

Nous sortons des sujets géométriques pour attaquer un sujet qui prend de plus en plus de place dans les mathématiques, dans les entreprises ("cercles de qualité", "qualité totale", ...) et, bien sûr, va se retrouver dans l'enseignement à tous les niveaux. Nous vous proposons donc :

- Un dossier avec des activités nouvelles, pour les élèves de l'élémentaire, du collège et du lycée, qui intéresseront aussi bien les enseignants que les formateurs d'adultes.
- Et deux surprises : un matériel original et des programmes informatiques pour faire des simulations sur Thomson, Goupil ou Apple (IPT, IPT, !!!). On pourra même vous les envoyer sur disquettes (si vous payez les disquettes vierges ou si vous nous les envoyez).

Alors, n'hésitez pas, ne tardez pas, et, très vite, réabonnez-vous et abonnez votre CDI (ou vos amis).

L'équipe d'animation du
PLOT.

Sommaire du n° 33

Des rectangles à toutes les sauces (Groupe GEM Louvain la Neuve)	3
De la géométrie à l'informatique au CM (J.Bellicaud)	13
Méthodes numériques et Sc.Physique (J.Cl. Trigassou)	19
Histoire des Sciences (J.Dubois)	25
Notes de lectures (M.L. Darche)	11
Publications du GEM	18
Bibliographie pour CPPN, CPA et les autres	23
Mots croisés	34
1986 Réabonnez-vous - Dossiers et matériels du PLOT.	35

Equipe d'animation:

Michel CLINARD, Roger CRESPIN, Michel DACHE
Marie-Laure DACHE, Patrick MARTHE, Michel MIRAUT
Pascal MONSELLIER, Serge PRAPRY
Dactylographie: M.Schlienger
Contrôle ventes et publicité: P.Monsellier
Montage: M.Mirault
Fichier et routage: P.Marthe

Adresse du journal: IREM Université 45046 ORLEANS Cedex Directrice de
publication: M-L Darche-Giorgi numéro CPPAP: 63181
... Dépot légal: 4ème trim.85 ...

Toutes les publicités contenues dans le PLOT
le sont à titre gratuit

Des RECTANGLES à toutes les sauces

Ch COURTOIS, M. MILIS
N. ROUCHE, L. VINGERHOETS
Groupe G.E.M. Louvain-la-Neuve

Peut-être ne connaissiez-vous pas encore le groupe G.E.M., groupe d'enseignement mathématique. Il participe depuis quelques années aux travaux du groupe Inter-IREM Géométrie et ses publications touchent tous les domaines de l'enseignement Collèges et Lycées. Une approche voisine de celle du GFEN (Groupe Français d'Education Nouvelle) qui publie un numéro spécial sur leurs réflexions théoriques (n° 54 bis - Mai 1985).

L'article qui suit est tiré des actes du Colloque de Géométrie de Louvain La Neuve (1983) où de nombreux français étaient présents. Voici un certain nombre d'activités qui peuvent être faites dès le Collège.

La recherche du rectangle de plus grande aire pour un périmètre donné, et celle du rectangle de plus petit périmètre pour une aire donnée, sont deux problèmes classiques. Si on les pose à un mathématicien qui ne les connaît pas, il va sans doute se précipiter sur une dérivée pour trouver l'extremum demandé. Il aura raison, car se sera pour lui la voie la plus simple. Mais tous ceux qui ne connaissent pas la dérivée ? Le présent article rend compte de réponses intéressantes et variées qu'on peut obtenir en posant les deux problèmes en question à des personnes de niveaux d'études divers et d'âge situé entre "sept et septante-sept ans".

Cette étude fait partie d'une recherche sur l'enseignement du calcul "en situation", les deux problèmes d'extrema ayant été choisis, à vrai dire assez arbitrairement, comme occasions de calculer. Il ne nous paraît pas indifférent qu'un certain nombre de solutions irréprochables évitent tout calcul : c'est une chose à laquelle nous nous attendions très peu.

La plupart des solutions exposées ci-après ont été découvertes ou travaillées dans des classes, mais jamais toutes dans une même classe, ni dans l'ordre adopté ci-après.¹

1. Nous avons expérimenté dans deux classes de première rénovée et une classe de première accueil, dans trois classes de deuxième rénové et une classe de deuxième professionnelle, dans une classe de troisième rénové, une classe de quatrième rénové et une classe de cinquième rénové.

Les rectangles isopérimétriques.

Considérons l'énoncé suivant : *parmi les rectangles admettant un périmètre donné, y en a-t-il un dont l'aire soit la plus grande ?*²

Quelques-uns dont le périmètre égale 12 cm.

Le carré est un rectangle très spécial et qui attire l'attention. C'est pourquoi il se retrouve dans le lot. De même on trouve sur la fig.1 un rectangle très oblong : c'est qu'il est intéressant d'aller voir ce qui se passe du côté des cas extrêmes.

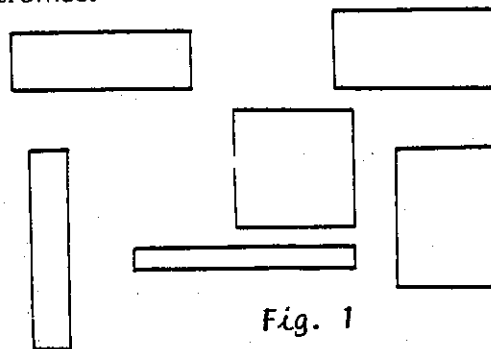


Fig. 1

2. Dans les classes, nous n'avons pas proposé directement la recherche d'un maximum. En effet, pourquoi imposer a priori l'idée qu'il y aurait un maximum plutôt qu'un minimum, ou rien du tout de semblable ? Considérant un rectangle donné, nous avons dit : dessines-en un autre de même périmètre et d'aire plus grande. Puis un troisième d'aire encore plus grande, etc... Le défi est né tout seul : qui trouvera le plus grand ? La classe est stimulée lorsqu'elle dégage elle-même la question pertinente.

Conclusion. Le carré est le plus grand, du moins jusqu'à preuve expérimentale du contraire.

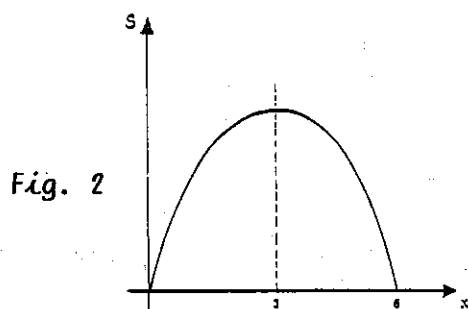
Inutile de dire que le physicien expérimental que nous avons imaginé est un représentant assez primitif de sa corporation. Voyons ce qu'il ferait en recourant à un graphique.

DEUXIEME APPROCHE DU PHYSICIEN

Chaque rectangle de la fig.1 étant déterminé dès qu'on s'est donné son côté horizontal, on peut porter sur un diagramme cartésien les aires obtenues S en fonction des longueurs x des côtés horizontaux (fig.2). On joint les points expérimentaux par une courbe, en se laissant guider par le sentiment de la continuité, et on voit la courbe culminer à l'endroit du carré.

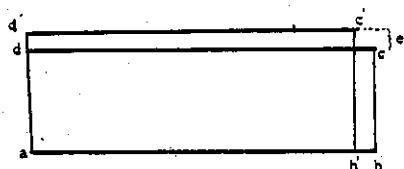
La courbe est plus vite tracée si on remarque qu'elle doit être symétrique, car chaque rectangle y est représenté deux fois.

Le calcul de ses points est facilité si on a établi préalablement son équation $S = x(K-x)$.



UNE EXPERIMENTATION DEJA PLUS FINE.

Au lieu de dessiner d'emblée tout un lot de rectangles sans idée préconçue, on peut en dessiner d'abord un, puis le modifier légèrement pour essayer de voir si on va dans le bon sens. Soit donc le rectangle $abcd$ de la fig.3, tel que son côté ab soit plus grand que son côté bc . Enlevons un tout petit morceau e à ab et ajoutons la même longueur e à bc . Nous formons ainsi un nouveau rectangle $ab'c'd'$ un peu plus trapu que $abcd$, et de même périmètre.



Comment se comparent les aires ? On a enlevé puis ajouté une bande au rectangle initial. Ces deux bandes ont pour largeur e . Or si e est assez petit, l'aire de la bande ajoutée est plus grande que celle de la bande enlevée.

Ce qu'on vient de faire, on peut le refaire pour n'importe quel rectangle non carré : si un côté est plus grand que l'autre, on peut enlever un morceau au plus grand côté et l'ajouter au plus petit. Si le morceau enlevé est assez petit, l'aire du nouveau rectangle est supérieure à celle de l'ancien. Donc aucun rectangle non carré ne peut être d'aire maximale. Plus un rectangle est trapu, plus son aire est grande. Or le carré est le plus trapu ...

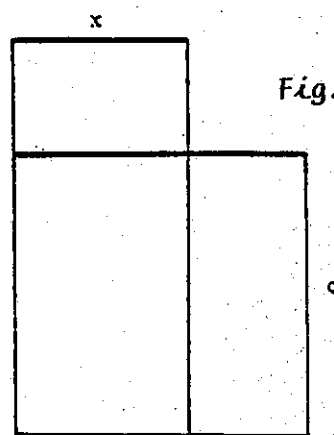
Cette solution est associée chez certains à l'idée d'une corde à laquelle on peut donner successivement la forme de tous les rectangles ayant pour périmètre la longueur de la corde.

Ceci dit, il semble bien naturel, pour vérifier que le carré est maximum, de partir de celui-ci en lui enlevant et lui ajoutant une bande. C'est ce que nous allons faire.

SOLUTION GEOMETRIQUE AU DEPART DU CARRÉ.

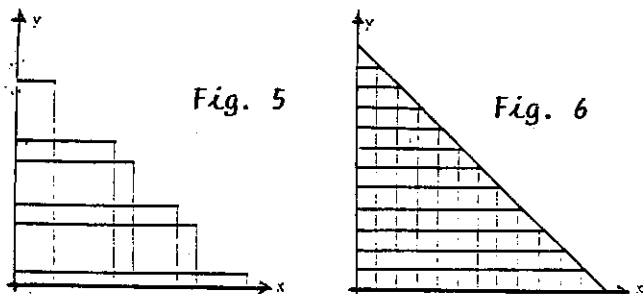
Soit un carré de côté c (voir fig.4). Et soit un rectangle de même périmètre, dont un des côtés vaut x , ($x < c$). Pour passer du carré au rectangle, on doit enlever au carré une bande plus grande que celle qu'on doit rajouter.

Donc le carré est le rectangle d'aire maximale.



UNE DROITE APPARAÎT.

Plutôt que de dessiner les rectangles disjoints comme sur la fig.1, rangeons-les, les uns sur les autres pour faciliter les comparaisons d'aires, par exemple comme sur la fig.5.



Il est remarquable de voir s'aligner les sommets supérieurs droits des rectangles. (Cette construction est proposée par E.Castelnuovo 1). On peut alors décider de refaire la figure, par exemple sur du papier quadrillé, en choisissant des côtés régulièrement échelonnés sur l'axe des x et en s'arrangeant pour que le carré soit dessiné aussi (ce qui implique de choisir un périmètre multiple de 4) (voir fig.6).

Les rectangles sont disposés symétriquement autour du carré. Ceci renvoie aux raisonnements illustrés par les fig.3 et 4. Le quadrillage naturel de la figure 6 facilite la perception (et même le calcul) des différences d'aires.

Chaque point du segment de droite, étant le sommet supérieur droit d'un rectangle, représente en quelque sorte ce dernier : on pourrait dire qu'il le symbolise. On voit les élèves faire le va-et-vient, plusieurs fois, des rectangles eux-mêmes à leur symboles ponctuels.

UNE PREMIÈRE SOLUTION ALGÈBRE.

Celui qui a appris à symboliser les grandeurs par des lettres produira peut-être une version algébrique de la solution illustrée par la fig.3. En voici la teneur.

Soient x et y les côtés d'un rectangle et K son demi-périmètre. On construit un autre rectangle de même périmètre en choisissant pour côtés $x+e$ et $y-e$, où e est une quantité strictement positive, et bien entendu inférieure à y . Que faut-il faire pour que l'aire du nouveau rectangle soit supérieure à celle du premier, c'est-à-dire pour que

$$(x+e)(y-e) > xy ?$$

Cette inégalité est équivalente à

$$e(y-x) - e^2 > 0,$$

ou encore à

$$y-x > e.$$

Donc, si $y > x$, on peut trouver $e > 0$ tel que l'aire du rectangle de côtés $x+e$, $y-e$ soit plus grande que l'aire du rectangle de côtés x, y . Par contre, si $y=x$, on échoue. Il n'y a pas de rectangle plus grand que le carré.

Cette démonstration est construite sur des inégalités, au rebours de la suivante.

SOLUTION ALGÈBRE EN PARTANT DU CARRÉ.

Celui qui a déjà conjecturé que le carré est le plus grand tiendra compte de ce fait pour construire une démonstration algébrique qui renvoie à la solution géométrique illustrée par la fig.4.

Soit $2K$ le périmètre imposé. Le carré a pour côté $K/2$. Et tout rectangle de même périmètre a des côtés dont les longueurs peuvent être exprimées sous la forme

$$x = \frac{K}{2} + e$$

$$\text{et } y = \frac{K}{2} - e.$$

L'aire du carré vaut $\frac{K^2}{4}$, et celle du rectangle vaut

$$\left(\frac{K}{2} + e\right)\left(\frac{K}{2} - e\right) = \frac{K^2}{4} - e^2$$

Cette dernière est clairement plus petite que celle du carré.

Un algébriste un peu plus détaché de l'intuition géométrique écrira peut-être ceci : on a les identités évidentes

$$x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}$$

$$\text{et } y = \frac{x+y}{2} + \frac{y-x}{2}$$

Or $\frac{x+y}{2}$ est constant, vu la contrainte $x+y=K$. Posons $\frac{x-y}{2} = e$.

On obtient ainsi

$$x = \frac{K}{2} + e,$$

$$y = \frac{K}{2} - e$$

Et la démonstration se poursuit comme ci-dessus.

Remarque

Nous avons détaché les deux dernières démonstrations de leurs contreparties géométriques respectives pour mettre en évidence le fait qu'il s'agit de démarches bien distinctes. Elles ne se confondent, à très long terme, que dans l'imagination des mathématiciens.

L'AFFAIRE REBONDIT.

Polya [2] donne en substance le conseil suivant : si vous n'arrivez pas à résoudre un problème, essayez donc de voir si vous ne résoudriez pas plus facilement l'un ou l'autre problème plus général. Bien que nous ayons déjà résolu notre problème de rectangles isopérimétriques de diverses façons, essayons tout de même, par curiosité, de considérer le problème plus général que voici : *de tous les quadrilatères admettant un périmètre donné, quel est celui dont l'aire est la plus grande ?*

Montrons d'abord que nous pouvons nous limiter aux quadrilatères convexes. En effet, si on applique aux deux côtés rentrant d'un quadrilatère non convexe une symétrie orthogonale appropriée, on change ce quadrilatère en un autre qui est convexe, de même périmètre et d'aire plus grande.

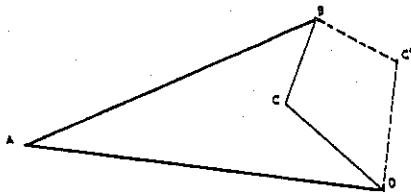


Fig. 7

NB. Il va de soi que nous ne considérons pas les quadrilatères à point double.

Soit un quadrilatère convexe $abcd$, et supposons qu'il ait au moins une paire de côtés adjacents inégaux, par exemple ab et cb (fig.8). Pour construire un quadrilatère de même périmètre et d'aire plus grande, il suffit de remplacer le triangle abc par le triangle $ab'c$ isocèle et de même périmètre. En effet, la hauteur de ce dernier est plus grande que celle du premier (on s'en rend compte sans peine en réalisant que b' se trouve en un des sommets d'une ellipse de foyers a et c , ellipse dont b occupe un autre point).

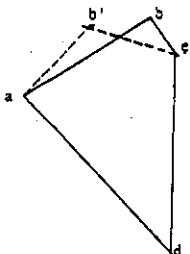


Fig. 8

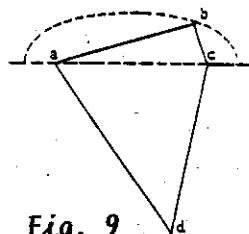


Fig. 9

Ainsi, si un quadrilatère convexe a deux côtés adjacents inégaux, on peut en trouver un autre de même périmètre et d'aire plus grande. Donc on voit que s'il existe un quadrilatère donné et d'aire maximale, ce quadrilatère aura tous ses côtés égaux. Ce sera donc un losange.

Notre problème initial est donc ramené à celui-ci : de tous les losanges qui ont un périmètre donné, lequel est le plus grand ? Il n'est pas difficile de voir que c'est le carré. En effet, un carré et un losange de même côté sont deux parallélogrammes de même base, mais le carré a une hauteur plus grande que le losange.

Il est intéressant de noter que le problème des quadrilatères isopérimétriques se résout en deux temps par passage à un problème particulier.

Ce dernier n'est pas notre problème particulier de départ : on tombe sur des losanges et non sur des rectangles.

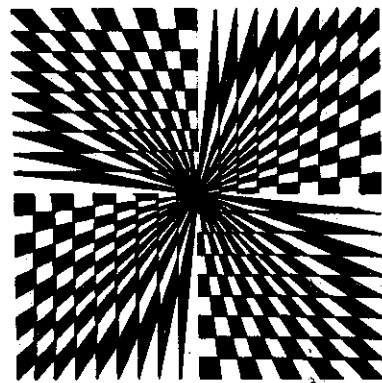
Nous achevons ici un survol de quelques solutions du problème des rectangles isopérimétriques. D'autres perspectives sur ce problème nous apparaîtront bientôt, lorsque nous aurons examiné celui des rectangles isosuperficiels.

Les rectangles isosuperficiels.

Jusqu'ici nous avons considéré des rectangles de même périmètres.

Que devient cette problématique si on échange les rôles du périmètre et de l'aire ?

On pourrait broder sur ce nouveau thème autant de solutions que pour le premier. Nous ne nous attacherons ci-après qu'aux plus significatives.



dessin réalisé au collège MONTESQUIEU - ORLÈANS

On trouvera dans I.Niven [3] une démonstration algébrique de cette même propriété. Cette démonstration est plus longue que celle proposée ci-dessus.

CE N'EST PLUS UNE DROITE.

On superpose les rectangles isoperimétriques⁵ de la même façon qu'on avait superposé les isopérimétriques à la fig.6, ce qui donne la fig.10. On y voit apparaître un arc de l'hyperbole équilatère d'équation $xy=k$, où x et y sont les côtés du rectangle et où k est son aire. (Voir E. Castelnuovo [1]). Les mesures de périmètre sont faciles à faire sur cette figure, et on dégage expérimentalement le carré comme rectangle de périmètre minimal.

Remarque. Ici le périmètre est *minimal*, alors que dans le problème précédent l'aire était *maximale*. Ce n'était pas évident.

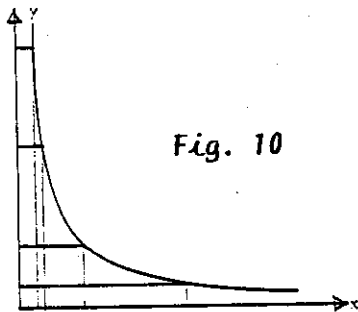
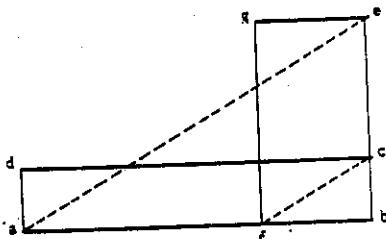


Fig. 10

⁵ Il y a profusion de méthodes pour construire de tels rectangles. Signalons une méthode graphique qui s'appuie sur le théorème de Thalès. Pour construire le rectangle $ebfg$ de même aire que le rectangle $abcd$, le côté eb étant donné, il suffit de construire f tel que

$$\frac{ab}{bf} = \frac{be}{bc}$$



Ce que ce problème a provoqué dans des classes mérite d'être brièvement décrit. Les élèves ont pris conscience progressivement de ce qu'en dépit des analogies, la situation étudiée diffère de la précédente. En s'inspirant de la fig.6, ils ont commencé par superposer des rectangles de même aire, puis ont joint les sommets supérieurs droits par des segments de droite (qui n'étaient pas alignés : étonnement !). Chez certains, la courbe anguleuse ainsi tracée traversait l'axe des x . En multipliant les dessins de rectangles, ils ont débouché sur la courbe de la fig.10 et correctement interprété son comportement asymptotique.

Comme ils l'avaient fait pour le segment dans le problème précédent, ils ont à nouveau (et indépendamment) réalisé ici que les points de l'hyperbole représentaient chacun un rectangle. Ils se sont progressivement rendu compte que l'hyperbole contenait toute l'information du problème.

Ainsi la courbe prend un sens par elle-même. Elle est définie, en termes quotidiens, comme lieu géométrique des sommets de certains rectangles, et non par une équation abstraite, ce qui contribue ainsi à lui donner du sens.

Qui plus est, la différence entre le segment de droite et la branche d'hyperbole montre bien qu'"additionner et multiplier, ce n'est pas pareil..."

CE N'EST PLUS UNE PARABOLE.

Par analogie avec la fig.2, on peut porter sur un diagramme cartésien les périmètres p en fonction des longueurs x des côtés horizontaux, fig.11. La courbe peut être obtenue à partir de points expérimentaux ou tirée de son équation.

$$p = 2\left(x + \frac{k}{x}\right).$$

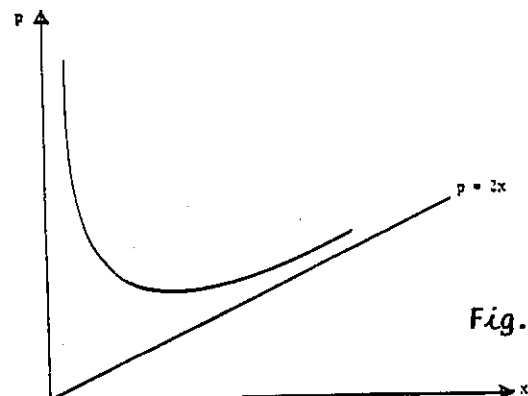


Fig. 11

Cette courbe est une branche d'hyperbole. Au rebours du diagramme de la fig.2, elle a sa concavité vers le haut. Qui plus est, le carré ne correspond pas au sommet de l'hyperbole (alors qu'à la fig.2, il correspondait au sommet de la parabole) : il est à l'abscisse du point d'intersection de $y = x$ et $y = k/x$.

PREMIERE DEMONSTRATION ALGEBRIQUE.

Fort de l'évidence expérimentale obtenue précédemment (fig.10 ou 11), on va tâcher de la démontrer. Si k est l'aire imposée, le côté du carré sera \sqrt{k} . Soit un rectangle de côté $x = \sqrt{k+e}$, où $e > 0$. L'autre côté, y , vaudra $k/(\sqrt{k+e})$, de sorte que l'aire soit aussi égale à k . Cherchons la condition pour que le périmètre de ce rectangle soit plus grand que celui du carré, ou en d'autres termes, la condition pour que

$$\sqrt{k+e} + \frac{k}{\sqrt{k+e}} > 2\sqrt{k}. \quad (1)$$

Or cette inégalité est équivalente à

$$(\sqrt{k+e})^2 + k - 2\sqrt{k}(\sqrt{k+e}) > 0$$

ou encore à $e^2 > 0$. Cette dernière inégalité est toujours réalisée. Donc le rectangle formé, quel qu'il soit, a un périmètre plus grand que celui du carré.

DEUXIEME DEMONSTRATION ALGEBRIQUE.

Rien n'empêche évidemment, au départ du carré d'aire k , de construire un rectangle dont le côté, au lieu de s'écrire sous la forme $x = \sqrt{k+e}$, s'écrive sous la forme, dans le cas présent plus comme, $x = \alpha\sqrt{k}$ où $\alpha > 0$. Alors l'autre côté vaudra $y = \sqrt{k}/\alpha$. L'inégalité (1) sera remplacée par

$$\alpha\sqrt{k} + \frac{\sqrt{k}}{\alpha} > 2\sqrt{k},$$

ce qui est équivalent à

$$(\alpha - 1)^2 > 0,$$

d'où la solution du problème.

QUE FAIRE POUR DIMINUER LE PERIMETRE ?

Si on n'a pas encore identifié le carré comme rectangle de périmètre minimal, on partira d'un rectangle quelconque de côtés x, y avec $x \neq y$ et on cherchera à le modifier pour diminuer son périmètre (procédé analogue à celui

proposé comme première solution algébrique du problème des rectangles isopérimétriques).

Désignons par αx et y/α , $0 < \alpha \neq 1$, les côtés du nouveau rectangle. Y a-t-il moyen de choisir α pour que le périmètre du nouveau rectangle soit inférieur à celui du premier, ou, en d'autres termes, pour que

$$x+y > \alpha x + \frac{y}{\alpha} ?$$

Cette inégalité s'écrit encore

$$\alpha^2 x - \alpha(x+y) + y < 0. \quad (2)$$

Les deux racines du binôme sont 1 et $y/x > 0$. L'inégalité peut donc toujours être vérifiée : il suffit de choisir α entre 1 et y/x . Aucun rectangle non carré n'est donc solution du problème. De plus, le choix de α imposé par la condition (2) rapproche toujours du carré puisqu'il implique soit $y < \alpha x < x$, soit $x < \alpha x < y$.

Le même raisonnement au départ de l'égalité $x = y$ conduit à la même condition (2), mais réécrite cette fois sous la forme

$$\alpha^2 x - 2\alpha x + x < 0,$$

ou encore $(\alpha - 1)^2 < 0$

ce qui est impossible.

EN SE SERVANT DU RESULTAT SUR LES RECTANGLES ISOPERIMETRIQUES

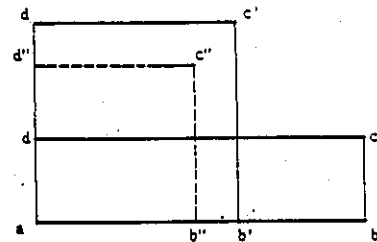


Fig. 12

Fig. 12

Soit un rectangle quelconque $abcd$ (fig.12). Montrons que le carré de même aire a un périmètre plus petit. Du rectangle donné, on passe au carré $ab'c'd'$ de même périmètre. Mais on sait que ce carré a une aire plus grande que le rectangle de départ. Donc le carré $ab''c''d''$ de même aire que le rectangle a un périmètre plus petit que le périmètre commun du rectangle et du premier carré.

Retour aux rectangles isopérimétriques.

L'expérience acquise sur les rectangles isosuperficiels donne un regard nouveau sur les isopérimétriques.

A L'AIDE D'UNE FAMILLE D'HYPERBOLES.

On a vu qu'en rangeant bien les rectangles isosuperficiels, on voit leurs sommets supérieurs droits se placer sur une branche d'hyperbole. Si on recommence pour diverses valeurs de l'aire k imposée, on obtient une famille d'hyperboles comme sur la fig.13.

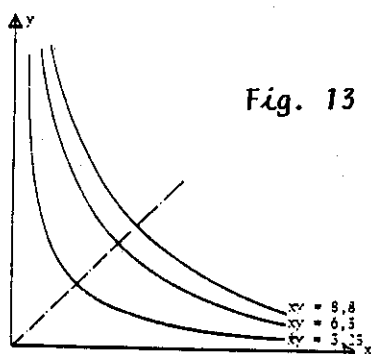


Fig. 13

Ces hyperboles sont symétriques par rapport à la bissectrice des axes x et y , ceci étant dû au fait que x et y sont interchangeables dans le problème posé. Les hyperboles que l'on croise en parcourant la bissectrice dans le sens de la montée (de gauche à droite) correspondent à des aires croissantes. Revenons maintenant à la droite $x+y=K$ représentant les rectangles de périmètre égal à $2K$ (fig.14).

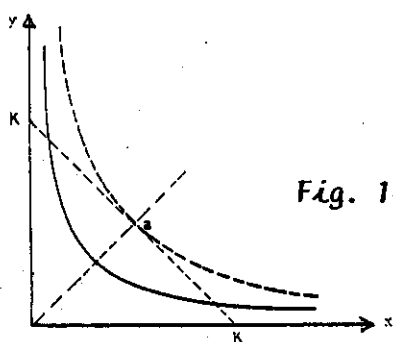


Fig. 14

Si cette droite intersecte une des hyperboles ci-dessus, elle le fait en deux points symétriques par rapport à la bissectrice, ou en un seul point. Trouver le rectangle d'aire maximum revient donc à trouver l'intersection de la droite avec l'hyperbole correspondant à l'aire la plus élevée possible. Cette intersection sera le point de tangence a de la droite avec la seule hyperbole tangente à la droite (elle est dessinée en trait interrompu).

UNE AUTRE MANIPULATION ALGÈBRE.

La "deuxième démonstration algébrique" de la solution du problème des rectangles isosuperficiels inspire la solution suivante du problème des isopérimétriques. Soit $x+y=K$ le demi-périmètre imposé. A partir du carré de côté $K/2$, construisons un rectangle de côtés

$$x = \alpha \frac{K}{2} \quad \text{et} \quad y = K - \alpha \frac{K}{2} \quad (0 < \alpha < 1).$$

L'aire du rectangle sera inférieure à celle du carré si

$$\alpha \frac{K}{2} (K - \alpha \frac{K}{2}) < \frac{K^2}{4},$$

ou encore si

$$(\alpha - 1)^2 > 0$$

ce qui est toujours vrai.

Les élèves laissés libres de travailler....

Loin de nous l'idée qu'il soit utile de faire parcourir à des élèves toutes les solutions ci-dessus des problèmes des rectangles isopérimétriques et isosuperficiels. On n'en finirait pas. Ce qui nous paraît intéressant par ailleurs, c'est de les laisser "chipoter" sur ces problèmes (ou sur d'autres semblables). L'expérience prouve que laissés libres de travailler, ils empruntent rarement les chemins tracés par les mathématiques constituées. Ils inventent toutes sortes de choses que le professeur n'aurait pas vues, car il est aveuglé par les mathématiques qu'il connaît.

Nous n'avons rien voulu faire d'autre ici qu'explorer le champ des réflexions possibles des élèves. Il faut l'avouer, ce champ est extraordinairement varié. Les problèmes d'extrema ont fait surgir une droite, une parabole, des hyperboles et une ellipse. Ils permettent aussi d'introduire les irrationnels. Un mathématicien distraait le rangerait pourtant sans appel parmi ceux qui relèvent du seul calcul différentiel.

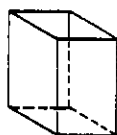
Notons enfin l'intérêt de proposer après le travail sur les rectangles isopérimétriques une exploration très ouverte des rectangles isosuperficiels. C'est pareil sans être la même chose, d'où une belle réserve de surprises ! Les propriétés de l'addition et de la multiplication sont fondamentalement contrastées.

Exercices.

Pour terminer, voici quelques exercices à l'usage des lecteurs intéressés. Mais qu'ils se méfient : certains sont piégés.

1. De tous les rectangles qui ont un périmètre donné, quel est celui qui a la plus petite diagonale ? La plus petite aire ?
2. De tous les rectangles qui ont une aire donnée, quel est celui qui a la plus petite diagonale ? Le plus grand périmètre ?
3. De tous les rectangles qui ont une diagonale donnée, quel est celui qui a le plus grand périmètre ? La plus grande aire ?
5. De tous les parallépipèdes rectangles qui ont des arêtes dont la somme des longueurs est imposée, lequel est de volume maximum ?
6. Plions en quatre des rectangles isosuperficiels (isopérimétriques) parallèlement à un côté, pour obtenir un parallépipède à section carrée sans base (fig.15). Quel est le rectangle qui donne le volume maximum ?

Fig. 15



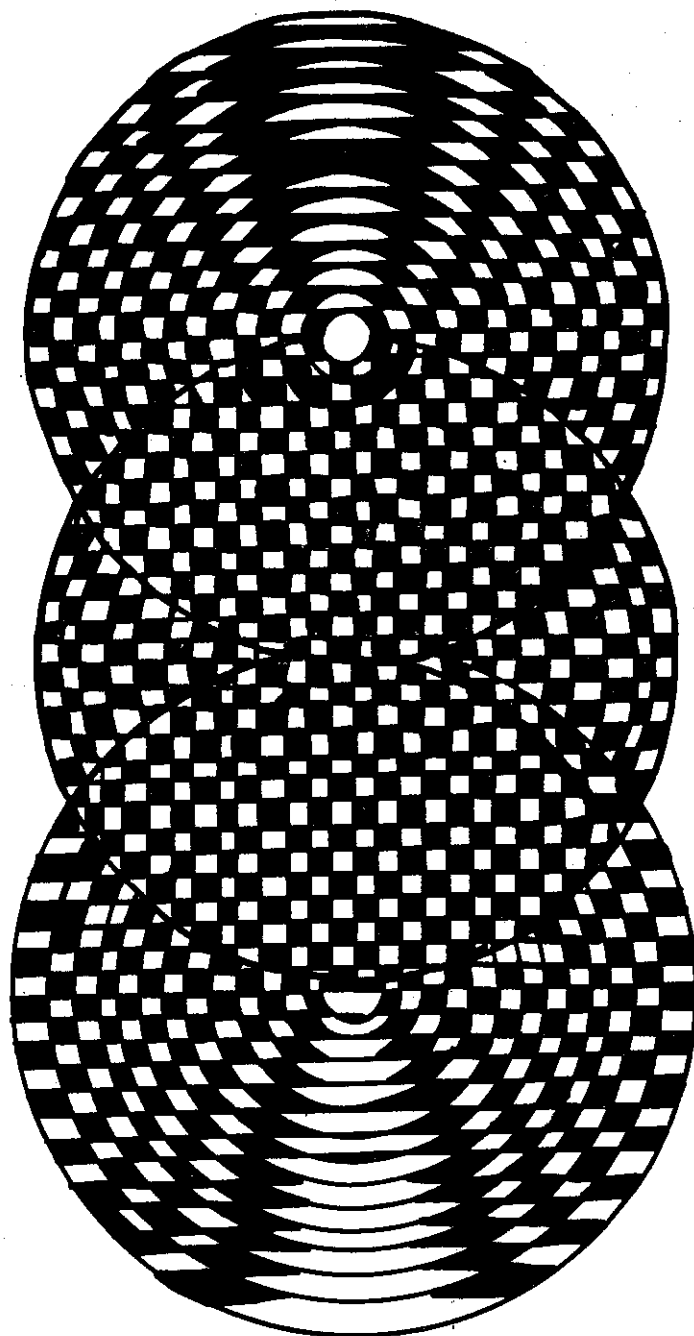
7. De tous les parallépipèdes rectangles de même aire, quel est celui qui a le plus grand volume ?
8. De tous les cercles de même périmètre, quel est celui qui a la plus grande aire ?
9. Trouvez deux nombres connaissant leur somme et leur produit.
10. Inventez vous-même quelques exercices pour stimuler vos élèves ou tromper vos amis.

BIBLIOGRAPHIE.

Le lecteur intéressé trouvera dans I. Niven (3) une foule de problèmes de maxima et de minima traités sans recours à des dérivées et généralement par voie algébrique, et dans G. Polya (4) une vue beaucoup plus large sur les problèmes isopérimétriques en général.

1. E.Castelnuovo, La mathématique dans la réalité, Cedic, Paris 1980.
2. G.Polya, How to solve it ? Princeton University Press, 1945.
3. I.Niven, Maxima and minima without calculus, The Mathematical Association of America, Washington, 1981.
4. G.Polya, Mathematics and plausible reasoning, Princeton University Press, 1954.

Biblio. GEM. Page 18.



dessin réalisé par Virginie BOUREUX

Collège Montesquieu ORLEANS

Notes de lectures

M-Laure DARCHE-GIORGI

Voici deux livres qu'il me brûlait de vous inciter à lire bien que les talents que montre B.Pivot à Apostrophes ne soient pas mon fort.

D'abord le plus ancien paru :

Ivar Ekeland Le Calcul, l'Imprévu

Les figures du temps
de Kepler à Thom

Dans son livre Ivar Ekeland, mathématicien de l'Université Dauphine, nous fait une magistrale démonstration de l'art de vulgariser les connaissances scientifiques. Cette qualité, qui lui a valu le prix J.Rostand 1985, est d'autant plus rare actuellement que peu de scientifiques osent s'y confronter laissant la place aux journalistes dits scientifiques.

Qu'est-ce qu'une théorie scientifique ? Qu'est-ce qu'un modèle mathématique ? L'Univers est-il déterministe ? Y a-t-il encore une part d'imprévu ? A travers le Temps et l'Espace, l'Histoire et la Science, I. Ekeland nous décrit comment les hommes, savants et chercheurs, ont illustré ces questions par des représentations successives, s'appuyant sur des théories mathématiques disponibles à ce moment-là ou créées pour cela.

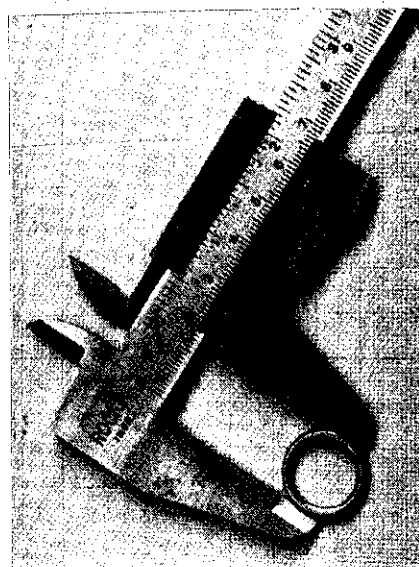
Du mouvement des astres et des planètes à la théorie des catastrophes, l'auteur nous fait évoluer des premières théories scientifiques du type déterministes (Aristote de Samos, Copernic, Kepler, ...) aux théories actuelles plus aléatoires ! La théorie des catastrophes de Thom mais aussi les attracteurs étranges et les problèmes et découvertes qui en découlent.

Pour les enseignants de Lycée, il nous propose même une annexe sur la constante de Feigenbaum qui pourrait faire un excellent thème de travail dès la seconde débouchant sur une réflexion scientifique qui est loin d'être inintéressante (du type petites causes - grands effets).

Seuil

g.th.guilbaud

leçons d'à peu près



CHRISTIAN BOURGOIS EDETEUR

3

Dans ce livre G.Th. Guilbaud nous donne de "rigoureuses" leçons d'à peu près, montrant à travers l'histoire que la rigueur mathématique est plus liée aux problèmes d'approximation qu'à l'établissement de "vérités" dites "mathématique".

Exemples en sciences sociales :

"Vérité des chiffres : ... la vérité, s'il y en a une, c'est qu'il n'y a pas dans ce domaine de certitude statistique. Chacun, dès lors, peut se risquer à avancer son propre chiffre. Avec les réserves d'usage, celui qu'on peut estimer le plus juste, ou le moins inexact, tourne autour de quatre millions, sans doute un peu moins..."

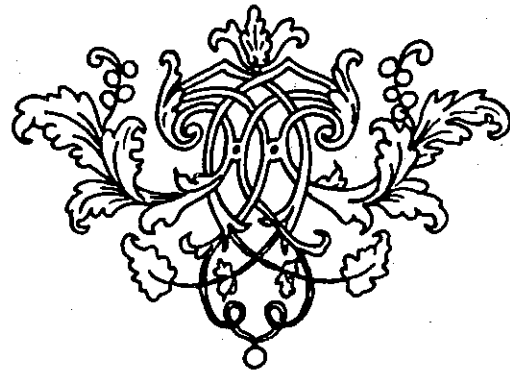
En astronomie (ou l'on retrouve Ekeland)

"L'orbite d'un satellite artificiel est, en première approximation, une ellipse ; les orbites sont liées entre elles par la troisième loi de Kepler, ici pratiquement rigoureuse, les masses des satellites étant négligeables devant celle du corps central..."

En mathématique où l'auteur cite Dieudonné (calcul infinitésimal, Hermann, 1968)

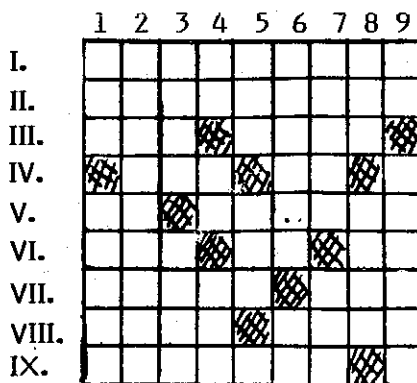
"Il faut avoir appris à distinguer ce qui est grand de ce qui est petit, ce qui est prépondérant de ce qui est négligeable. En d'autres termes, le calcul infinitésimal est l'apprentissage du maniement des inégalités bien plus que des égalités, et pourrait se résumer en trois mots : Majorer, Minorer, Approcher."

A travers son livre G.Th. Guilbaud, nous donne une mine d'idées, d'activités numériques pour la classe. En commençant par pi noté π depuis ... (combien de) siècles ? en passant par les racines carrées, cubiques, les élections (et oui encore !) et les harmonies musicales. Vous y trouverez toute une série de problèmes itératifs et récursifs que vos élèves pourront aborder avec leurs calculatrices (mais en ont-ils encore) ou leurs micros !



Mots CROISES

Michel LABROUSSE - Limoges



Horizontalement.

- I. Donnâmes une note, par exemple -
- II. Qualifie un produit.
- III. Un cas à ordonner - Comme certain point.
- IV. Va avec que dans les hypothèses.
- Initiales d'un mathématicien grec qui fournit une solution à la duplication du cube.
- V. Début de normale - Celui du bien est le mieux.
- VI. Marchera - In extenso - A un nombre.
- VII. Qualifie un produit - Adjectif cardinal.
- Utilisé dans certain produit.
- VIII. Prix Nobel de physique (1970).
- IX. Peut être un cercle vu en projection.

Verticalement.

1. Grecque - Inversé : permet de conclure.
2. Qualifie un produit.
3. Est formée d'un nombre impair d'arcs de cercle.
- Mathématicien (1802-1829).
4. Deux de plus - Article - Son communes à relation et à Bernoulli.
5. Inversé : Parfois responsable d'échecs
- Utilise peut-être un connecteur.
6. Son fil pourrait servir dans une démonstration.
- Consonnes de base.
7. Qualifie un produit - La fin d'un module.
8. Voyelles pour élèves - Préfixe pour morphisme.
9. Initiales pour Lang - Qualifie un produit.



De la GEOMETRIE ... à l'INFORMATIQUE au C.M.

J. BELLICAUD - Poitiers

I.P.T., I.P.T. ; Voici un exemple vécu de ce que l'outil informatique peut apporter aux praticiens pour favoriser l'apprentissage des mathématiques dans un contexte d'adaptation progressive au matériel. Nous espérons que le "Plan Informatique Pour Tous" apportera aux enfants cet intérêt mathématique, que les stagiaires I.P.T. auront l'idée de nous envoyer des articles sur leurs expériences d'utilisation.

L'outil informatique va-t-il permettre de faire enfin autre chose que du calcul à l'école primaire ? (Lire, écrire, compter, voir et comprendre !).

Extrait des J.O. du 18 juillet 1980
(B.O. n° 31 du 11.9.1980).

7. Activités géométriques.

..... Pour différents objets géométriques (solides, surfaces ou lignes) :

Les reproduire

Les décrire et les représenter

Les construire à partir d'une description ou d'une représentation.."

Ces quatre termes utilisés : reproduire, décrire, représenter, construire ont, semble-t-il, été source de discussions, voire de malentendus. La lecture des Instructions pédagogiques qui accompagnent les objectifs conduit aux précisions suivantes :

Reproduire : C'est produire une copie conforme quelles que soient les techniques utilisées et indépendamment du matériel.

Décrire : C'est "faire passer" par écrit ou oralement un message permettant de reconnaître un objet géométrique figurant dans une collection ou de la construire.

Représenter : C'est représenter à l'aide de procédés graphiques, les représentations conventionnelles ne devant pas être les seules à privilégier.

Construire : C'est reproduire mais en ne possédant de l'objet géométrique qu'une description ou une représentation et non l'objet lui-même.

Le compte rendu ci-après est la relation d'activités pratiquées dans la classe de Monsieur Thebault - CM2. Ecole de Lusignan et relatives à des activités de description et de construction.

Activités déjà réalisés : Les enfants ont été familiarisés avec les différentes pièces du tangram (parallélogramme, trian-

gle rectangle isocèle, carré) et ont travaillé durant quatre séquences sur les activités proposées dans le livre "Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire".

CM. Tome 3" Editions Sermap-Hatier, p.165 et suivantes : Activités de reproduction.

Extrait du "Livre de Poche" de juin 1985 (dit "programme Chevènement").

B. Géométrie

Reproduction, description, représentation et construction de différents objets géométriques (solides, surfaces, lignes).

Application à des objets géométriques des transformations ponctuelles (translation, rotation, symétrie) :

Utilisation des instruments : papier-calque, papier quadrillé, règle, équerre, compas, gabarit.

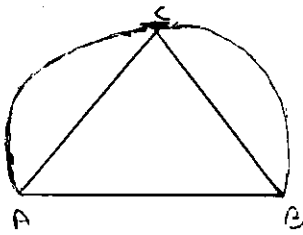
Mise au point des techniques de reproduction et de construction : report de distances ; reproduction, agrandissement ou réduction d'un dessin fait sur fond quadrillé ; tracé de parallèles ou de perpendiculaires.

Utilisation d'une syntaxe logiquement articulée et d'un vocabulaire géométrique : cube, arête, sommet, face, sphère, boule, triangle, quadrilatère, parallélogramme, rectangle, losange, carré, côté, diagonale, cercle, disque.

I. ACTIVITES DE DESCRIPTION

Consigne donnée : Que donner comme message à un camarade pour qu'il puisse construire un triangle rectangle isocèle ou un carré ou un parallélogramme ?

Les enfants travaillaient par deux et tiraient au sort la figure à décrire en vue de sa construction.



Exemples d'instructions données :

Construire un triangle rectangle isocèle.

1. "Prendre le compas et tracer un demi-cercle. Ensuite prendre la moitié du demi-cercle et tracer une ligne de la moitié du demi-cercle jusqu'à la fin du demi-cercle et faire pareil de l'autre côté."

Ces instructions avaient pour but d'obtenir le triangle rectangle isocèle ! ABC.

Remarque.

Pour un correspondant ignorant tout, on peut se demander quelle est la méthode utilisée pour construire le point : moitié du cercle.

2. "Tracer un segment de 6 cm, prendre l'équerre et tracer un autre segment de 6 cm perpendiculaire à une extrémité du premier et rejoindre les deux extrémités".

Construire un carré.

1. "Prendre l'équerre et tracer l'angle droit. Ensuite prendre le double décimètre et mesurer 5 cm à partir de l'angle droit. Mettre une marque où s'arrête la mesure, qui est l'angle droit. Ensuite retracer un angle droit et reprendre le double décimètre et remesurer 5 cm qui s'arrête à un angle droit. Refaire une marque et faire ce petit manège 4 fois. Prendre la règle et tracer les segments".

Remarque.

Essayez ! Vous risquez de ne pas tourner sur un manège de chevaux de bois mais plutôt de tourner en bourrique.

2. Prendre une mesure de 4 cm sur le double décimètre à l'aide compas et faire un cercle. Le cercle fait tracer avec la règle une ligne verticale en passant par le milieu du cercle. Ensuite tracer avec la règle une ligne horizontale passant encore par le milieu du cercle. Rejoindre les extrémités. Vérifier avec l'équerre si les angles sont bien droits.

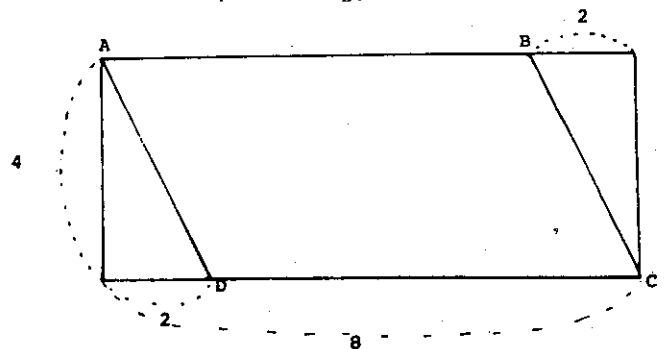
Remarque.

La ligne verticale et la ligne horizontale ne sont pas définies comme étant perpendiculaires.

Construire un parallélogramme.

A l'aide d'une équerre et double décimètre tracer un rectangle. Pour faire le rectangle tracer deux lignes horizontales faisant 8 centimètres et ayant quatre centimètres d'écart puis deux droites qu'on met au bout des droites de 8 centimètres et qui font quatre centimètres. Mesurer 2 centimètres en partant d'un angle droit et sur une droite de 8 centimètres et tracer une droite allant vers le sommet le plus proche et vers le haut. Faire la même chose de l'autre côté mais il faut prendre le sommet en bas et les deux centimètres en haut.

Ces instructions devaient permettre d'obtenir le parallélogramme ABCD.



Ces cinq exemples reflètent assez exactement les possibilités des enfants de cette classe : aucun message n'est suffisamment simple et précis pour permettre une construction rigoureuse ; un seul message présente une généralisation de la

construction (voir exemple 1 du carré), les autres faisant tous appel à des mesures.

Remarques.

- Lignes horizontales et "verticales" sont les termes utilisés pour désigner les droites perpendiculaires mais celles-là ne sont jamais tracées en utilisant l'équerre mais "à vue d'œil".
- Les termes géométriques utilisés ne sont pas toujours employés dans leur véritable sens.

Pour conduire jusqu'au bout notre travail il aurait été nécessaire de transmettre effectivement ces messages à d'autres enfants de l'école, par exemple, pour vérification. Les "émetteurs" auraient sans doute rapidement perçu l'impossibilité de réaliser la construction attendue. Des problèmes matériels et surtout des problèmes de temps ne nous ont pas permis ces réalisations.

II. ACTIVITES DE CONSTRUCTION.

La question suivante se posait alors : Pourquoi les enfants à qui l'on demande de construire un carré (ou un triangle rectangle isocèle ou un parallélogramme) sont-ils capables de le réaliser alors qu'il leur est impossible de donner les instructions nécessaires à cette exécution ?

En réponse à cette interrogation ayant émis l'hypothèse que les enfants étaient sans doute gênés par le fait de devoir s'exprimer par écrit (et peut-être bloqués par l'orthographe ou le vocabulaire "technique") nous décidâmes d'introduire le langage Informatique Logo (géométrie de la Tortue) langage qui devait conduire les élèves à programmer fictivement la construction des figures précédemment citées.

C'est ainsi que nous avons commenté aux enfants :

"Vous allez imaginer un "traceur" appelé "Tortue", représenté par le dessin dont la pointe située sur une base du triangle laisse une trace en se déplaçant (exemple donné au tableau) et à laquelle nous pouvons donner les ordres suivants :

AVANCE - RECALE - TOURNE A DROITE - TOURNE A GAUCHE. La "Tortue" au départ a toujours le sommet opposé à la pointe orienté vers le haut. Chaque ordre doit être suivi d'un nombre indiquant de "combien" on avance ou recule

ainsi que de "combien" on tourne. (Le mot "combien" est resté volontairement très vague).

Consigne : Quels sont les ordres à donner afin que la "Tortue" dessine un carré ?

Les résultats furent, dès le départ, assez encourageants. La seule difficulté pour les enfants a été de bien comprendre que, en ordonnant, "TOURNE A DROITE" ou "TOURNE A GAUCHE" la "Tortue" ne se déplaçait pas mais s'orientait seulement.

Quelques programmes obtenus :

1. Avance 6 pas. Tourne à droite. Avance 6 pas. Tourne à droite. Avance 6 pas. Tourne à droite. Avance 6 pas.
2. Avance 8 pas. Tourne à droite un quart. Avance 8 pas. Tourne à droite un quart. Avance 8 pas. Tourne à droite un quart. Avance 8 pas.

Remarque.

La majorité des groupes ignorant de "combien" il fallait tourner n'indiqua rien, 3 groupes écrivirent : tourne à droite un quart.

Nous avons alors précisé : lorsque le "machine" doit prendre une direction perpendiculaire à la dernière ligne tracée il suffit de lui ordonner : "tourne à droite 90" ou bien "tourne à gauche 90". L'angle droit est alors reconnu.

Les rectifications nécessaires sont immédiates.

Quelques exemples de la programmation d'un rectangle.

1. Avance 10 - à gauche 90 - avance 20 - à gauche 90 - avance 10 - à gauche 90 - avance 20.
2. Avance de 6 pas - droite 90 - avance de 10 pas - droite 90 - avance de 6 pas - droite 90 - avance de 10 pas.

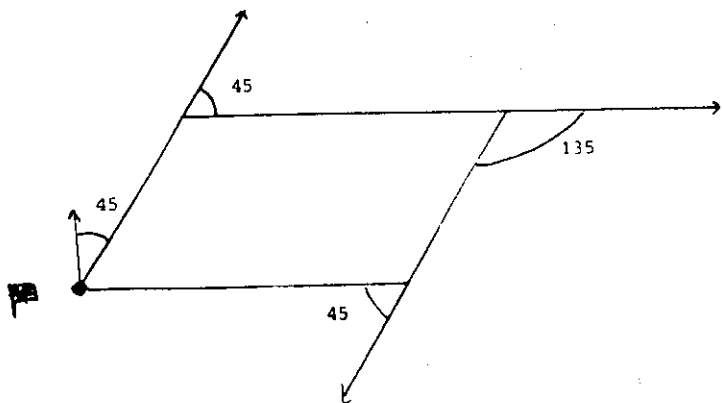
Précisons ici :

- 1^o) Que chaque programme établi était soumis à validation par un groupe "récepteur" jouant le rôle de la "Tortue".
- 2^o) Que, bien que nous n'ayons fait aucun commentaire, la traduction de "avance 10" ou "avance 6 pas" a toujours été "avance 10 cm, ... 6 cm ...". Ceci montre bien que le centimètre est l'unité que les enfants appréhendent le mieux.

Quelques difficultés sont apparues pour la programmation du parallélogramme : en effet les enfants ont immédiatement

ment compris la non-performance des ordres : "tourne à droite (ou à gauche) 90". Il y avait là situation de recherche et l'observation du parallélogramme a amené les enfants à reconnaître que deux angles ne représentaient que la moitié du quart de tour, à savoir la moitié de l'angle droit ($90:2=45$). Après une période de tâtonnements et d'essais, en se référant souvent à la pièce réelle, la programmation du parallélogramme est réussie par 3 groupes : (cette synthèse est réalisée au tableau par les enfants des groupes ayant réussi : les autres exécutent les ordres donnés sur leur feuille).

Tourne à droite 45 - Avance 4 -
Tourne à droite 45 - Avance 6. Tourne à droite 135 - Avance 4 - Tourne à droite 45 - Avance 6.



(Les flèches sont ajoutées ici pour la bonne compréhension).

Il est important de noter que pour prendre ces différentes directions les enfants n'ont pas utilisé le rapporteur mais une équerre en papier obtenue par pliage ; c'est cette même "équerre en papier" qui, encore pliée en deux permet de déterminer les mesures 45 et 135 ($90+45$). L'unité de mesure du secteur angulaire : le degré, n'a pas fait partie du vocabulaire utilisé : 90, 45 et 135 sont restés des mesures "vagues", notre idée étant de reprendre ces nombres dans des séquences ultérieures sur l'observation, la fonction et l'utilisation du rapporteur.

Nous avons normalement poursuivi ces travaux en demandant la programmation du triangle rectangle isocèle.

Nous devons dire qu'il nous a alors été nécessaire de fournir les données suivantes : mesure des côtés de l'angle droit 6 - mesure de l'hypoténuse 8,5.

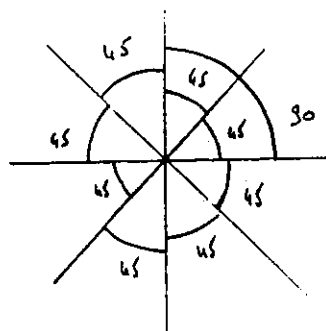
Quelques programmes obtenus :

- Avance 6, à droite 135, avance 8,5, à droite 135, avance 6.
- A gauche 45, avance 8,5, à gauche 135, avance 6, à gauche 90, avance 6.
- Avance de 6 pas - à droite 90 - avance de 6 pas - à droite 135 - avance 8,5.

Dix groupe sur treize ont présenté un programme réalisable et correct.

Ce genre de travaux n'a-t-il pas préparé les notions de secteur angulaire complémentaire et de secteur angulaire supplémentaire ?

Sur proposition d'un enfant qui réalisait au tableau le dessin suivant :



nous avons organisé des jeux d'équivalence :

DR 225 DR 45 GA 90 c'est DR
ou GA

DR 180 GA 45 GA 45 GA 90 c'est
ou

Nous avons ainsi défini :

DR 360, GA 360, c'est "rien".

L'apothéose ! Le vendredi 18 février (C'était avant le projet Fabius d'IPT !) le micro-ordinateur arriva réellement à l'école et les enfants purent effectivement tester leurs programmes.

Que M.Guignard, professeur de mathématiques à l'E.N. de Poitiers, et l'IREM de Poitiers soient ici remerciés pour avoir permis cette journée.

Les enfants ont été répartis par groupes de 4 et chaque groupe a passé environ une heure (c'est bien peu !..) devant le micro-ordinateur. Sensibilisés théoriquement par les travaux précédents ils ont immédiatement testé les programmes déjà écrits qu'ils avaient, sur notre demande, conservés.

Ils se sont bien vite pris au jeu et ont désiré programmer d'autres figures. Lorsqu'un groupe avait établi son programme il venait demander sa valida-

tion par la "tortue" puis "retournait" le rectifier, le cas échéant.

Il n'est pas possible de livrer ici toutes les réflexions, remarques, travaux de cette journée mais celle-ci fut passionnante pour les enfants et pour nous-mêmes.

Les enfants ont pris conscience de certaines réalités (ex. le centimètre n'est pas la seule unité possible : avance 10, correspondant à un trait d'une mesure de 1 cm environ, sur l'écran utilisé, et non pas 10 cm) et de leurs manques : la connaissance de la mesure des angles en particulier.

Nous précisons que les enfants ont travaillé toute la journée sur le mode pilotage, à savoir : après chaque instruction (ou série d'instructions écrite sur la même ligne) la frappe sur le calvier de la touche "Return" donne à la "Tortue" l'ordre d'exécuter immédiatement cette (ou ces) instruction(s).

Avant de nous séparer, lors de la dernière demi-heure, nous avons regroupé tous les enfants et nous avons montré que "la machine" pouvait aussi tracer des cercles, "retenir en mémoire" certaines constructions....

CONCLUSION

Outre le fait que la géométrie apparaisse comme quelque chose à faire plutôt qu'à apprendre (qu'il est regrettable de n'avoir pu poursuivre cette "expérimentation" ! ...) nous n'avons pas vu de meilleure conclusion à apporter que celle alimentée par différentes réflexions des enfants :

"Cette journée a été très bien car elle nous a appris à nous servir d'un ordinateur car cela pourrait nous servir quand on sera grand. Mais c'est très difficile car pour faire une forme telle que le triangle il faut trouver les angles et cela nous a pris beaucoup de temps à moi et à mon groupe".

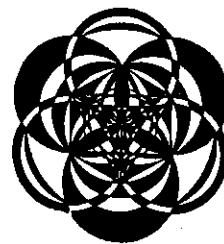
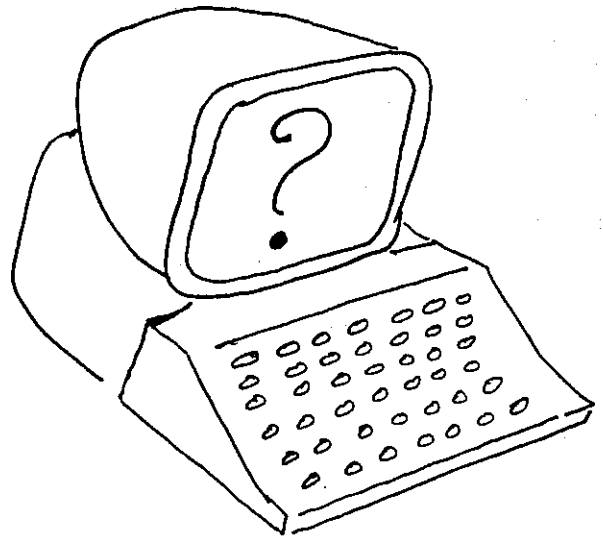
"C'était un jour d'école très bien ; mais ce que j'ai préféré c'est quand mon groupe et moi nous allions à la machine. Nous parlions, nous programmions, c'était très passionnant, surtout que c'était la première fois que je tapais sur un ordinateur."

"Cette journée m'a plu, on allait à tour de rôle dans la pièce où était la machine, c'était très intéressant. La première fois, ça fait drôle d'avoir un ordinateur en face de soi. Je voudrais bien qu'on recommence une autre fois ! ..."

"C'était bien parce qu'on voyait si on faisait des fautes."

"J'ai bien aimé cette journée avec l'ordinateur quand on appuyait sur les touches mais surtout quand vous (les animateurs) vous avez fait le rond. Je me demande comment vous avez fait et aussi l'étoile. Pour le rond ça devrait être difficile. Je ne pensais pas pouvoir faire le moulin non plus c'était vraiment une belle journée."

"J'ai bien aimé la journée du vendredi parce que nous avons pu lui donner quelque chose à faire à l'ordinateur. Il a fait ce qu'on lui a dit."



Publications du G.E.M.

- Dossier 1.** Une expérience d'enseignement mathématique à l'école professionnelle, 1979, 22 pages, Prix : 40 FB
Apprendre à localiser, repérer, situer.
- Dossier 2.** Une géométrie pour tous les jours. (Axiomatique et enseignement de la géométrie). Deuxième édition, 1981, 104 pages. Prix 130 FB.
Pourquoi enseigner la géométrie à partir de situations ouvertes.
- Dossier 3.** L'archipel des isométries. Essai de redécouverte, 1982, 288 pages. Prix 480 FB.
Livre destiné aux professeurs mais contenant des fiches de travail pour les élèves. Archipel formé d'îlots déductifs construits avec les élèves. La relation des mathématiques au quotidien et les étapes de la construction d'un savoir mathématique.
- Propositions 1.** Le groupe d'enseignement mathématique, 1981, 13 pages. Prix 30 FB.
Description et fonctionnement du GEM qui pratique l'enseignement des maths dans son insertion sociale réelle et complète en isolant le moins possible le champ de sa réflexion et de son action.
- Propositions 2.** Rencontres avec l'infini, 1981, 44 pages, Prix 100 FB.
Quatorze problèmes de difficulté croissante sur les suites et les séries.
- Propositions 3.** L'outil vectoriel, 1981, 21 pages. Prix 60 FB.
Cet outil est créé sur des chantiers de démonstration de théorèmes sur les transformations planes.
- Propositions 4.** Les fonctions c'est aussi autre chose ... 1981, 44 pages, Prix 100 FB.
Une fonction c'est bien plus qu'un ensemble de couples.
Contient beaucoup de matériaux pour enseigner concrètement les fonctions.
- Propositions 5.** Fouetter un chat avec une droite, 1981, 24 pages, Prix 75 FB.
Le concept de droite ne va pas de soi : au fil tendu à la droite axiomatique.
- Propositions 6.** Une isométrie de l'espace vue à basse, moyenne et haute altitude, 1982, 24 pages, Prix 80 FB.
- Proposition 7.** Activités géométriques pour les écoles professionnelles ... et les autres, 1982, 63 pages, Prix 150 FB.
- Proposition 8.** Ecrire des mathématiques, 1983, 24 pages, Prix 100 FB.
Ou l'art de présenter des mathématiques par écrit et avec des figures évocatrices.
- Proposition 9.** Des élèves responsables, c'est possible, 1984. 10 pages, 40 FB.
Une enseignante explique comment, depuis des années, elle a mis la bride sur le cou des élèves, ce qui les a fait galoper dans la matière.
- Proposition 10.** Mesures, pavages et nombres irrationnels, 1985, 52 pages, 100 FB.
Les nombres irrationnels découverts dans un contexte géométrique et historique.
- M.Peltier, N.Rouche, M.Manderick, Contremanuel de statistique et probabilité,** 1982, 210 pages, Prix 530 FB.
Initiation théorique introduite par des exemples multiples et socialement importants.
- La géométrie sur le terrain des élèves.** Actes du colloque inter-IREM de géométrie de mai 1983, 1984. 163 pages. Prix 200 FB.
Une douzaine d'auteurs présentent des expériences d'enseignement de la géométrie dans diverses classes de France et de Belgique.

Méthodes numériques et Sc. PHYSIQUES

J-CI. TRIGEASSOU - Poitiers

L'auteur, chercheur au Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle de l'Université de Poitiers, retrace, ici, l'exposé qu'il a fait aux membres de la Régionale APMEP de Poitiers en décembre 1984.

Les trois exemples présentés (comportement transitoire d'un circuit RC, pendule pesant avec frottements, équation de la chaleur) permettent de dégager les principaux avantages pédagogiques des méthodes numériques par rapport aux solutions analytiques traditionnelles :

- simplification de l'étude mathématique
- problème traité dans son intégralité sans simplification préalable
- rapidité de calcul permettant le test d'un grand nombre de solutions.
- présentation graphique directe des résultats.

Langage : indifférent, **Type d'ordinateur :** calculatrice programmable, micro-ordinateur, etc.....

L'enseignement des sciences physiques est fortement dépendant de l'outil calcul à la disposition de l'élève. Jusqu'à ces dernières années, ne disposant au mieux que de la règle à calcul, le physicien ne traitait de problèmes que sous forme analytique, le recours au calcul étant limité aux classiques applications numériques. A présent, grâce aux moyens informatiques capables d'effectuer un très grand nombre d'opérations arithmétiques par seconde, le physicien peut traiter les mêmes problèmes à l'aide de méthodes numériques (comme cela se pratique depuis longtemps déjà en recherche).

Les avantages pédagogiques résultant de leur emploi sont nombreux et attrayants :

- les méthodes numériques s'expliquent beaucoup plus simplement que les méthodes analytiques, un élève de première devient ainsi capable de résoudre un équation différentielle du 1er ordre.
- le problème physique peut être traité dans son intégralité, sans hypothèse simplificatrice préjudiciable.
- la rapidité de calcul permet de tester un grand nombre de solutions par variation de paramètres ou de conditions initiales.
- la solution est obtenue sous forme graphique, au lieu d'une expression mathématique qui reste toujours plus ou moins ésotérique pour nos élèves.

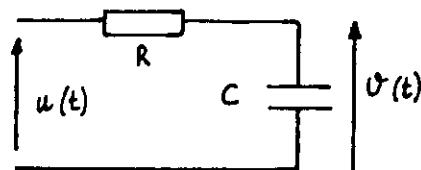
- le programme des matières étudiées peut être étendu à des sujets traditionnellement écartés à cause de leur difficulté mathématique.

Nous allons illustrer ces quelques points par trois exemples : circuit RC, pendule pesant et équation de la chaleur.

1. RESOLUTION NUMERIQUE D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES.

A. Comportement transitoire d'un circuit RC.

1. Présentation.



Soit à déterminer $v(t)$ connaissant R , C et $u(t)$. Le comportement de ce circuit est régi par l'équation différentielle :

$$u(t) = RC \frac{dv(t)}{dt} + v(t)$$

ou

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{u(t) - v(t)}{RC}$$

2. Solution numérique.

Il existe une solution analytique à ce problème, relativement facile à établir en fin de terminale. Cependant, en utilisant simplement la définition de la dérivée

(niveau lère), on transforme cette équation différentielle en équation récurrente (méthode d'Euler).

$$\frac{dv(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} \right)$$

Soit en définissant $h = \Delta t$;

$$t_n = n \cdot \Delta t ; v_n = v(n \cdot \Delta t)$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{v(t) - v(t-h)}{RC} \implies \frac{v_{n+1} - v_n}{h} \approx \frac{v_n - v_{n-1}}{RC}$$

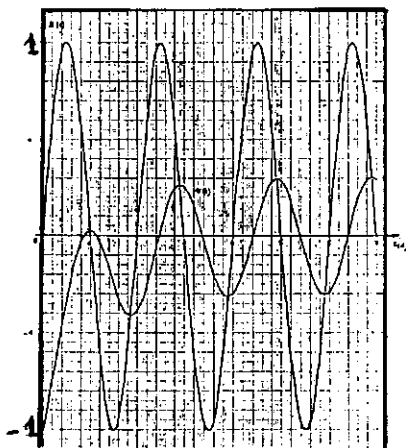
ou

$$t_{n+1} = t_n + h ; v_{n+1} \approx v_n \left(1 - \frac{h}{RC} \right) + u_n \frac{h}{RC}$$

La solution $\{v_n\}$ ainsi obtenue est approchée, sa précision est d'autant meilleure que $h \rightarrow 0$. Le calcul de v_n ne fait intervenir que des opérations arithmétiques élémentaires, sa programmation en est très simple. Le niveau mathématique nécessaire à la compréhension de cet algorithme le rend parfaitement accessible à des élèves de terminale ou de première.

3. Exemple.

Si $u(t)$ est une ddp sinusoïdale ($u(t) = U_M \sin(\omega t + \varphi)$), on traite le problème de l'établissement d'un régime sinusoïdal forcé dans un circuit RC (rarement étudié mais néanmoins fondamental).



Supposons que le condensateur soit initialement chargé ($v(0) = -2$ V), alors on met parfaitement en évidence l'existence d'un régime transitoire (modifiable par la condition initiale). Après quelques oscillations, on obtient le régime forcé dont on peut facilement vérifier les caracté-

ristiques ($U_M = 0,607$ V, $v(t)$ en retard sur $u(t)$ de 72°) par la méthode de Fresnel.

$$\tau = RC = 1 \text{ s}$$

$$T = 2 \text{ s} ; \omega = \pi \text{ rad/s}$$

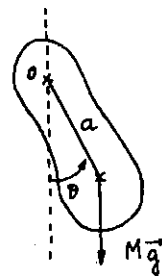
$$U_M = 2 \text{ V} ; \varphi = 0$$

$$h = 0,01 \text{ s}$$

B. Pendule pesant.

1. Présentation.

Dans le cas du circuit RC, il existe une solution analytique pour des excitations simples. Par contre pour le pendule pesant, on ne peut obtenir une solution analytique que dans l'approximation des petites amplitudes ($\sin \theta \approx \theta$) et pour le frottement fluide. Si on veut traiter le cas général (grandes amplitudes, frottements sec et fluide) on obtient une équation différentielle non linéaire :



$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mga \sin \theta + \varepsilon C - k_1 \frac{d\theta}{dt}$$

J = moment d'inertie

M = masse

$\varepsilon = -(\text{signe de } \frac{d\theta}{dt})$

C = couple constant de frottement sec

k_1 = constante de frottement fluide.

2. Solution numérique.

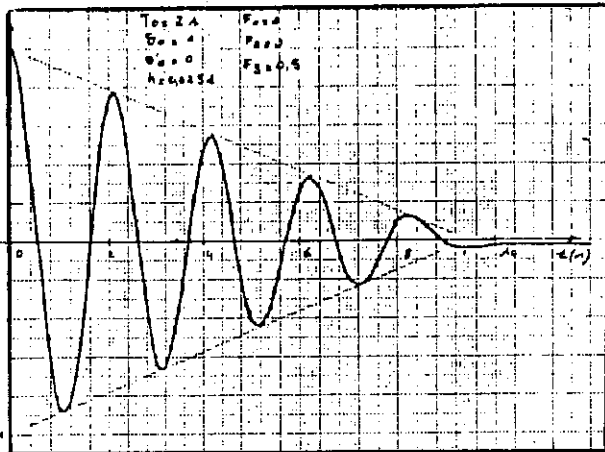
En posant $\{y = \theta ; \gamma = \frac{d\theta}{dt}\}$ on transforme cette équation du 2ème ordre en un système de 2 équations différentielles du 1er ordre :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \gamma \\ \frac{d\gamma}{dt} = -\frac{Mga}{J} \sin y + \varepsilon \frac{C}{J} - \frac{k_1}{J} \gamma \end{cases}$$

Comme précédemment, on peut résoudre ce système différentiel par la méthode d'Euler. En pratique, on améliore la précision et le temps calcul en utilisant un algorithme plus perfectionné, mais basé sur le même principe, tel que Runge Kutta d'ordre 4 (RK4).

3. Exemple.

A titre d'illustration, nous présentons la réponse du pendule pesant avec frottement sec, déterminé grâce à l'algorithme RK4 pour $T_0 = 2$ s



$$\omega_0^2 = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 = \frac{Mga}{J}$$

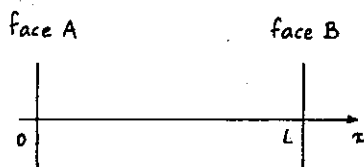
$$\frac{c}{J} = 0.5 ; k_1 = 0 ; h = 0.025 s$$

Ainsi, les méthodes numériques permettent de traiter un problème fortement non linéaire, de tester différentes hypothèses (élongation et vitesse initiales), frottements sec et fluide) grâce à un algorithme simple et facilement programmable.

II. RESOLUTION NUMERIQUE D'EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES : EQUATION DE LA CHALEUR.

a) Présentation.

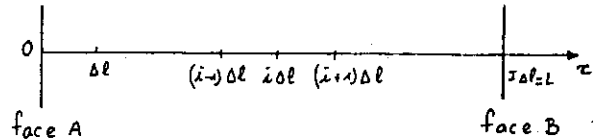
Les problèmes précédents, grâce à des hypothèses simplificatrices, font depuis longtemps partie de notre enseignement. Par contre, les problèmes physiques régis par des équations aux dérivées partielles en sont exclus (en majorité) à cause de la difficulté mathématique de leur résolution. Envisageons, à titre d'exemple, l'équation de la chaleur.



Soit un mur d'épaisseur L. La répartition initiale de la température est connue. On s'impose la température des faces A et B.

On doit déterminer la répartition de température à un instant quelconque ($\theta(x, t)$) sachant que θ vérifie l'équation de la chaleur $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = a \frac{\partial \theta}{\partial t}$

b) Solution numérique.



Le mur est découpé en I éléments

$$\Delta l \quad (L = I \cdot \Delta l)$$

Au point $x_i = i \cdot \Delta l$, on utilise l'approximation de la dérivée seconde d'espace

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \approx \frac{\theta(i+1, t) - 2\theta(i, t) + \theta(i-1, t)}{\Delta l^2}$$

$$\text{Alors l'équation } \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = a \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

est transformée en un système de I-1 équations différentielles du 1er ordre :

$$\frac{\partial \theta(i, t)}{\partial t} \approx \frac{1}{a \Delta l^2} [\theta(i+1, t) - 2\theta(i, t) + \theta(i-1, t)]$$

i variant de 1 à I-1

On intègre facilement ce système en utilisant la méthode d'Euler, soit :

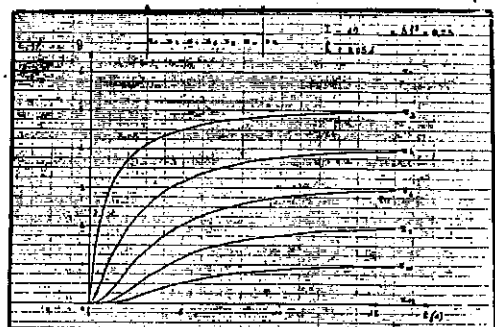
$$\theta(i, m+1) \approx \theta(i, n) + \frac{h}{a \Delta l^2} [\theta(i+1, n) - 2\theta(i, n) + \theta(i-1, n)]$$

i variant de 1 à I-1

i = indice d'espace, d'incrément Δl
n = indice de temps, d'incrément h.

c) Exemple.

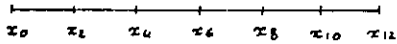
Dans ce système d'équations récurrentes, la répartition initiale de température définit la condition initiale $\theta(i, 0)$, les conditions aux limites (faces A et B) imposent $\theta(0, n)$ et $\theta(I, n)$



Soit :

$$\vartheta(i, 0) = 0 \quad \forall i$$

$$\left. \begin{array}{l} \vartheta(0, n) = 6 \\ \vartheta(I, n) = 0 \end{array} \right\} \forall n$$



$$I = 12 \quad \alpha \Delta t^2 = 0,25$$

$$h = 0,05 \Delta$$

Ainsi, un problème régi par une équation aux dérivées partielles est transformé en un système équivalent d'équations récurrentes : cette simplification mathématique permet, pour cet exemple, d'aborder l'enseignement des transferts dynamiques de chaleur.

CONCLUSION.

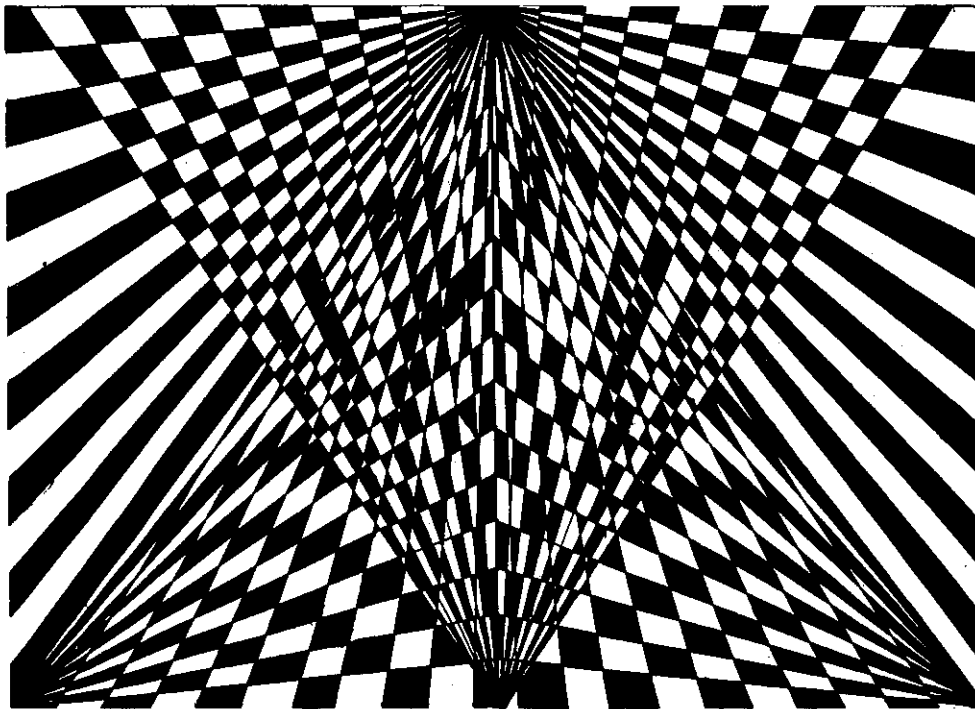
Les exemples précédents ont montré l'efficacité des méthodes numériques pour le traitement de problèmes relativement complexes en sciences physiques et simultanément la simplification qu'elles apportent dans leur résolution mathématique.

Le physicien appréciera par ailleurs la rapidité de calcul permettant le test de nombreuses solutions par la modification de paramètres ou de conditions initiales ainsi que la possibilité d'une meilleure comparaison du modèle simulé avec les résultats expérimentaux.

Enfin, un emploi judicieux des méthodes numériques décharge l'élève des contraintes de calcul et lui permet de s'intéresser surtout au problème physique, tant au niveau des hypothèses et de la mise en équations qu'à celui de la discussion des différentes solutions.

Bibliographie

- "Exercices et problèmes résolus avec la calculatrice au lycée". F. Csahvary et J.Heurtaux. Cedic.
- "Méthodes numériques et sciences physiques".
(Cours de formation continue) de J.C. Trigeassou, CFIAP de Poitiers.
- "Méthodes de calcul numérique". J.P. Nougier, Masson.



dessin réalisé par Benoit MAITRE - Collège Montesquieu ORLEANS

BIBLIOGRAPHIE pour CPPN, CPA et les

AUTRES

Toujours à l'affût des meilleures sources, notre collègue Bernard PLANQUETTE a dressé pour nous une bibliographie à l'usage des enseignants de CPPN et CPA -

POCHETTES pour RETROPROJECTEUR

- IREM - Orléans/Tours
- R1 Instruments de mesure
 - R2 Quadrillages
 - R3 Calculs d'aires (et de volumes) de figures simples
 - R4 Cercle trigonométrique
 - R5 Partie entière, partie décimale. Unités de surface et de volume Système S.I.
 - R6 Crible d'Eratosthène rétroprojectable
 - R7 Illusions d'optique au rétrop.
 - R8 Triangle de Pascal au rétrop.
 - R9 Carte du ciel rétroprojectable
 - R10 Treillis de diviseurs rétroprojectables
 - R11 Propriété de Thalès au rétrop.
 - R12 Repérages dans le plan au rétroprojecteur.
 - R13 Théorème de Pythagore au rétroprojecteur.

LIVRES d'E M T

- Education Manuelle et Technique
5ème. R.Durot, R.Lavaud, J.Visart.
Ed. Nathan.
- Education Manuelle et Technique. 6ème
Le Petit Le Moal Michaud. Ed. Magnard.
- Education Manuelle et Technique. 4ème
Le Petit Le Moal Michaud. Ed. Magnard
- Education Manuelle et Technique. 3ème.
Le Petit Le Moal Michaud. Ed. Magnard.
- Education Manuelle et Technique
Travaux dirigés. Niveau 1.
Ed. A.Casteilla.
- Education Manuelle et Technique. 5ème.
Le Petit Le Moal Michaud. Ed. Magnard.

LIVRES de DESSIN TECHNIQUE

- Initiation au dessin technique
Albin Grando. Ed.Hachette Technique
- Dossier Technique, 4ème.
Pierre Poignon. Ed. de la Technique Moderne.
- Bases du dessin technique
Ed. Educalivre.
- Travaux pratiques de dessin industriel
2è et 3è série. Ed. A.Casteilla.
- Aides pédagogiques pour le cycle moyen
La Géométrie APMEP n°49
APMEP, 13, rue du Jura, 75013 PARIS.

JEUX

- JEUX I
Les jeux et les Mathématiques.
APMEP
- PENTAMINO N° 3 à 8
CRDP - Pentamino / 20 F. le n°
11, av.Gl Champon
38031 GRENOBLE Cedex

Jeux du Monde
UNICEP LIED

MATHEMATIQUES - CALCUL

- Calcul Pratique
Arithmétique et Géométrie
Lucien Chambadal.
Guides pour tous. Hachette Usuels ≈ 65 F
- Calcul mental - 32 préparations - n° 103
Manuel Général Journal des Profs n° 103
Hachette.
- Maths, série bleue, série verte
CPPN - CPA. M. Barrat, J.C. Gonneaud
Nathan
- Fichier Calcul Numérique
CM1-6è / CM2. Cl. Haneau. Nathan

Itinéraire Maths. CM1, CM2. Touyarot.
Nathan.

"Faire des Maths". A.Deledicq. C.Lassave
Nathan Cedic

La Mathématique dans la réalité
Emma Castelnuovo. Cedic.

Pratiquer la géométrie en 6è.
Fichier élève. Didier.

La géométrie pour le plaisir.
Edition Kim Dunkerque.
Mlle Denière. BP 74. Malo les Bains.

Courbes usuelles. Tracés géométriques
Fernand Arthot, Paul Mansion
Editions A. Casteilla.

FICHES de CALCUL

Fiches de calcul. R. Augé.
Métiers des métaux :
Electricité, bois, bâtiment
Série A Numération opérations ≈ 11 F
Série B Longueurs ≈ 10 F
Série C Pourcentage, Fractions
Echelle ≈ 25 F
Série D Carré, Rectangle,
Triangle, Parallélogramme ≈ 25 F
Série E Cercle ≈ 15 F

Idem Métiers Alimentation, Coiffure,
Tissus, Cuir, Autres
Educalivre. 32 rue de Grenelle
Paris 75007. Tél. 548.38.42

Fiches de calcul. CPA. Réf. 192,
P.Poigon. Ed. de la Techn.Moderne.
Pierron 57206 Sarreguemines. 4, rue
Gutenberg.

VIE PRATIQUE

Série M N P Q R

"Le prix de revient du km automobile".
Educalivre. 13 F

"La population". Educalivre. 14 F

"Initiation Lecture plan bâtiment".
Educalivre 30 F

"Dossier de vie pratique". J. Kuchly.
Collection R. Baudin.
(Fiches = La poste, Banque, Impôts--
Mairie, Gare, Automobile, S.S.). Foucher.

A la découverte de l'entreprise. Ed.
J. Lonore.

J'apprends rapidement la table de multi-
plication. Ed. A.Casteilla. Les nouveautés
de l'enseignement, 25, rue Monge,
75005 Paris.

Initiation à l'économie. Phili.Deterville.
Ed. A.Casteilla.

Math. Moderne pour tous. Initiation.
Ed. A.Casteilla.

ACTIVITES MATHÉMATIQUES

L'art et la géométrie. Un module par-
court l'espace. L.Empain. Dessain et Tolra

Pavage. IREM Orléans-Tours. Foucher.

Activités Mathématiques. CPPN Soutien
6è 5è. IREM de Grenoble. Tour de
Mathématique. BP 41. 38402 ST.Martin
d'Hères. Cedex. Tél. (76) 54.81.45 p.502
30 F.

Activités géométriques. 6è 5è. IREM
Grenoble. 40 F.

Arithmétique en 5è. IREM Grenoble. 20 F.

Le nombre décimal en 6è. IREM
Grenoble. 25 F.

Introduction à la géométrie dans l'espace.
Activités pour 5è. IREM Grenoble. 22 F.

Mathématique 6è. JEOMATRI. IREM
Grenoble. 32 F.

Mathématique 5è. JEOMATRI. IREM
Grenoble. 30 F.

Le grenier mathématique n° 4
Constructions géométriques. Doc. pour le
1er cycle. IREM Rouen. CDDP Rouen
3038 X. 76041 Rouen Cedex. 17 F.

Les Mathématiques du consommateur.
Le consommateur de mathématique.
IREM Lille. Université Lille I. Cité Scien-
tifique. 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex.

Fractions et rationnels. IREM Rennes.
CDDP Rennes. 92, rue d'Antrain. BP 158.
35003 Rennes Cedex.

Du quotidien à la mathématique. APMEP
n° 35. Ac. Toulouse. APMEP, 13 rue du
Jura. 75013 Paris.

Histoire des sciences

Compte-rendu d'un atelier animé par J DUBOIS - Tours

Sensibiliser les collègues à l'utilisation de l'Histoire des Sciences dans leur enseignement, un exemple en Sciences Physiques donné lors des journées interdisciplinaires à Orléans en 1984.

1. POURQUOI de l'Histoire des Sciences dans notre Enseignement ?

Premier but : Meilleure compréhension des grandes idées scientifiques.

- En montrant la recherche continue de meilleures explications et de nouveaux modèles, on aide à élucider des concepts difficiles.
- L'évolution historique des concepts est parallèle à l'évolution psychologique de l'individu.

Deuxième but : Abandon d'un enseignement trop dogmatique : montrer que l'on enseigne pas de vérités premières, mais des modèles qui ont souvent eu du mal à prendre naissance, qui ont été bien discutés et améliorés.

Troisième but : Nécessité de la pluridisciplinarité. La réflexion sur la science appartient à la fois au philosophe, au mathématicien, à l'historien, au physicien et au naturaliste. Les collègues de toutes ces disciplines sont demandeurs

Quatrième but : Acquisition d'une culture scientifique. La science fait partie de notre culture ; elle a son histoire, il faut l'enseigner. D'autre part, la formation de l'esprit critique aidera les élèves à distinguer entre science et pseudo-science.

2. COMMENT introduire un aspect historique dans l'enseignement des Sciences ?

L'idée scientifique est présentée à côté des idées connues à l'époque : on suit alors la démarche du savant pour les utiliser et faire progresser la science vers une conformité plus grande à la réalité. Deux pièges sont à éviter :

- La "redécouverte", sans dissimuler les raisonnements erronés et
- L'"anecdote" qui plaît aux élèves sans leur apporter de connaissances scientifiques.

Une présentation historique paraît particulièrement adaptée aux élèves non-scientifiques qui peuvent sans lassitude assimiler des notions scientifiques solides. Des collègues obtiennent des résultats spectaculaires, mais au prix d'un travail monumental.

*Extrait des actes des journées interdisciplinaires
de Décembre 84*

Un exemple.

L'historique de la notion de travail et d'énergie, de l'antiquité au 19^e siècle.

Des forces au plan incliné et au levier, de l'étude des mouvements et des équilibres, le travail se distingue peu à peu de la quantité de mouvement et des moments d'une force. Les lois de conservation n'apparaissent que tardivement sous leur forme exacte, avec le théorème de l'énergie cinétique. Le calcul différentiel ouvre alors la voie à la "mécanique rationnelle".

EVOLUTION DE LA NOTION DE TRAVAIL.

ARISTOTE (350 av. JC).

Puissance : Produit: poids x vitesse.

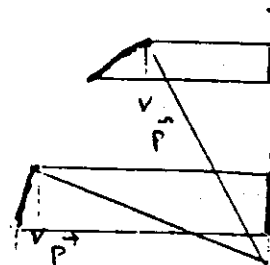
Dans une machine simple, si les poids sont en raison inverse des bras de levier, les puissances s'équilibrent : règle de conservation ; principe des vitesses virtuelles ?

EUCLIDE (300 av. JC).

ARCHIMEDE (250 av. JC)

HERON D'ALEXANDRIE (100 av. JC)

Notion de moment statique.

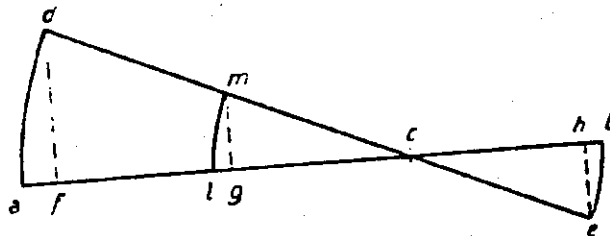


JORDANUS DE NEMORE (13^e siècle)

Gravitas secundum situm (pesanteur relative à la situation).

L'effet du poids est mesuré par le produit de sa grandeur par le trajet projeté sur la verticale : c'est un travail.

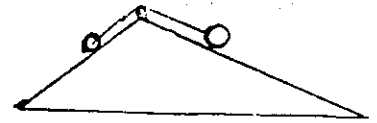
Equilibre du levier droit.



"Soient acb le fléau, a et b les poids qu'il porte et supposons que le rapport de b à a soit celui de ca à cb . Je dis que la règle ne changera pas de place. Mettons en effet qu'elle descende du côté b et prenne la position dce ; b descendra de he et a montera de fd . Si l'on plaçait en l , à la distance $cl = cb$, un poids égal au poids b , il monterait, dans ce mouvement, de $gm = he$. Mais il est évident que df est à mg comme le poids l au poids a . Dès lors, ce qui suffit à amener a en d suffirait à amener l en m . Mais nous avons montré que b et l se contrebalancent exactement ; donc le mouvement supposé est impossible et il en serait de même du mouvement en sens inverse".

DISCIPLE INCONNU DE JORDANUS (13^e siècle).

Pour le plan incliné la pesanteur relative à la situation est la même tout le long du plan : pour que les poids s'équilibrent, il suffit qu'ils soient dans le rapport inverse des pentes.



BURIDAN et N. ORESME (14^e siècles).

Le travail en dynamique.

Impetus : Energie cinétique ?

NICOLAS DE CUES et LEONARD DE VINCI (14^e siècle).

Impetus impressus et impeto. Plan incliné.

GUIDO UBALDO (16^e siècle).

Déplacements virtuels.

STEVIN (1608)

Equilibre sur le plan incliné.

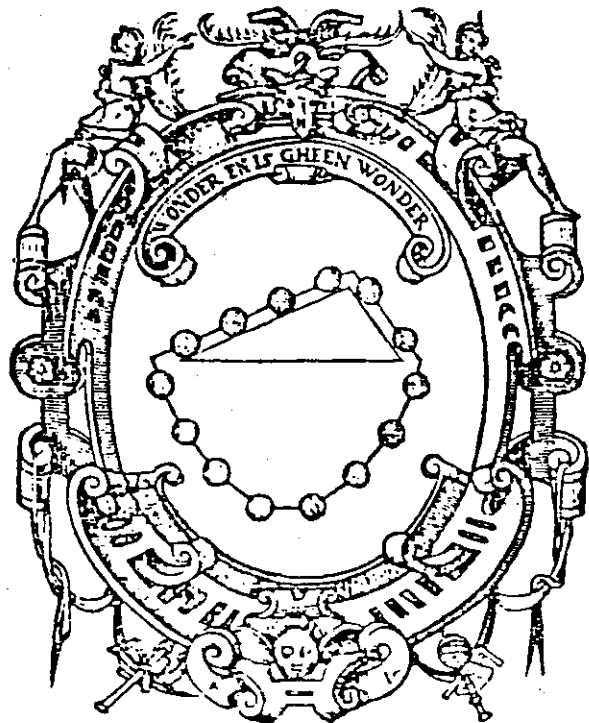
**S I M O N S T E V I N
van Brugghe.**

Impossibilité du mouvement perpétuel :
équilibre.

On supprime la partie inférieure :
les poids sont dans le rapport in-
verse des pentes, ou encore dans
le rapport des longueurs des plans.

Equilibre des systèmes de poulies :
ce que l'on gagne en force,
on le perd en déplacement.

Conservation du travail ou simple
proportions ?



**TOT LEYDEN,
Inde Druckerye van Christoffel Plantij
By François van Raphelinghen.**

KEPLER (1609)

Puissance : poids x hauteur en un temps donné.

Premier emploi du mot énergie (deux aspects de la lumière, qui sont de l'énergie).

SALOMON DE CAUS (1615)

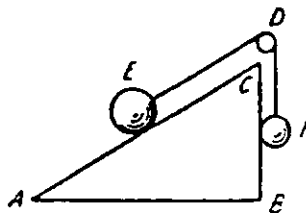
Premier emploi exact du terme travail: «ils ne donneront pas plus de travail à tirer....»

GALILEE (Premières leçons : 1594 ; Discorsi : 1638)

L'équilibre sur le plan incliné est résolu de deux façons :

- en retenant le corps par un levier et en comparant l'équilibre des poids à celui du levier
- en remarquant que les poids sont dans un rapport tel que le produit de leur valeur par la dénivellation soit constant : notion de travail.

"Imaginons que dans le triangle ABC, la ligne AB représente le plan horizontal, la ligne AC le plan incliné, dont la hauteur sera mesurée par CB. Sur le plan AC est posé un mobile E qui est attaché à la corde EDF ;



celle-ci porte en F un poids ou une force qui est à la gravité de poids E dans le même rapport que la ligne BC à la ligne CA. Si le poids F vient à descendre, tirant le mobile E sur le plan incliné, le mobile E parcourra suivant la ligne AC un chemin égal à celui que le grave F décrit dans sa chute. Mais il faut observer ceci : il est vrai que le mobile E aura parcouru toute la ligne AC dans le temps que F aura mis à s'abaisser d'une égale longueur ; mais, pendant ce temps le mobile E ne se sera pas éloigné du centre commun des choses graves d'une longueur supérieure à la verticale BC, tandis que le poids F, descendant selon la verticale, se sera abaissé d'une longueur égale à toute la ligne AC. Or les graves ne résistent à un mouvement oblique que dans la mesure où ils s'éloignent du centre de la terre. Nous pouvons dire à juste titre que le voyage de la force F garde au voyage de la force E le même rapport que la longueur AC à la longueur CB, partant que le poids E au poids F."

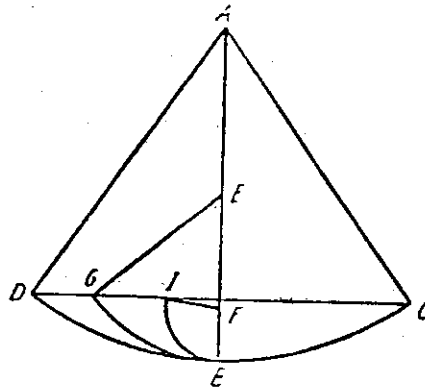
Pour Galilée, momento = . poids x bras de levier : moment statique
 . poids x dénivellation : travail de la pesanteur.

En dynamique, momento est synonyme d'impeto.

"Les degrés de vitesse qu'un même mobile acquiert sur des plans d'ifféremment inclinés sont égaux, pourvu que les hauteurs de ces plans soient égales".

Vérification expérimentale (Galilée exprime par impeto et momento la notion de travail et d'énergie acquise pendant la dénivellation) :

"Imaginez que cette feuille soit un mur vertical, qu'un clou y soit planté auquel soit suspendue une balle de plomb, d'une once ou deux, par un fil AB long de deux ou trois coudées et perpendiculaire à l'horizon. Traçons sur le mur une horizontale CD coupant d'équerre le fil AB, lequel est à une distance d'environ deux doigts de mur. Ecartons le fil AB et la balle dans la position AC et lâchons la balle. Nous verrons celle-ci descendre en décrivant l'arc CB et dépasser l'extrémité B de telle sorte



qu'elle remontera suivant BD, à peu près jusqu'à la ligne tracée CD ; il s'en faudra toutefois d'un petit intervalle qu'elle n'y arrive, circonstance due précisément à la résistance de l'air et du fil. De là nous pouvons conclure, en toute vérité, que l'impeto acquis par la balle au point B dans sa descente de l'arc CB est tel qu'il suffit à la faire remonter le long d'un arc identique BD, à la même altitude. Cette expérience faite et refaite, fixons dans le mur, tout contre la verticale AB, en E par exemple, ou en F, un clou qui fasse saillie de cinq ou six doigts ; le fil AC tournant comme tout à l'heure, la balle décrira l'arc CB ; quand elle arrivera en B, le fil accrochera le clou E et la balle sera obligée de parcourir la circonférence BG décrite de E comme centre ; nous verrons alors ce que peut produire le même impeto qui, acquis à l'extrémité B peut remonter le mobile suivant l'arc BD jusqu'à l'horizontale CD. Eh bien, messieurs, vous verrez avec plaisir la balle atteindre l'horizontale au point G ; la même chose arriverait si le clou était planté plus bas, en F par exemple ; la balle décrirait l'arc BI et terminerait toujours son ascension à la ligne CD, et, si le clou était trop bas pour que la longueur du fil permit à la balle d'atteindre la hauteur de CD (cela arriverait si le clou était plus près de B que de CD) le fil s'enroulerait autour du clou. Cette expérience ne permet pas de douter de la vérité du principe supposé. Les deux arcs CB, DB étant égaux et semblablement placés, le momento acquis dans la descente sur CB est le même que celui qui serait acquis suivant DB. Mais le momento acquis en B suivant CB est

capable de remonter le même mobile suivant BD ; donc le momento acquis suivant DB est égal à celui qui remonterait le même mobile suivant le même arc de B en D , de sorte que, d'une manière générale, le momento acquis suivant un arc quelconque est égal à celui qui peut faire rebondir le même mobile le long du même arc. Mais tous les moments qui font rebondir le mobile le long de tous les arcs BD , BG , BI sont égaux puisqu'ils sont faits du momento acquis dans la descente CB , comme le montre l'expérience. Donc tous les moments acquis en descendant suivant les arcs DB , GB , IB sont égaux."

Salviati passe ensuite aux mouvements suivant des plans diversement inclinés :

"Nous ne pouvons pas montrer avec la même évidence que la même chose arrivera quand une balle parfaite descendra le long de plans inclinés tracés suivant la corde de ces mêmes arcs ; au contraire, il est vraisemblable que, les plans formant un angle au point B , la balle, descendue le long de la corde CB , rencontrant un obstacle à l'arrivée sur les plans qui remontent suivant les cordes BD , BG , BI , perdra, dans le rebondissement, une partie de son impeto et ne pourra pas remonter à la hauteur de la ligne CD . Mais l'obstacle enlevé qui nuit à l'expérience, il me paraît bien que l'esprit continue à concevoir que l'impeto (lequel en effet renferme la force de toute la chute) serait capable de remonter le mobile à la même hauteur.

ROBERVAL (1636)

Utilisation des travaux virtuels dans la règle du parallélogramme des forces.

DESCARTES (1637)

est le premier à énoncer clairement l'égalité des travaux moteurs et résistants ; les travaux virtuels sont infinitésimaux mais pas encore algébriques. Il distingue vitesses virtuelles et déplacements virtuels. La "force" a deux significations.

HUYGHENS (1669)

aborde le problème du choc en reliant énergie de mouvement et énergie due à la hauteur, énonçant la conservation de la force vive avant Leibniz.

"Proposition VIII. Si deux corps, se déplaçant en sens inverse, viennent se choquer avec des vitesses en raison inverse de leurs grandeurs, chacun rebondit avec la même vitesse qu'il avait avant le choc."

"Soient deux corps A et B qui viennent se choquer ($A \rangle B$). Supposons que la vitesse BC du corps B soit à la vitesse AC du corps A comme la grandeur A à la grandeur B . Nous voulons montrer qu'après le choc A sera réfléchi avec la vitesse CA , B avec la vitesse CB . Si cela est vrai



G.W. LEIBNIZ
(1646 - 1716)

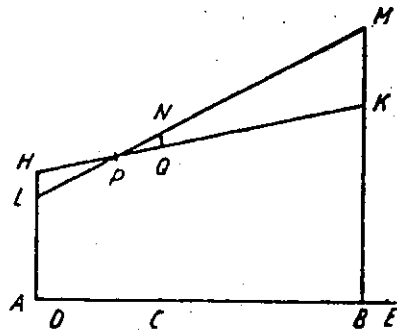


Fig. ■

de A, ceci est vrai de B (conservation de la vitesse relative). Supposons que A soit réfléchi avec une vitesse $CD < CA$. B rebondira avec la vitesse $CE > CB$ et $DE = AB$. Imaginons que A ait acquis sa première vitesse AC en tombant de la hauteur HA, et qu'il ait ensuite changé son mouvement vertical en mouvement horizontal de vitesse AC ; de même, supposons que B ait acquis sa vitesse BC en tombant de la hauteur KB. Ces hauteurs sont en raison doublée des vitesse, c'est-à-dire que

$$\frac{HA}{KB} = \left(\frac{CA}{CB}\right)^2 \dots$$

NEWTON (1687)

abandonne les considérations énergétiques et précise la notion de force, distincte de celle de masse. (Par la suite l'une sert à définir l'autre).

LEIBNIZ ET LA QUERELLE DE FORCES VIVES.

Pour Leibniz (1686), le travail d'un poids qui tombe correspond à mv^2 et non mv .

F Force morte $\left\{ \begin{array}{l} \text{impulsion } \vec{F} dt \rightarrow \vec{mv} \text{ quantité de mouvement} \\ \text{travail } \vec{F} dl \rightarrow \frac{1}{2} mv^2 \text{ force vive.} \end{array} \right.$

Au 18^e siècle, Jean BERNOULLI, s'GRAVESANDE, KOENIG, Mme DU CHATELET et VOLTAIRE défendent LEIBNIZ contre les cartésiens et MAC LAURIN.

Jean BERNOULLI (1717)

généralise le principe des travaux virtuels et utilise l'expression d'énergie positive ou négative.

D'ALEMBERT (1743)

préfère le mouvement aux notions de force et force vive.

MAUPERTUIS (1744) ET LA QUERELLE DE

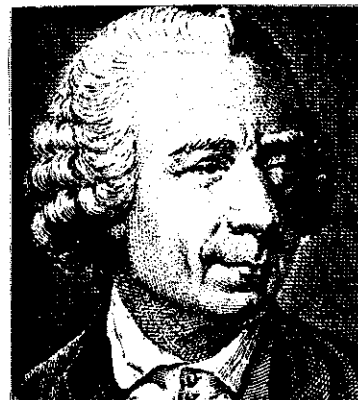
LA MOINDRE ACTION: la nature "économise".

EULER : $\int mv \cdot ds$, extrémum (1753).

$P dx + Q dy + R dz = dS$, Potentiel (1775).

LAGRANGE (1778)

- justifie le principe des travaux virtuels.
- écrit une expression qui contient l'énergie potentielle et exprime la conservation de l'énergie totale, mais il ne le dit pas



Leonhard Euler

Dans le cas où la quantité $Pdp + Qdq + Rdr + \dots$ est intégrable, lequel a lieu lorsque les forces P, Q, R, \dots , tendent à des centres fixes ou à des corps du même système, et sont fonctions des distances p, q, r, \dots , en faisant

$$Pdp + Qdq + Rdr + \dots = d\Pi,$$

l'équation précédente devient

$$S \left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} + d\Pi \right) m = 0,$$

dont l'intégrale est

$$S \left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2dt^2} + \Pi \right) m = H$$

dans laquelle H désigne une constante arbitraire, égale à la valeur du premier membre de l'équation dans un instant donné.

On aura Π exprimé par une fonction finie de p, q, r, \dots ; par conséquent, on aura aussi

$$\delta\Pi = P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \dots$$

Multipliant par m et prenant la somme pour tous les corps du système, on aura

$$S(P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \dots) m = S \delta\Pi m = \delta \cdot S\Pi m,$$

puisque le signe S est indépendant du signe δ .

Il n'y aura ainsi qu'à chercher la valeur de la quantité $S \Pi m$ en fonction de ξ, ψ, ϕ, \dots ; ce qui ne demande que la substitution des valeurs de x, y, z , en ξ, ψ, ϕ, \dots , dans les expressions de p, q, \dots (art.1, sect II, 1ère partie); et cette valeur de $S \Pi m$ étant nommée V , on aura immédiatement

$$\delta V = \frac{dV}{d\xi} \delta\xi + \frac{dV}{d\psi} \delta\psi + \frac{dV}{d\phi} \delta\phi + \dots$$

1986

REABONNEZ-VOUS

et faites abonner votre C.D.I.

au Journal **plot** et à ses Suppléments 1986

Nom et Prénom :

Adresse complète :

Code Postal et Ville

Renouvellement

Nouvel abonné

Tarif normal

Membre de l'APMEP

Envoi par avion

Règlement

100 F

80 F

+ 20 F

F.

A envoyer à :

APMEP Orléans-Tours - CCP La Source 1440 09 X
IREM - Université d'Orléans, BP 6759, 45067 Orléans-Cedex 2

Si vous êtes des Régionales de Poitiers ou Limoges, réabonnez-vous auprès de

Régionale APMEP de Limoges, IREM - 123, rue Albert Thomas 87060 LIMOGES
Régionale APMEP de Poitiers, CRDP - 6, rue Ste.Catherine 86034 POITIERS.

Les Dossiers et Matériels

du PLOT

BON DE COMMANDE

Prix unitaire		Matériel			Dossier			Coût Total
		(Nombre)			(Nombre)			
30 F	Polyèdres dans l'espace n° 1							
30 F	Polyèdres dans l'espace n° 2							
30 F	Systèmes articulés							
30 F	Papiers accrochés							
30 F	Pliages et mathématiques							
30 F	Espaces, pavages et symétries (à paraître)							
90 F	Les 3 Dossiers "Ludi-Math" (Poitiers)		n° 2:	n° 3:		n° 4:		
50 F	Catalogue exposition : Mosaïque Mathématique							
10 F	Affiche pour la classe : "Horizons Mathématiques" 60x40 cm - 3 couleurs							
	Frais d'envoi forfaitaire							10 F
	Pour toute commande							30 F
	à envoyer à l'APMEP Orléans-Tours						TOTAL	