + 6 = 26$
 $10 + 10 + 7 = 27$
 $10 + 10 + 8 = 28$
 $10 + 10 + 10 + 3 = 33$
 $10 + 10 + 10 + 4 = 34$
 $10 + 10 + 10 + 7 = 37$
 $10 + 10 + 10 + 8 = 38$
 $10 + 10 + 10 + 10 = 40$
 $10 + 10 + 10 + 10 + 1 = 41$
 $10 + 10 + 10 + 10 + 2 = 42$

Les élèves décident eux-mêmes de ranger les étiquettes dans l'ordre croissant et de "construire les étiquettes manquantes".

Le coup de pouce "magistral" est maintenant nécessaire.

Les élèves sont tout naturellement conduits à la remarque suivante : Dans un nombre de deux chiffres, le chiffre de gauche c'est le nombre de 10 qu'il faut écrire, c'est le nombre de paquets de 10 que l'on peut faire et le chiffre de droite représente les unités restantes appelées les "tout seuls", ceux avec lesquels on ne peut plus faire un paquet de dix.

A cette étape du travail des exercices de ce type sont réussis :

paquets de : tout
 dix : seuls
 $69 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 9$ - 6 : 9
 $78 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 8$ - 7 : 8

Il est toujours possible de faire référence au matériel, le cas échéant. Certains élèves utilisent la calculatrice, d'autres non.

Alors qu'il nous semble que maintenant tout est en place, nous demandons de ranger par ordre croissant les nombres : 37 - 42 - 56 - 49. Nous sommes assez déçus de constater que quelques enfants proposent : 42 - 56 - 37 - 49, puisque $2 < 6 < 7 < 9$

Une majorité des élèves a cependant pu redresser l'erreur. Un élève : "non c'est pas ça, il faut s'occuper des paquets de 10".

Les étiquettes sont recherchées, les paquets de 10 sont construits concrètement et les enfants établissent d'eux-mêmes des correspondances terme à terme, paquet de 10 à paquet de 10.

C'est un travail intéressant qui aurait pu nous amener à la construction d'un organigramme permettant le rangement des nombres ; cette direction n'a pas été exploitée.

Nous ajoutons enfin quelques exercices de contrôle résolus avec ou sans l'utilisation de la machine. Voici plusieurs exemples :

1er exercice: Deux nombres sont donnés. Peut-on "aller" du premier au second en n'utilisant que les touches "nombre" et "+" de la calculatrice et comment ?

(Certains enfants n'ont pas utilisé la machine).

Un 1er groupe : (L'écriture n'est certes pas rigoureuse, mais nous semble bien indiquer la démarche suivie).

Un 2ème groupe : 67 - 76

Explications données par le groupe :

"Nous avons fait $67 + 10$ sur la machine mais c'est trop loin. Il ne

faut pas faire $+ 10$ mais 76 c'est 1 de moins que 77 il faut mettre un de moins que 10 , c'est 9 .

On arrive : $67 + 9 = 76$ "

Un 3ème groupe : Cet exemple est donné ici afin de montrer que cet exercice aurait pu permettre une introduction du signe -.

Dans l'exercice 57 - 36, les enfants se sont reportés "au chemin" présenté plus haut (2ème étape).

De tels travaux permettent de conclure : "Si pour "aller" du premier nombre au second, on n'utilise que le signe plus, c'est que le second est supérieur au premier".

(Certes, cette formulation n'est pas rigoureuse car on peut atteindre 76 en partant de 67, en réalisant $+ 10$ et $- 1$ comme finalement l'a fait un groupe, mais est-ce vraiment dommage ?).

2ème exercice :

"Compléter le "serpent" suivant (voir figure page ci-contre).

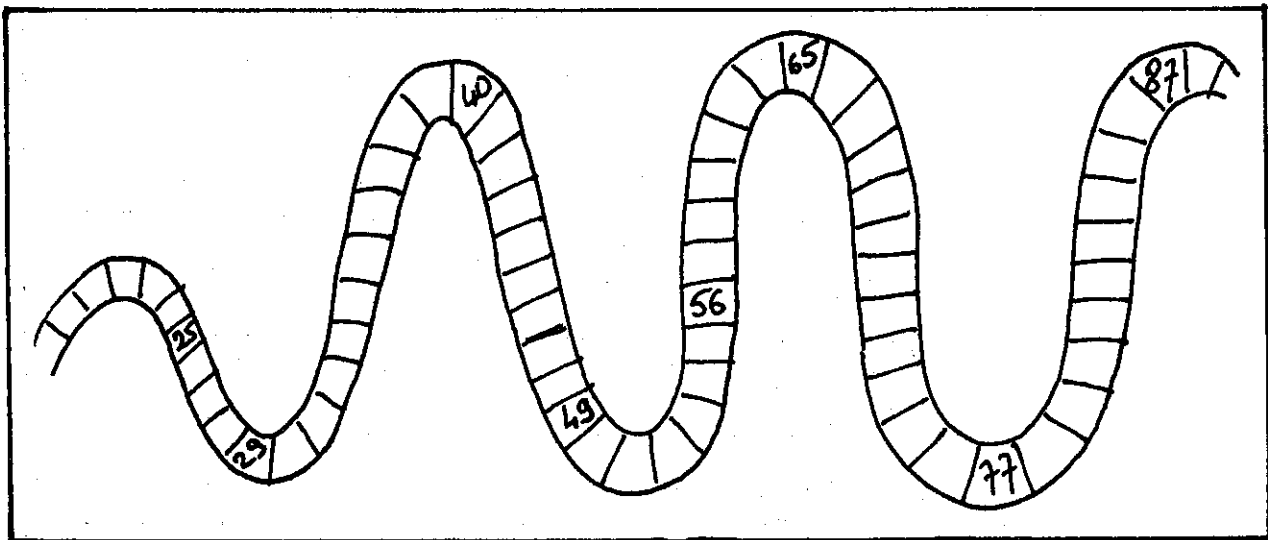
Les résultats de cet exercice ont été :

- 13 sans erreur
- 3 avec erreurs
- 1 absent

3ème exercice -

"Tu écris les nombres que tu obtiens quand tu ajoutes 10"

(La machine n'est utilisée qu'au moment de la vérification).



4ème exercice -

"Tu choisis deux nombres. Il faut aller de l'inférieur au supérieur. Que peux-tu faire ?"

Tous les enfants trouvent qu'il faut "faire +" avec la machine. Voici quelques travaux :

22 et 27

$$22 + 5 = 27$$

22 et 37

$$22 + 8 + 7 = 37$$

$$22 + 15 = 37$$

28 et 51

$$28 + 2 + 10 + 10 + 1 = 51$$

$$28 + 20 + 3 = 51$$

5ème exercice : (Révision-Contrôle)

Donner d'autres écritures des nombres 64 - 48 - 75 - 82 en faisant le plus possible de paquets de dix.

Ranger ces nombres dans l'ordre décroissant. (voir quelques travaux ci-dessous.)

(C'est un exercice relativement difficile et certains ont eu besoin de recourir à l'utilisation des bâchettes. L'ensemble des résultats est alors très satisfaisant).

6ème exercice : (Révision-Contrôle)

La maîtresse dicte un nombre, les élèves écrivent ce nombre en lettres, en chiffres et complètent les cases du tableau.

Exemple : page suivante.

* * * * *

C'est ainsi que sont arrivées les vacances dites "de PAQUES" !...

CONCLUSIONS

L'emploi des "calculettes" a permis de soutenir l'intérêt des enfants dans l'apprentissage de la numération. Il est certain que la machine ne nous a pas toujours permis d'avancer : les enfants l'ont souvent utilisée comme outil per-

48	$10 + 10 + 10 + 10 + 8 = 48 \bullet$
64	$10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 4 = 64 \bullet$
75	$10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 5 = 75 \bullet$

		paquets de dix ↓ dizaines	objets ↓ unités
Cinquante trois	53	5	3
quatre-vingt quatre	84	8	4
soixante neuf	69	6	9
quatre-vingt six	86	8	6
soixante quatre	74	7	4
quarante sept	47	4	7

mettant la vérification. Nous pensons, cependant, que les calculettes peuvent conduire à la découverte de notions nouvelles et qu'il reste encore beaucoup à faire.

Nous précisons qu'au cours du 3ème trimestre, l'apprentissage de la numération a été poursuivi (4 enfants sur 17 présentant encore quelques difficultés) ; la construction de la table d'addition et sa mémorisation étant réalisées, de petits problèmes seront soumis au raisonnement des enfants.

Compte-tenu de l'état des travaux, nous n'envisageons pas de faire compter les enfants "en bases" car nous ne percevons pas comment introduire ces différentes numérations. Est-ce vraiment un handicap ... au Cours Préparatoire ? Ne sera-t-il pas temps d'introduire ces notions lorsque les enfants seront à l'aise dans la numération en base dix ? Les notions de "groupements" seront alors étudiées non pas comme nécessaires à l'apprentissage mais comme support à l'élaboration d'un système de numération faisant appel à l'emploi d'un nombre de signes limité, à l'emploi de groupements réitérés et à l'importance de la position du signe.

En ce qui concerne la numération orale, nous nous interrogeons encore

sur l'opportunité d'avoir travaillé immédiatement en numération correcte ; ne serait-il pas préférable, pour vingt par exemple, d'énoncer "deux dix", pour trente "trois dix", pour quarante deux "quatre dix, deux" ? ... ●

SOLUTION DES MOTS CROISES

Horizontalement

- I. Trigonométrie.
- II. Holomorphe - Mu.
- III. Elément - Nait.
- IV. OL - ML - Induite.
- V. Rêvée - Eire - AR.
- VI. Esta - Cas - TP.
- VII. Mou - Turet - Tie.
- VIII. Entière - Echo
- IX. ST - Ose - Trient.

Verticalement

1. Théorèmes.
2. Rolle - Ont.
3. Ile - Vent.
4. Gommages - Io.
5. Omelettes.
6. Non - Aire.
7. Ortie - Ré.
8. MF - Nice.
9. Eh - Drater (Retard).
10. Ténues - Ci.
11. Ai - Thé.
12. Imitation.
13. Euterpe

Maths & B.D.

Michel MIRAUULT et Gérard PRADALIER, deux membres de la Régionale APMEP d'Orléans-Tours, viennent d'éditer une bande dessinée intitulée THALES de MILET (éd. Magnard). Ce livre est le premier de la collection "Théorèmes et Légendes", qui s'intéressera aux "grands hommes" dont les noms traînent dans les programmes du 1er cycle. On lira ci-contre quelques explications d'un des auteurs.

Bien entendu, comme il est d'usage au PLOT, cette publication est totalement gratuite et désintéressée : le directeur de publication de ce trimestriel a même dû sortir de sa poche les 38,70 F nécessaires à l'acquisition de cette B.D. que dévorent ses enfants...

G. Pradalier - L'idée de cette bande dessinée avec Michel Mirault date d'un colloque IREM qui eut lieu à Lille en 1979 (Institut de Recherche pour l'Enseignement des Maths).

L'idée de départ vient de la constatation qu'il n'existe jamais plus que 2 ou 3 lignes dans le dictionnaire à propos des auteurs du premier cycle. Thalès, Pythagore, Euclide, Archimède... qui sont-ils ?

une page « résumé », placée en fin du livre et destinée à être découpée et rangée dans le classeur du « bon élève ».

Nous avons donc pensé faire un livre sur ces mathématiciens, en réservant une ou deux pages par auteur, mais cette information aurait été un peu trop concise et peu vivante... et nous avons finalement opté pour un livre par auteur et sous forme de bande dessinée.

Que comporteront ces différents livres ?

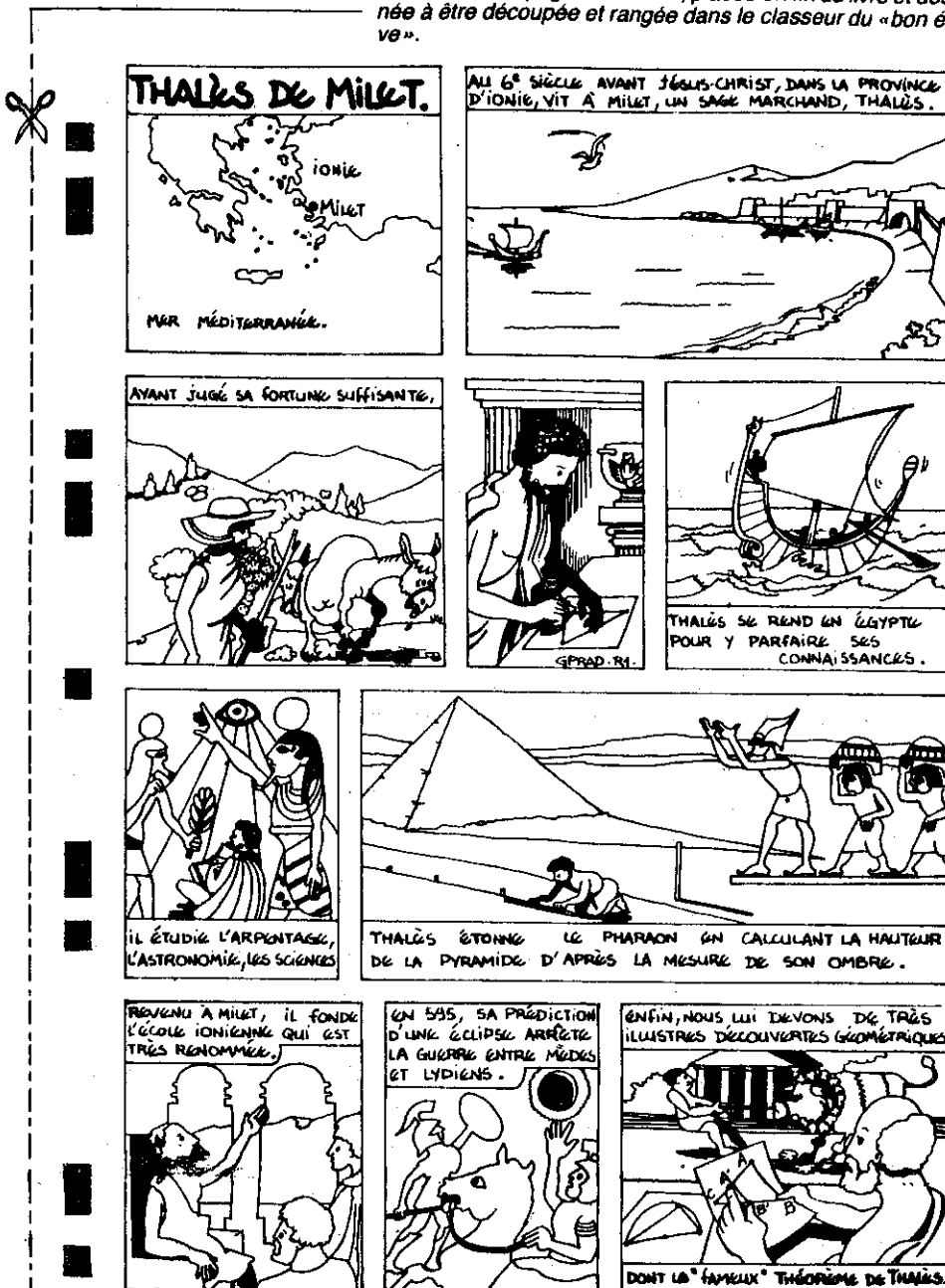
G. P Nous réinsérerons chaque personnage dans son contexte historique, lierons les découvertes aux contraintes de civilisation. Les premières grandes découvertes seront exposées à travers les personnages, la philosophie de l'époque.

Il ne s'agit pas d'un livre de mathématiques, ni d'un livre de cours, mais plutôt de montrer tout ce qu'il y a d'humain dans l'axiome ou le théorème le plus abstrait.

Quels sont en quelques mots les objectifs de ces livres ?

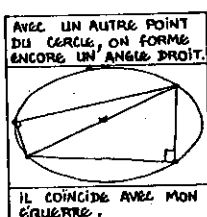
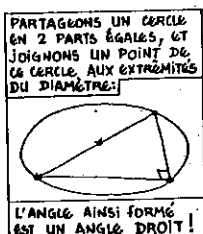
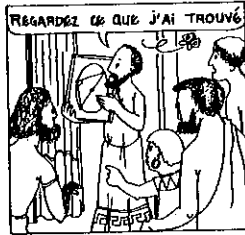
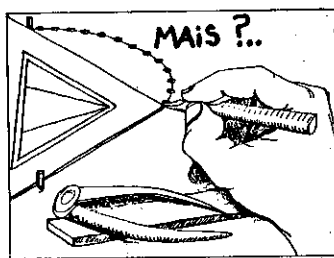
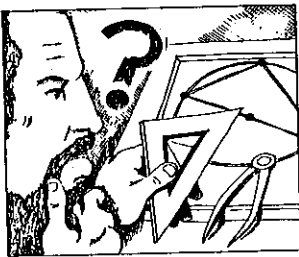
G. Pradalier - Tout d'abord faire connaître les mathématiciens, non comme des robots, mais comme les hommes qu'ils ont été. Montrer qu'il y a eu des hommes pour synthétiser et formaliser la pensée et les connaissances d'une époque et tout cela par une approche ludique, vivante et illustrée.

En deuxième lieu constituer à la fois pour les élèves de 6^e, 5^e, 4^e, un prolongement du cours magistral, ainsi qu'un outil du dialogue nécessaire élève-professeur. Chaque bande dessinée, consacrée à des auteurs tels que Thalès, Euclide, Archimède, etc., pourra intervenir pour chaque élève, à la fois avant et après l'application mathématiques du cours.



Les atatus de la Régionale APMEP de POITIERS, adoptés le 01-12-67, ont été modifiés le 24-11-82. En exclusivité de toute la presse française et étrangère, nous publions ce "scoop" qui, comme les analyses de laboratoire l'ont montré, est un VRAI authentique.

Afin d'égayer la sévérité de ce texte d'époque, nos amis Mirault et Pradalier ont accepté de nous confier la page 16 de leur "Thalès" (cf page précédente)...



Régionale de Poitiers

1 Il est formé une Association dite « Régionale de Poitiers de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public » (Régionale de Poitiers de l'APMEP). L'association est mise sous le régime de la loi du 1er juillet 1901 (art. 5 et 6). Son siège social est au Centre Régional de Documentation Pédagogique - 6, rue Ste Catherine à Poitiers. Il pourra être transféré en tout autre endroit par simple décision du Comité Régional.

2 Sont membres de la Régionale de Poitiers de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, les membres adhérents de l'APMEP qui résident ou qui enseignent dans les départements de l'Académie de Poitiers.

3 La Régionale de Poitiers est administrée par un Comité Régional de 8 à 14 membres assurant la représentation des sections départementales du ressort et des divers ordres d'enseignement. Le Comité Régional est constitué de membres de la Régionale élus par l'assemblée générale annuelle de la Régionale et les membres de droit prévus au règlement intérieur.

4 Le Comité Régional élit dans son sein le Bureau de la Régionale qui comprend :

- un président,
- un ou plusieurs vice-présidents,
- un ou plusieurs secrétaires,
- un ou plusieurs trésoriers.

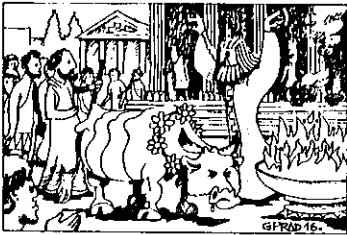
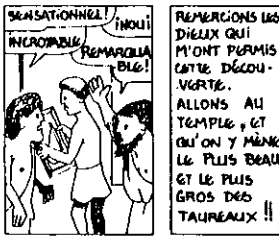
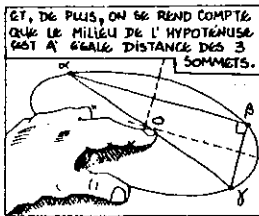
Les ressources de la Régionale sont principalement constituées par :

- les ristournes statutaires effectuées par la trésorerie nationale de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public sur le compte courant postal de la Régionale ;
- des cotisations volontaires des membres adhérents en supplément de la cotisation nationale normale.

5 La Régionale de Poitiers de l'APMEP peut apporter sa contribution au fonctionnement de la Trésorerie Nationale de l'APMEP.

La Régionale a pour but de mettre en oeuvre tous les moyens dont elle dispose en faveur du développement des études pédagogiques relatives à l'enseignement des mathématiques

- l'organisation de cours, séminaires, conférences ou colloques assurant l'information des maîtres à tous les niveaux ;
- le travail en équipe ;
- l'organisation d'expériences pédagogiques ;
- elle assure la représentation des membres de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public auprès des autorités académiques (en particulier le service des examens) ;
- assurer la liaison entre ses membres, le Centre Régional de Documentation Pédagogique et l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques ;
- assurer la liaison entre les membres et le Bureau national en préparant en particulier les Journées Nationales et en se faisant représenter aux réunions du Comité National ;
- assurer la liaison avec les autres régionales de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public et les Régionales de Poitiers des autres associations



REGLEMENT INTERIEUR

Article 1 : Assemblée générale annuelle

L'assemblée générale ordinaire se réunit une fois par année scolaire sur convocation du bureau du Comité Régional. Les convocations sont envoyées au moins quinze jours à l'avance et indiquent l'ordre du jour.

Le Président, assisté des membres du Comité Régional, préside l'assemblée et expose la situation morale de la Régionale.

Le trésorier rend compte de sa gestion et soumet le bilan à l'approbation de l'Assemblée.

Il est procédé, après épuisement de l'ordre du jour, au remplacement des membres sortants du Comité Régional.

Article 2 : Comité régional :

Le Comité de la Régionale de Poitiers de l' A P M E P comprend des membres de droit et des membres élus par l'Assemblée générale annuelle de la Régionale. Dans tous les cas où cela est possible, le Comité désigne parmi ses membres des correspondants des Commissions ou groupes de travail nationaux.

Sont membres de droit du Comité régional les membres de la Régionale qui sont membres du Comité National de l' A P M E P, qu'ils soient titulaires de sièges académiques ou de sièges nationaux, et leurs suppléants éventuels (cf article 3 et 16 du règlement intérieur de l' A P M E P).

Les titulaires de sièges académiques au Comité National de l' A P M E P et leurs suppléants sont, de plus, dans l'obligation de participer aux réunions du Comité régional.

En cas de vacance, le Comité régional pourvoit provisoirement au remplacement de ses membres. Le remplacement définitif intervient à la plus prochaine assemblée générale.

pédagogiques en vue de l'échange de publications et en faveur de la coordination de l'enseignement des diverses disciplines ;

– organiser la participation de ses membres aux travaux de commissions organisés, soit sur le plan national, soit sur des plans régionaux divers ; etc...

6 La Régionale de Poitiers encourage la création de sections locales et entretient les liaisons entre ces sections.

Le Comité Régional pourra, s'il le juge nécessaire, arrêter le texte d'un règlement intérieur, qui déterminera les détails d'exécution des présents statuts.

7 Ce règlement sera soumis à l'approbation de l'assemblée générale annuelle de la Régionale.

8 La dissolution de l'APMEP entraîne ipso facto celle de la Régionale de Poitiers de l'APMEP. La modification des statuts ou la dissolution de l'Association (indépendamment du cas ci-dessus) ne peuvent être prononcées que par une Assemblée Générale extraordinaire. En cas de dissolution de la régionale de Poitiers de l'APMEP, l'éventuel actif est dévolu à l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public.

REGIONALE DE LIMOGES

CCP : LIMOGES 177 66 R

Secrétariat : IREM. 123, rue Albert Thomas 87060 LIMOGES Cedex (79.24.12)

Président d'honneur : Mr ROGERIE 22, rue L. Codet 87200 St JUNIEN (02.15.69)

Présidente : Mme ROUGIER 35, av. de la Vienne 87170 ISLE (50.25.00)

Vice-Présidents :

-Corrèze : Mr BOUTEILLER 7bis, av. du Pdt Roosevelt 19100 BRIVE (74.20.11)

-Creuse : Mr BOURCY Peyrat la Nonière 23130 CHENERAILLES (62.35.19)

-Hte Vienne : Mr NICOLAS 29, rue A. Tixier 87100 LIMOGES (77.07.76)

Secrétaire : Mr FELDMAN 59, rue de Beaupuy 87100 LIMOGES (77.47.50)

Secrétaire-adjoint : Mme PESTEL 53, rue du 4 Septembre 87100 LIMOGES (37.96.58)

Trésorier : Mr DUVEAU 4, rue E. Leroy 87500 St VRIETX (75.07.32)

Brochures : Mr CATHALIFAUD 20, allée Villagory 87100 LIMOGES (30.58.56)

Enseignement Primaire : Mme ROUGIER. Mr CATHALIFAUD

Liaison CM2-6è : Mr CREPIN 94, av. de Locarno 87100 LIMOGES (33.46.68)

1er Cycle : Mr LACOTTE 6, av. René Coty 87100 LIMOGES (01.31.61)

2è Cycle : Mme TOULET 37, rue A. Tixier 87100 LIMOGES (77.68.77)

L.E.P. : Mme PESTEL

Mr ROUGIER 35, av. de la Vienne 87170 ISLE (50.25.00)

Post-Baccalauréat : Mr MORIN 18, domaine de la Garde 87100 LIMOGES

Mr NICOLAS

Liaisons interdisciplinaires : Mr ROUGIER

Formation des maîtres : Mr EZQUEURRA La Roche. St Vrieix sur Aixe 87700 AIXE sur VIENNE (09.84.58)

PLOT : Mr CREPIN

Représentant de l'APM au Conseil d'Administration de l'Irem : Mr ROUGIER

REGIONALE D'ORLEANS - TOURS

CCP : LA SOURCE 1440 09 X

Siège Social : IREM - Université - 45046 ORLEANS CEDEX

Président : Gérard CHAUVAT 31, rue Albert Camus 37300 JOUE LES TOURS (47) 28.15.18

Vice-Présidents : André GAGNEUX 14, rue de la Tour de Bau - 18400 SAINT FLORENT (48) 55.22.36

Jacques PINAUD 4, rue de la Tuilerie, Chambléan-Garnay - 28500 VERNOUTILLET (37) 46.82.82

Trésorier : André DUTHILLEUL 13, rue du Domaine - 37300 JOUE LES TOURS (47) 27.75.74

Secrétaires : Yves BOUTEILLER 150, rue de Chantepie - 37300 JOUE LES TOURS (47) 53.45.24

Patrick MARTHE 15, rue Berthollet - 45100 ORLEANS (38) 63.12.83

Pascal MONSELLIER Les Tourelles, Marcilly en Villelte - 45240 LA FERTE ST AUBIN (38) 65.11.77

Jean-Claude SACHET 2, route du Vallon, St Gemme Moronval - 28500 VERNOUTILLET (37) 43.72.15

Autres membres du Comité Régional :

Michel DARCHE 1, rue Albert Laville - 45000 ORLEANS (38) 62.22.85

Pierre NURY "Ville Greuil" Saint Roch - 37390 LA MEMBROLLE (47) 41.07.88

Joëlle PROVOST 12bis, rue des Coupances - 18230 SAINT DOULCHARD (48) 70.14.97

Tâches du Comité Régional :

Informatique : Patrick MARTHE
Innovation : Joëlle PROVOST
Information : Pascal MONSELLIER
Bulletin rapide : André GAGNEUXEnseignement en L.E.P. : Jean-Claude SACHET
Enseignement du premier cycle : Pierre NURY
Enseignement du second cycle : Jacques PINAUD
Exposition - Matériel pédagogique : Michel DARCHE
Formation Continue : Yves BOUTEILLER, André DUTHILLEUL

Siège Social : CRDP 6, rue Sainte Catherine 86034 POITIERS
 Président : J. BOROWCZYK 3, rue de Provence 86000 POITIERS (49).47.71.27
 Secrétaire : M-H CHAUSSEAU 14, rue Maurice Bedel 86100 CHATELLERAULT (49).21.84.51
 Trésoriers : Jocky COURTOIS 13, rue des Chardonnerets 86000 POITIERS (49).58.16.92
 Dominique PORTE 10, rue des Grands Chênes 86280 St BENOIT (49).88.43.87

Secrétaires des Départementales :

16 : R. CASES Le Bourg Montjeau 16240 VILLEFAGNAN
 17 : M. FOURNIER 10, av. de Terrefort 17100 SAINTES (46).93.28.74
 79 : J-P GUICHARD Le Chemin Vert. Boisvert. Le Tallud 79200 PARTHENAY (49).64.21.32
 86 : L-M BONNEVAL 12, bd Solfêrino 86000 POITIERS (49).41.42.19

Elémentaire : J. BELLICAUD 28, la Dinière 86180 BUXEROLLES (49).61.00.44

1er Cycle : D. GAUD 26, rue Pierre Verlaine 86000 POITIERS

2è Cycle : Serge PARPAV 22, rue Rougier 79000 NIORT (49).24.31.76
 J-L RENAUD 39, allée des Mimosas 86200 LOUDUN

Technique : M. FOURNIER

Informatique : G. DESENFANT St Gelais 79410 ECHIRE (49).75.01.38

D. DAVIAUD 12, rue des Acacias 17500 JONZAC ET et Le Studel 487 86000

Jeux : J. FROMENTIN 17, rue de la Roussille 79000 NIORT (49).28.39.77 POITIERS

Publications Régionales : S. PARPAV Gestion du Fichier : D. PORTE

Gestion du Fichier : D. PORTE

Sujets d'examen : G. BORION 12, rue E. Grimaud 86000 POITIERS (49).01.77.84

Supérieur & Formation Continue :

C. BLOCH 138, rue de la Méricotte 86000 POITIERS (49).01.15.27

Représentant de l'APM au Conseil de Gestion de l'IREM : G. BORION (suppléant : BONNEVAL)

Autres membres du Comité Régional : J-L DURPAIRE 9, rue du Chêne Vert 86240 LIGUGE

M. PUYGRENIER La Folie 86500 MONTMORILLON

1983

ABONNEMENT AU

plot

24

A N'UTILISER QUE PAR LES NOUVEAUX ABONNES

Je m'abonne à :

1° 4 numéros du PLOT 1983

- tarif normal 40 F

- membres APM
 résidant en
 FRANCE 30 F

2° Suppléments 3 et 4
 (les 2 n^{os}) 30 F *

3° Supplément 5
 20 F *

TOTAL
 (joindre le chèque)

NOM, Prénom :

Adresse complète :

Code postal et ville :

Chèque à l'ordre de : Régionale APMEP

Envoyer le chèque et cette fiche à :
 APMEP - IREM
 Université
 45046 ORLEANS CEDEX

*Seuls les abonnés au PLOT peuvent s'abonner aux Suppléments. Pour des détails sur les Suppléments, voir page 22.

BROCHURES DE L'A.P.M.E.P.

Ces brochures peuvent être obtenues auprès des Régionales APMEP (voir leur adresse et leur CCP à l'Agenda).

Numéro de collection	Titre	Prix en francs port compris (1/12/1982)
20	Quelques apports de l'Informatique à l'enseignement des mathématiques, 1977, 280 p.....	33,50
21	Géométrie au premier cycle, tome 1, 1977, 208 p.....	33,50
22	Géométrie au premier cycle, tome 2, 1978, 328 p.....	38,50
23	Pavés et bulles par Françoise Pécaut, 1978, 288 p.....	38,50
24	Calculateurs programmables et algèbre de quatrième (une recherche inter-IREM), 1978, 120 p.....	26
25	Mots IV, 1978, 152 p.....	18
26	Elem-Math IV, Aides pédagogiques pour le Cours Préparatoire, 1978, 64 p.....	15
27	Pour une mathématique vivante en Seconde, 1979, 128 p.....	21
28	Analyse des données, tome 1, 1980, 248 p.....	38,50
29	Elem-Math V, Aides pédagogiques pour le Cours Élémentaires, 1979, 192 p.....	24

30	Les manuels scolaires de mathématiques, 1979, 280 p.....	38,50
31	Calculatrices 4 opérations (Elémentaire et premier cycle), 1979, 176 p. . .	21
33	Activités mathématiques en Quatrième-Troisième, tome 1, 1979, 248 p.	33,50
34	Recherche inter-IREM, 1973-78, en géométrie de Quatrième-Troisième, dite "O.P.C." : réflexion critique et évaluation, 1979, 160 p.	Epuisé
35	Du quotidien à la mathématique : une expérience en formation d'adultes, 1979, 104 p.....	26
36	Elem-Math VI, Le triangle à l'École Élémentaire, 1980, 64 p.....	12
37	Mots V, 1980, 114 p.....	20
38	Activités mathématiques en Quatrième-Troisième, tome 2, 1981, 140 p.	33
40	Analyse des données, tome 2, 1980, 296 p.....	41,50
41	Fragments d'histoire des mathématiques, 1981, 176 p.....	45
42	"Mini-grille" d'analyse des manuels scolaires de mathématiques, 1981, 56 p.	18
43	Mathématique active en Seconde, 1981, 220 p. environ.....	46,50
44	Jeux 1. Les jeux et les mathématiques, 1982, 184 p. et 13 fiches.....	59,50
45	Mathématiques et Sciences Physiques en Lycée d'Enseignement Professionnel, brochure U.d.P.-A.P.M.E.P., 1981, 48 p.....	gratuit
46	Mots VI : Grandeur - Mesure, 1982, 134 p.....	29
47	Obstacles et déblocages en mathématiques par M. Bruston et C. Rouxel, 1982, 130 p.....	51
48	Evariste Galois (1811-1832), format 21 x 29,7, 1982, 72 p.....	51