

MATHÉMATIQUES ET ENSEIGNEMENT

mars 87
30 F N° 38

Directrice de publication
Marie-Laure Darche-Giorgi

Comité de rédaction

Jacques Borowczyk, Daniel Boutté,
Gérard Chauvat, Michel Clinard,
Jacqueline Collet, Roger Crépin,
Georges Le Nezet, Serge Parpay,
Raymond Torrent,

Rédaction

Michel Darche, Michel Mirault

Secrétariat

Madeleine Schlienger

Diffusion - Ventes

Patrick Marthe, Pierre Daudin

Publicité

Pascal Monsellier

Abonnements

PLOT APMEP-Université, BP 6759
45067 Orléans-Cedex 2

Prix d'abonnement

100 FF pour 4 numéros par an
Adhérent APMEP : 80 F
Abonnement étranger : 120 F

**Photocomposition
et maquette**

Graphi'Style - Orléans

Photogravure et impression

Fabrègue-Imprimeur, Limoges

Commission paritaire

63181 - ISSN 0397-7471

Editeur

Associations régionales
de l'APMEP de Poitiers,
Limoges, Orléans, Tours,
Nantes, Rennes, Rouen,
Brest et Caen
avec le concours du
Ministère de la Coopération

Diffusion

Adécum (Association pour le
développement de l'enseignement
et de la culture mathématique).

PLOT
mathématiques
et
enseignement

sommaire

Cartographie

Pascal Monsellier - Montargis

p. 2 à 9

Math et art

Cardioïdes et triangle

p. 10 à 13

Panoramique 1

Newton !!!

p. 14

Recherche en seconde

Jean Gardien - Lomé

p. 15 à 16

Calculs et calculettes

Jacques Verdier - Nancy

p. 17 à 18

Quand ils/elles démontrent

Roger Perrot - Rézé

p. 19 à 20

Pour les nouveaux programmes de 6^e

André Viala - Orléans

p. 21 à 22

Mesures et dimensions

Jean-Pierre Kahane - Paris

p. 23 à 30

A-Plot-Strophe

- Droit de réponse : R. Barra

- Recherche d'extréma : Rucka et Alonso

- Yao ! les maths, je craque !!!

p. 31 à 36

Plot-Méninges

Rallyes et concours

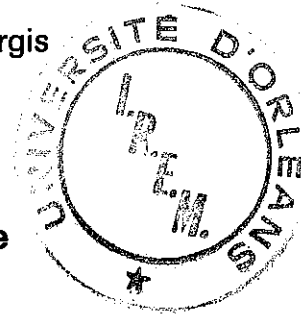
p. 37 à 40

Algorithmes et Labyrinthes

p. 41 à 47

Bulletin de commande de matériel

p. 48



éditorial

1987

*Premier numéro de 1987 et nouveau pas en avant :
malgré les charges supplémentaires, ce numéro a 48 pages !
Et nous allons essayer de continuer !!*

Pour cela nous avons besoin de vous :

- pour nous envoyer des articles et des illustrations,

- pour faire abonner vos collègues et amis ;

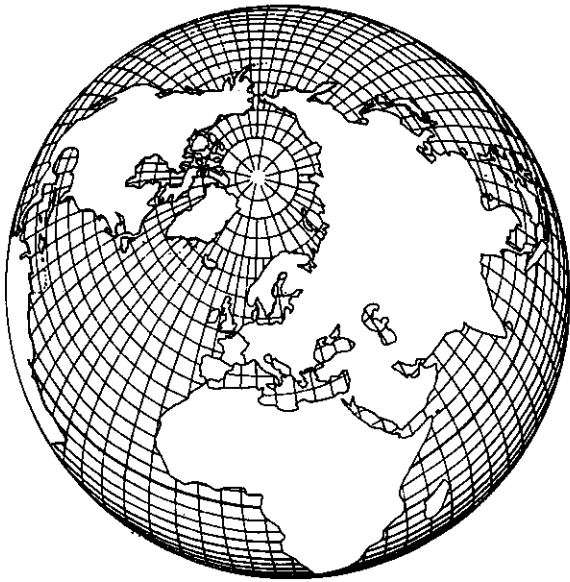
*prêtez-leur ce numéro et les précédents et donnez-leur
le bulletin d'abonnement ci-joint.*

Par ailleurs merci de vous être réabonné.

*La plupart d'entre-vous l'ont fait pour deux ou trois ans,
bravo, on n'est pas matheux pour rien !!!*

INFO. DERNIERES

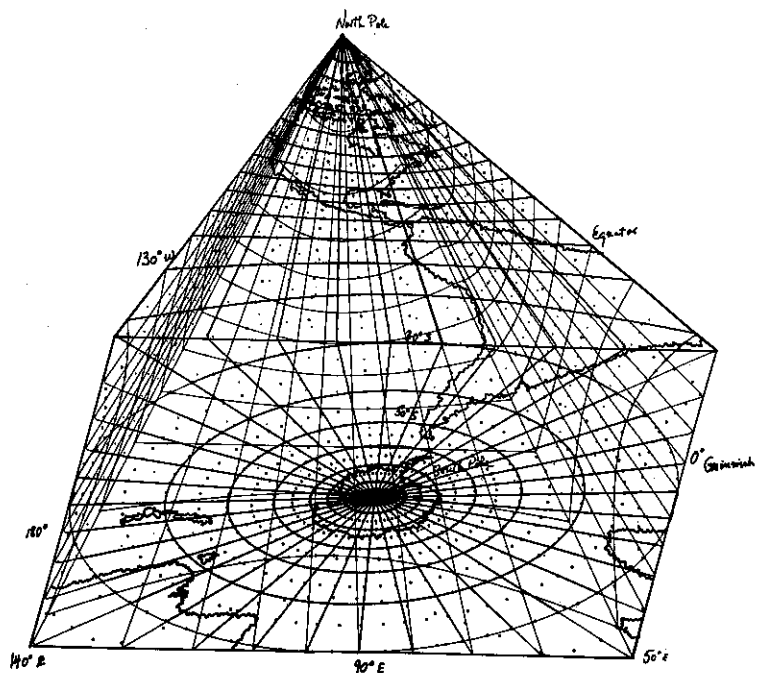
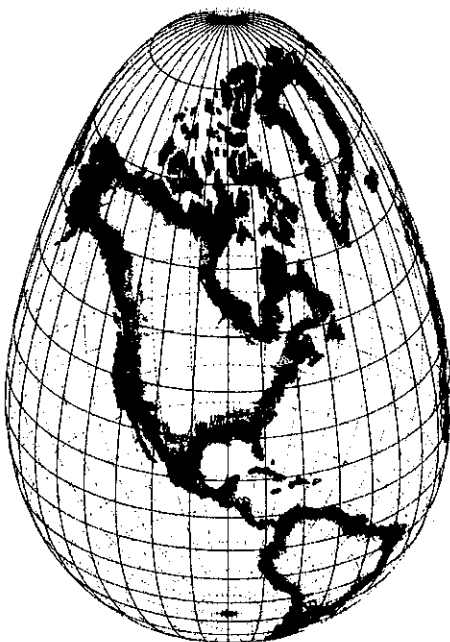
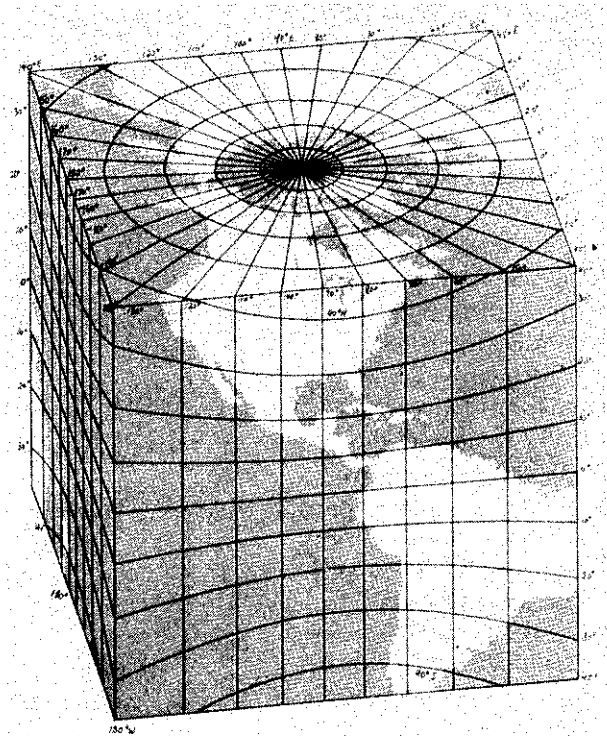
*Les expositions "Horizons Mathématiques" après avoir pris
le train SNCF en Bretagne (c'était juste avant les grèves !!!)
seront présentées en mars à Lyon, Libreville et Port-Gentil,
Karlsruhe. Elles seront ensuite à Bourg-en-Bresse,
Nuremberg, Brazzaville, Yamoussoukro et Lisbonne.
En mai à La Villette, cycle Maths et Arts.*



**LA TERRE
EST-ELLE
VRAIMENT
RONDE?**

...

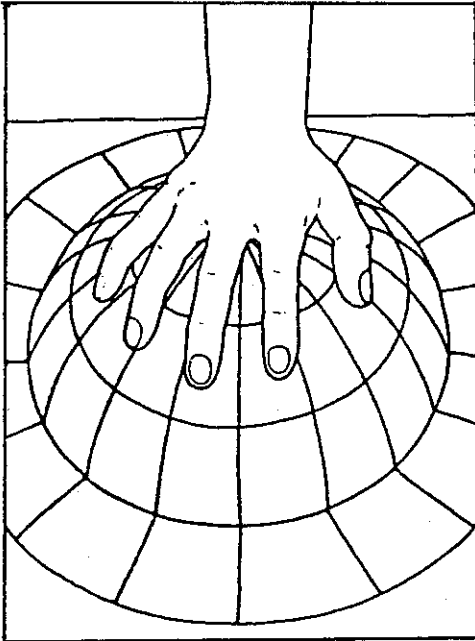
**EH OUI! C'EST
PLUS PRATIQUE,
LA TERRE
EST
DONC
RONDE!**



**TOUTES LES CARTES
SONT FAUSSES !**

CARTOGRAPHIE

Pascal MONSELLIER - Montargis (Gâtinais)



Dur d'aplatir une peau d'orange !

*Tout alla bien tant que les hommes crurent,
ou firent semblant de croire,
que la Terre était plate.*

*Cela se gâta quand la contemplation
de sa rotondité fut inévitable
et quand des cartes furent indispensables
pour en explorer les coins et recoins.*

*Essayez d'aplatir une peau d'orange,
les déchirures apparaissent vite !
Inversement, essayez d'envelopper une orange
avec une feuille de papier.
(Un matheux dirait que "la sphère est
une surface non développable").*

Et tout d'abord, quelques généralités inévitables

Les cartes, tracées sur parchemin puis sur papier, appartiennent à notre univers mental plan.

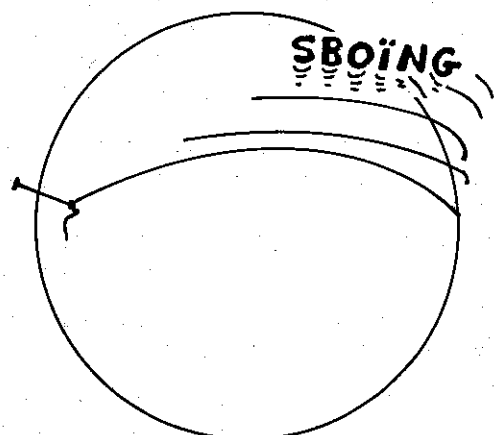
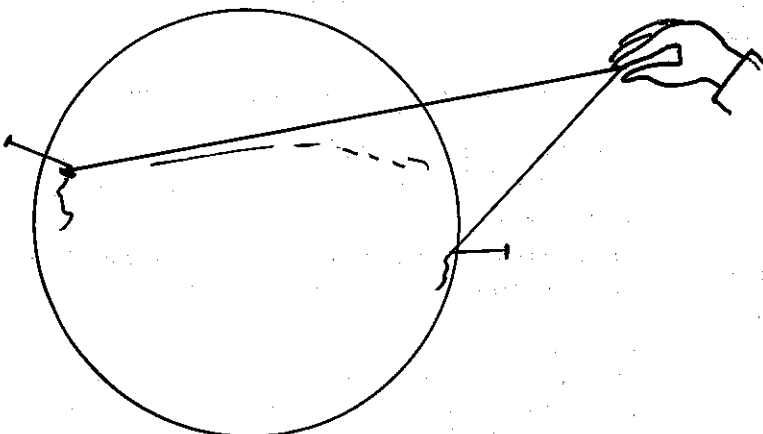
Comment passer de la sphère au plan ? C'est ce problème, fruit de la rêverie de tant d'hommes face à une mappemonde, que nous nous disposons à explorer.

suggère un élastique tendu entre 2 pointes fixes, ou une "règle universelle" (règle plate coupée dans du caoutchouc) qui détermine aussi bien les lignes droites sur un plan que sur une sphère.

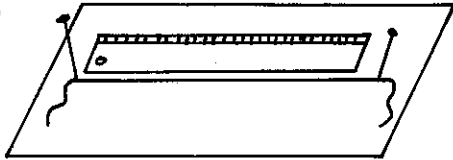
DES DROITES SUR UNE SPHERE !

Si on appelle droite "le plus court chemin d'un point à un autre", il y a des droites sur une sphère, comme le

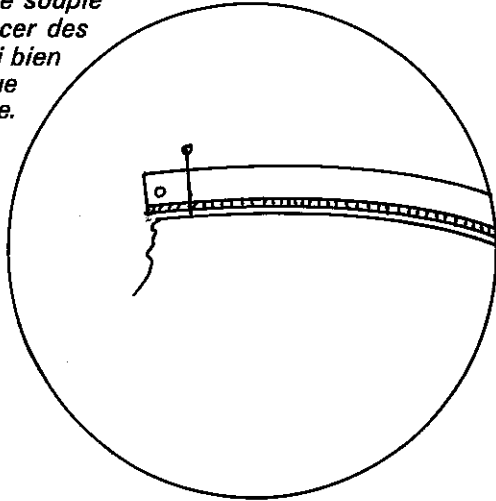
Un élastique tendu sur une sphère réalise le "plus court chemin" entre ses extrémités.



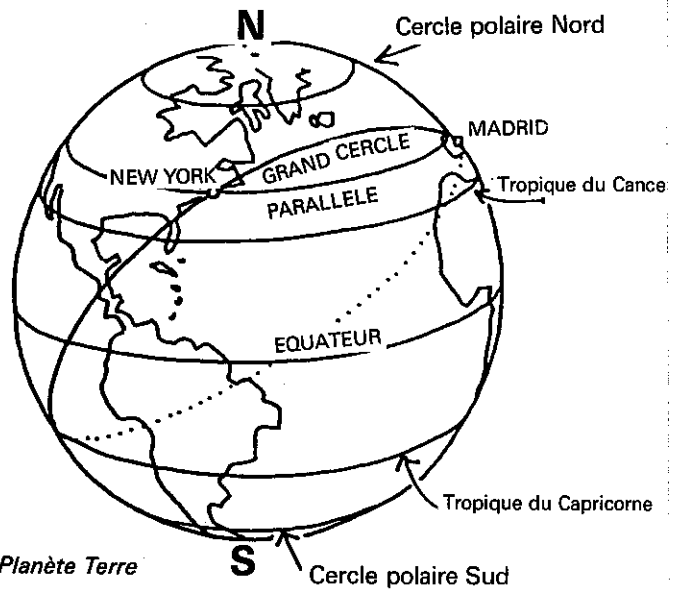
Ces "lignes droites" sont des cercles tracés sur la sphère, mais pas n'importe lesquels : ce sont des **grands cercles**.



Une règle plate souple permet de tracer des "droites" aussi bien sur un plan que sur une sphère.

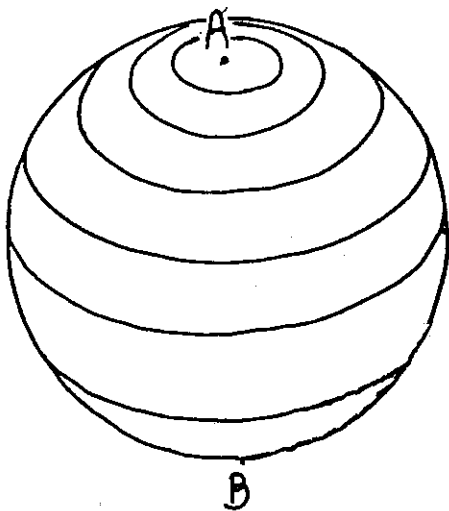


Le plus court chemin, c'est le grand cercle. Les **méridiens** sont, eux, des grands cercles qui passent par les pôles.



NE PAS CONFONDRE LES CERCLES

Sur une sphère, choisissons 2 points fixes antipodes A et B. Un cercle de la sphère est un ensemble de points situés à la même distance de A (Remarquons qu'ils sont tous alors à la même distance de B).



Les cercles de mêmes "centres" (ou "pôles") A et B seront dits **parallèles**. Celui qui est plus grand que tous les autres, équidistant de A et B pourra être appelé **équateur** ou **grand cercle**. C'est le seul de la famille dont le plan contient le centre de la sphère.

Les lignes droites (plus court chemin) sur une sphère sont les grands cercles. Ils sont appelés de plusieurs façons :
grand cercle = géodésique = orthodromie
(pour les géographes)

Sur la planète Terre, les **cercles polaires**, les **tropiques**, l'**équateur** sont des parallèles.

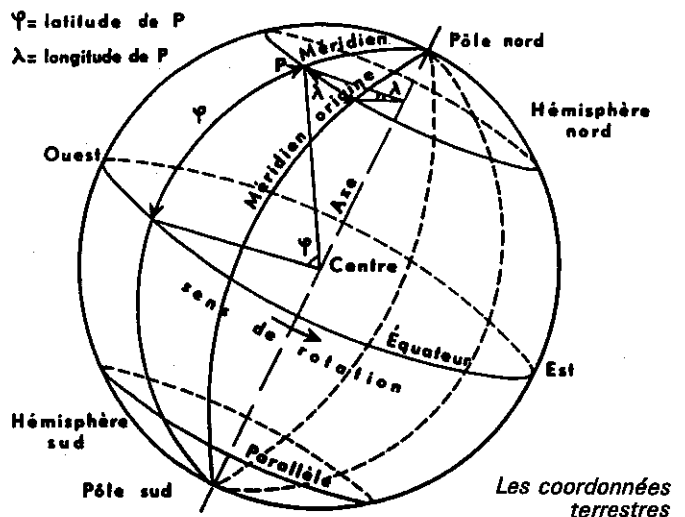
Madrid et New York sont sur le même parallèle ; mais l'arc de parallèle qui les joint n'est pas le plus

LATITUDE ET LONGITUDE

Un point sur la Terre se repère par :

- sa latitude : distance angulaire entre le parallèle passant par ce point et l'équateur
- sa longitude : distance angulaire entre le méridien passant par ce point et le méridien d'origine de Greenwich (1).

Ces angles se mesurent en degré.



CONFORME OU EQUIVALENTE

Une carte est une représentation de la réalité. Elle peut privilégier un aspect de cette réalité plutôt qu'un autre.

Les cartes **conformes** respectent les formes (l'angle de deux courbes sur la Terre est égal à l'angle de

(1) Actuellement, car au XVII^e siècle le méridien d'origine était celui de Paris, comme tous les lecteurs de Tintin ("Le secret de la Licorne") le savent.

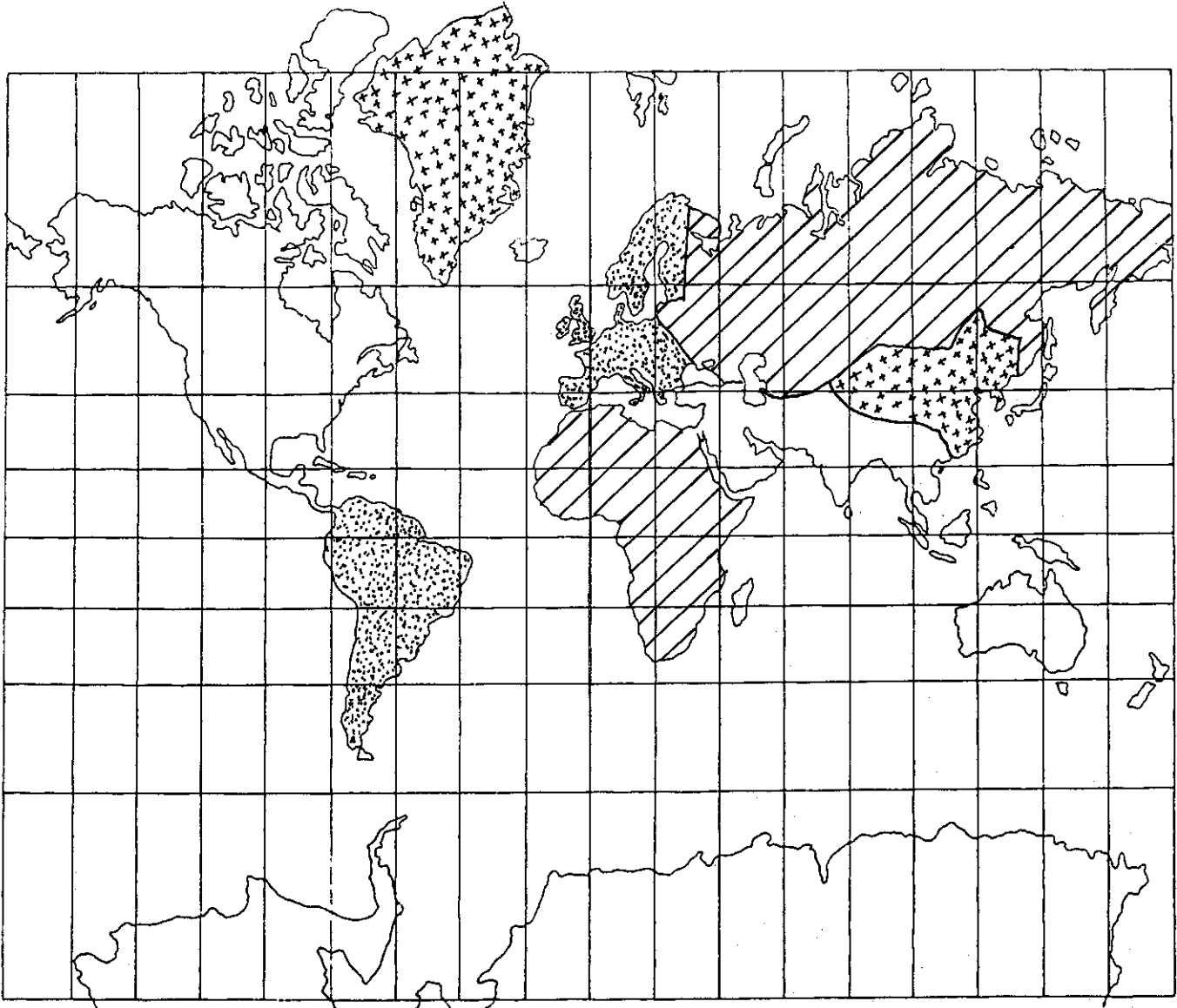
leurs images sur la carte : on dit qu'il y a "conservation des formes"). De telles cartes permettent de reconnaître les continents, les pays ; mais elles ont un inconvénient majeur : les rapports d'aires ne sont pas conservés, ce qui contribue à hypertrophier les régions proches du pôle par rapport aux régions équatoriales.

Les cartes **équivalentes** respectent, elles, les rapports d'aires : deux régions de même aire sur la Terre auront des images de même aire sur la carte. Cette propriété permet de respecter les équilibres visuels entre continents. Malheureusement, cette propriété se paie au prix de déformations importantes des figures.

équivalentes. Cela n'aurait évidemment aucun sens de déterminer la route la plus courte entre Moscou et Los Angeles sur la carte équivalente de Lambert, ou de comparer l'étendue de l'Inde à celle de la Scandinavie sur une carte conforme de Mercator !

QUELQUES EXEMPLES CELEBRES

La Carte de Mercator (1569) : Une carte conforme. L'allure de chaque continent est respectée (il y a conservation des angles), mais les rapports d'aires sont faux, et donnent une vision du monde discutable, au détriment des régions proches de l'équateur.



La carte Mercator (1569). Carte conforme qui présente de grands avantages pour la navigation mais qui dilate toutes les distances à mesure qu'on s'éloigne de l'équateur si bien qu'elle n'est pas utilisable en pratique au-delà du 60° degré de latitude.

En effet, on démontre qu'une carte ne peut être à la fois conforme et équivalente, et qu'il faut choisir. Selon l'usage qu'on veut faire d'une carte, et son étendue (planétaire ou locale), on privilégie l'une ou l'autre de ces qualités. Pour tous les travaux demandant un repérage précis (navigation, topographie, etc.), on utilisera des cartes conformes. Pour des comparaisons géographiques entre régions de basses et de hautes latitudes, on choisira des cartes

Par exemple :

- L'Union Soviétique (22,4 M km²) paraît deux fois plus grande que l'Afrique (30 M km²)
- Le Groënland (2,1 M km²) paraît plus grand que la Chine (9,5 M km²)
- L'Europe (9,7 M km²) paraît aussi étendue que l'Amérique du Sud (17,8 M km²).

La cylindrique de Lambert (XVIII^e S) :
une carte équivalente

Les rapports d'aires sont conservés et le "poids" respectif de chaque continent est conforme à la réalité. Mais c'est au prix de terribles déformations : les régions polaires ont la bonne aire, mais sont méconnaissables.

La carte de Peters (historien allemand né en 1916) :
une carte équivalente moderne

Cette carte équivalente a été obtenue par le calcul. Les déformations sont moins nettes que dans la carte de Lambert. C'est essentiellement une carte politique, qui veut corriger les idées occidentales toutes faites dues à des représentations du type Mercator.

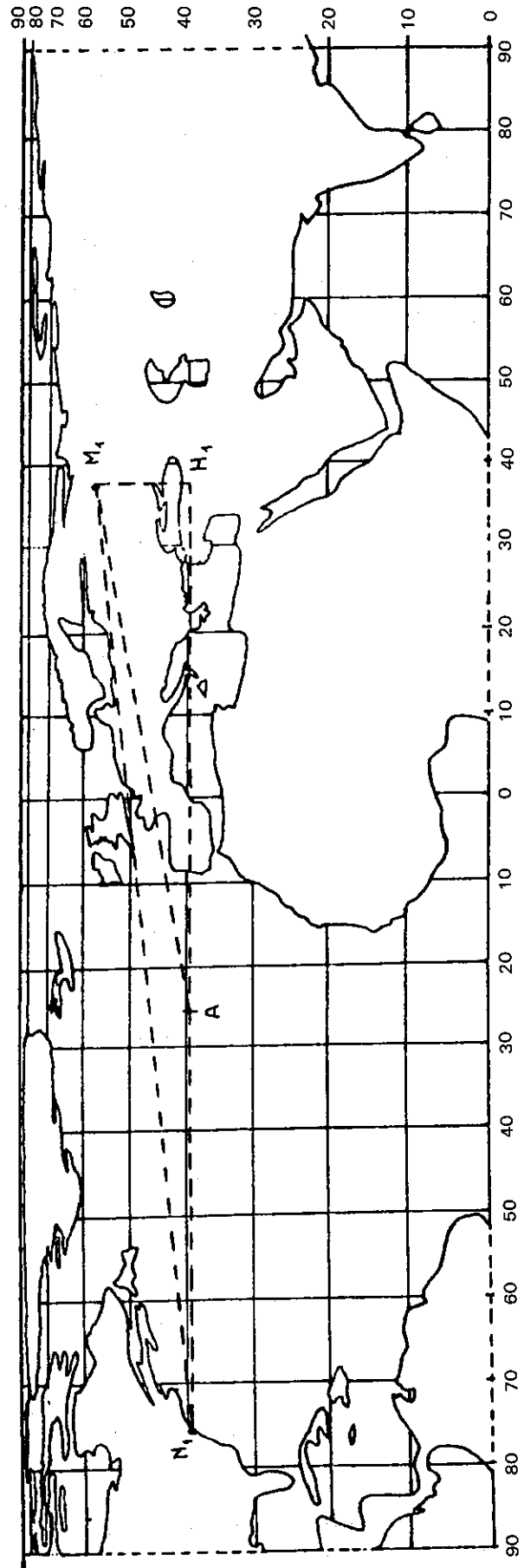
La carte de Buckminster Fuller (1980)

Elle est presque conforme et presque équivalente... au prix d'une grosse déchirure de l'écorce terrestre ! C'est la proximité des continents qui est ici sacrifiée (2).



La carte de Fuller.

(2) On trouvera cette carte sur fond cartonné en 4^e page de couverture du PLOT n° 34 - mars 86. Dans le même ordre d'idée, voir aussi la carte de Roger Burrows de 1979 (4^e page de couverture du PLOT n° 35 - juin 86).



La carte cylindrique de Lambert. - Elle respecte les rapports d'aires (elle est "équivalente") mais déforme les continents aux hautes latitudes : un carré de côté 1 et un rectangle $10 \times \frac{1}{10}$ ont même aire, mais ne se ressemblent pas.

PROJECTIONS ET MAILLAGES

Réaliser une carte c'est établir une correspondance entre la sphère terrestre et un plan (3). Il est nécessaire d'établir entre les points de la sphère et ceux du plan des relations du type :

$$\begin{aligned} x &= F(\varphi, \lambda) & y &= g(\varphi, \lambda) \\ \lambda &= h(x, y) & \varphi &= k(x, y) \end{aligned}$$

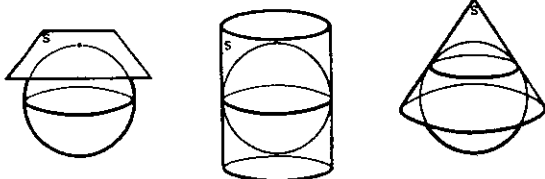
où x et y sont les coordonnées rectangulaires dans le plan, φ est la latitude et λ la longitude ; f, g, h, k des fonctions continues quelconques.

Parmi les solutions possibles à ce problème, les mathématiciens en ont décrit près de deux cents, dont une trentaine sont employées dans les applications usuelles.

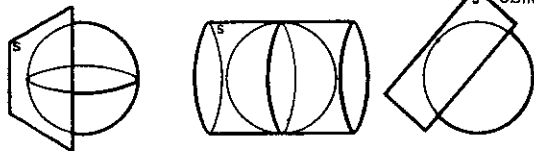
En pratique, deux familles de solutions sont envisageables.

• Soit on utilise une **projection géométrique** de toute ou partie de la sphère terrestre sur une surface développable (plan, cylindre ou cône) tangent à la Terre et on aplatit cette surface pour obtenir la carte recherchée. Les résultats obtenus sont très divers. Mais l'origine géométrique du procédé permet dans beaucoup de cas des tracés, des mesures et des calculs sur les cartes (la carte de Lambert précédente est de ce type).

Projections directes, ou polaires, ou équatoriales.



Projections transverses, ou méridiennes.



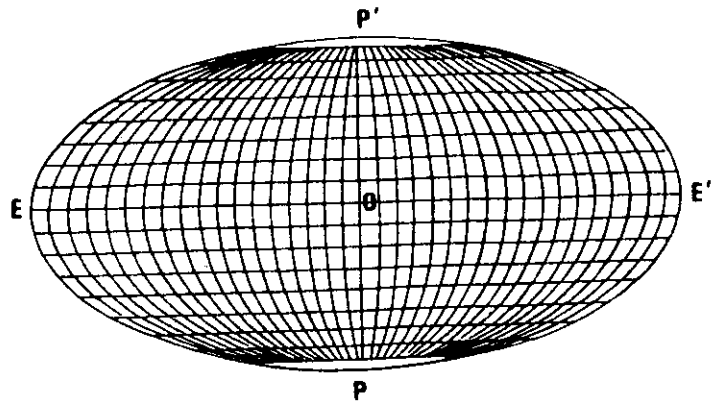
Projection oblique.

Divers types de projections géométriques.

On peut projeter la surface de la Terre sur un plan, un cylindre, un cône...

• Soit la relation entre les coordonnées est du type analytique et ne correspond à aucune projection perspective. On obtient alors soit des cartes se prêtant aux tracés (comme la carte Mercator), soit des cartes purement géopolitiques (carte Peters), soit des planisphères (comme celle de Mollweide).

Dans tous les cas, la carte se dessine par rapport à un **réseau**, ou **maillage**, image des méridiens et des parallèles quadrillant la sphère terrestre. Remarquons que les parallèles et les méridiens étant ortho-



Le canevas de Mollweide



La planisphère de Mollweide

Exemple de canevas conventionnel. - Il sert à la planisphère de Mollweide : carte équivalente dans laquelle les méridiens sont des arcs d'ellipse et les parallèles sont des droites parallèles tracées à des distances telles que l'équivalence des mailles est conservée.

gonaux, une projection conforme (qui conserve les angles) donnera naissance à un maillage où tous les angles sont droits (mais un maillage orthogonal ne correspond pas nécessairement à une projection conforme !). ■

A LIRE

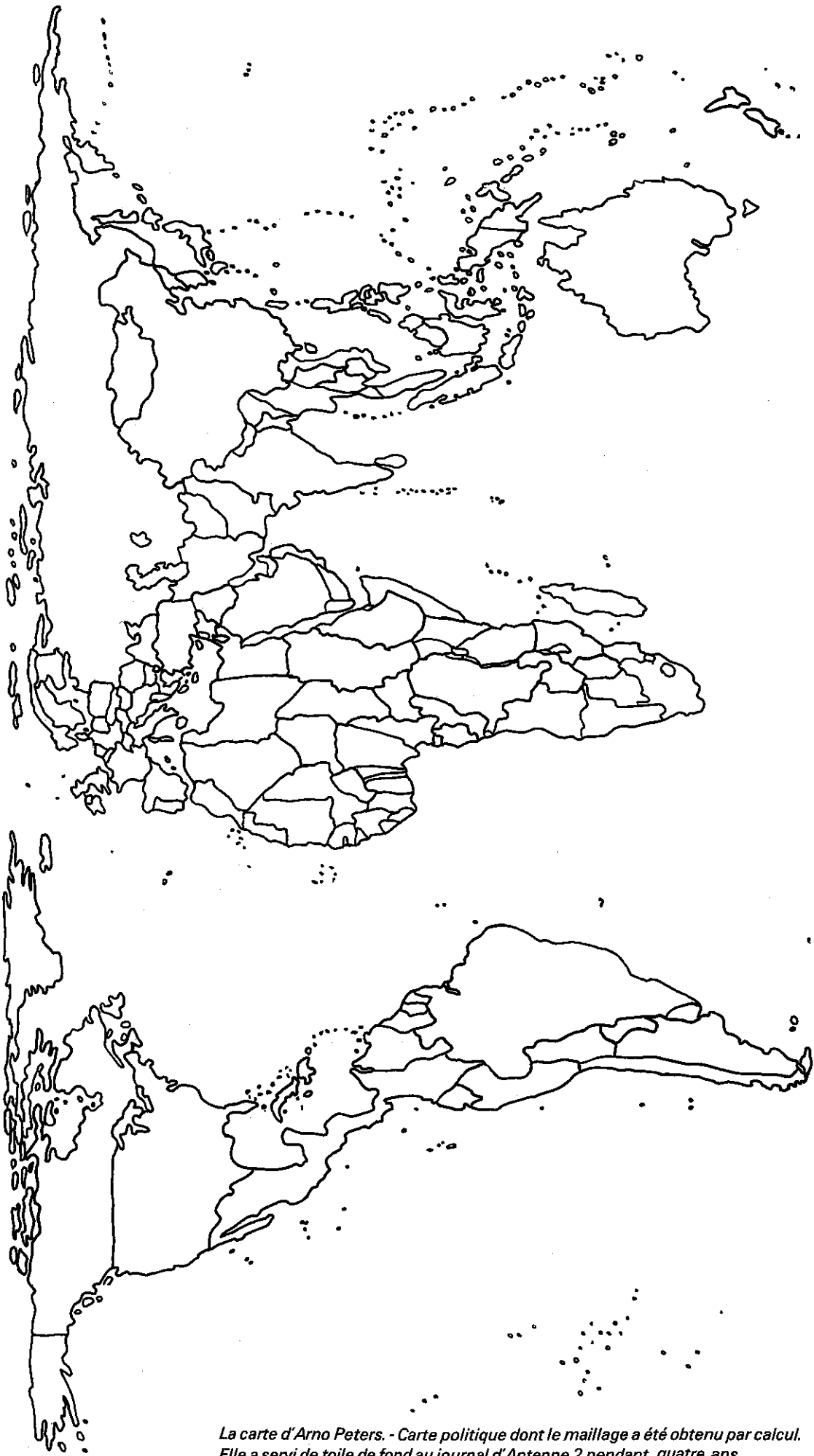
Pour une approche du problème
La cartographie (que sais-je ? PUF 1985)

Pour les mordus,
une nouvelle publication trimestrielle
Mappemonde

GIP Reclus
Maison de la Géographie
17, rue Abbé de l'Épée
34000 Montpellier

Bulletin inter-IREM : Astronomie

(3) Nous négligeons ici le fait que la Terre est approchée par un ellipsoïde. En fait, la chaîne d'applications est : ellipsoïde → sphère → plan. Mais c'est la seconde qui pose de vrais problèmes.



La carte d'Arno Peters. - Carte politique dont le maillage a été obtenu par calcul. Elle a servi de toile de fond au journal d'Antenne 2 pendant quatre ans.

LA TERRE EST-ELLE RONDE ?

C'est **Pythagore** (VI^e siècle av. J.C.) qui, le premier semble-t-il, imagina la sphéricité de la Terre. Mais c'est **Eratosthène** (III^e siècle av. J.C.) qui en évalua les dimensions, voici comment.

Il apprit qu'au solstice d'été, le soleil était à midi à la verticale de Syène. A Alexandrie, qui est sur le même méridien, il mesura à cette même date l'angle à midi des rayons solaires avec la verticale : cet angle est celui que forment les verticales d'Alexandrie et de Syène. Un calcul simple, nécessitant la connaissance de la distance séparant les deux villes, lui permit d'évaluer la circonférence terrestre : 46 150 km. Ce remarquable résultat fut vite oublié, et ses successeurs adoptèrent une valeur inférieure (28 400 km), qui donna lieu à bien des surprises lors des voyages de la Renaissance...

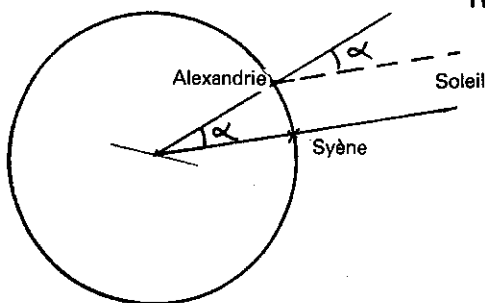
Le problème fut repris au XVII^e siècle quand l'Académie des Sciences de Paris (fondée en 1666) envoya l'abbé Jean Picard, Philippe La Hire et Jean-Dominique Cassini mesurer l'arc de méridien entre Paris et Amiens. Leur mesure (en toises) donna 39 933 km de circonférence à une Terre sphérique.

Mais Galilée avait mis en doute la sphéricité de la Terre et Newton émit l'hypothèse que notre globe était un ellipsoïde de révolution aplati aux pôles. Deux expéditions (françaises encore une fois) partirent : vers le pôle, celle de Maupertuis et Clairaut allèrent en Laponie en 1736 ; vers l'équateur, celle de Bouguer et La Condamine fit voile vers le Pérou et ne revint qu'en 1744. On sut alors que Newton avait raison : à l'arc de 1° en Laponie correspondait une longueur au sol de 57 400 toises, tandis qu'au Pérou elle atteignait seulement 56 750 toises.

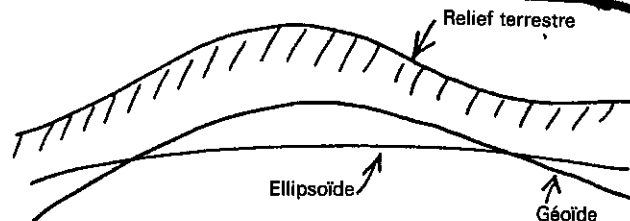
Plus précisément, Clairaut montra que l'ellipsoïde de Newton est une approximation du **géoïde**, surface non mathématique telle qu'en tout point la verticale (définie par la pesanteur) lui soit normale, et correspondant au niveau moyen de la mer. Le géoïde suit de manière adoucie le relief terrestre.

Depuis 1967, l'Union Géodésique Internationale a donné les caractéristiques de l'ellipsoïde de référence (meilleure approximation du géoïde).

Demi grand axe $R = 6\,378\,160$ km (à l'équateur)
Demi petit axe $r = 6\,356\,770$ km (au pôle)
aplatissement $\frac{R-r}{R} = \frac{1}{298,25}$, soit moins de 4 pour 1000.



Le raisonnement d'Eratosthène pour mesurer la circonférence de la Terre.



Le géoïde, surface équipotentielle non mathématique distincte de l'ellipsoïde, suit de manière adoucie le relief terrestre.

QUESTIONS A UN GLOBE

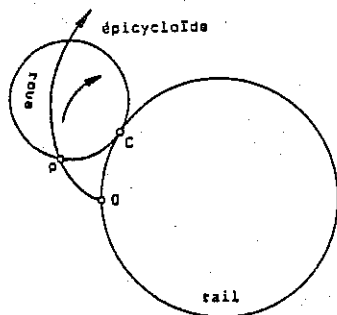
Placez-vous devant un globe terrestre et essayez de répondre aux questions suivantes en vous servant d'élastiques, ficelles ou mini-rapporteurs.

1. Trouvez le chemin le plus court entre Moscou et Dakar. Évaluez cette distance.
2. Quelle route suivre, en bateau, pour aller de Saint-Malo à Terre-Neuve et faire le minimum de mesures et de calculs (1) ? Cette route est-elle la plus courte ?
3. Quelle route suivre pour atteindre le pôle en partant du port le plus au Sud du Groënland (cap Farewell) en navigant à cap constant ? (c'est-à-dire de telle façon que la route fasse avec l'aiguille de la boussole un angle constant).
4. Un ours marche droit devant lui sur 100 km, tourne à angle droit, puis fait encore 100 km droit devant lui, puis tourne encore à angle droit, refait 100 km, et se retrouve à son point de départ. Est-ce un ours blanc ou un ours brun ? Y a-t-il plusieurs points de départ/arrivée possibles ?

(1) C'est en répondant à cette question que Jacques Cartier a traversé l'Atlantique en 20 jours en 1534. A la différence près qu'il ne savait pas qu'il allait au Canada !

Nouvelle rubrique qui veut prendre, dans l'actualité, les réalisations d'artistes utilisant les outils mathématiques. Peu de texte, des œuvres. Ici deux études : l'une sur la cardioïde et l'autre sur le triangle, la matière et la couleur. La première est extraite du bulletin du Centre Vaudois sur l'enseignement mathématique, n° 36 - 1986

Observez une roue qui roule sans glisser sur un rail circulaire. Un point du bord de cette roue décrit une trajectoire que les mathématiciens nomment épicycloïde.



- P: point du bord de la roue.*
- O: position initiale de P, au contact du rail.*
- C: point de contact de la roue et du rail, centre momentané de rotation de la roue. L'adhérence y est parfaite: les arcs CO et CP ont la même longueur.*

La forme de cette épicycloïde dépend des tailles relatives de la roue et du rail. Lorsque ces tailles sont égales, la courbe est cardioïde: en forme de cœur.

Ce n'est pas sa nature d'épicycloïde qui fonde la construction de la cardioïde math-art. Partant du rail et du point O, construisez une famille de cercles, 48 en l'occurrence, centrés en divers points du rail et passant tous par O. La cardioïde est leur enveloppe.

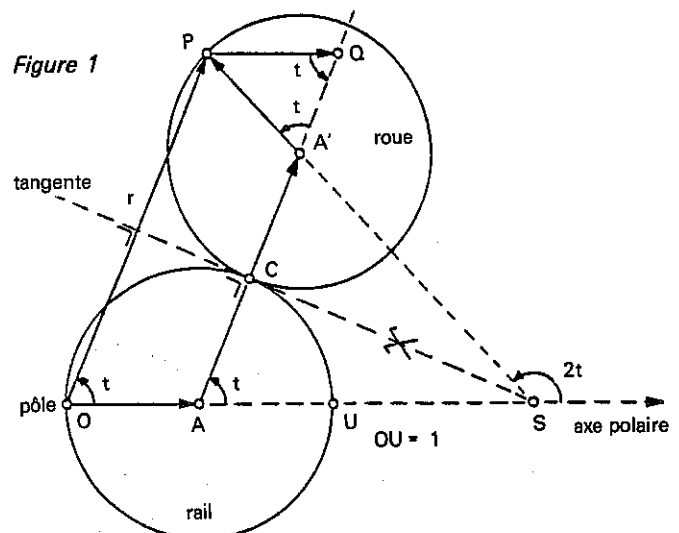
Que deux genèses aussi différentes puissent aboutir à la même courbe, voilà qui fait l'étonnement du profane et les délices du mathématicien. Celui-là demeure livré au doute, celui-ci confronté à un phénomène typique et fréquent dans son domaine, était d'une preuve son intuition première (cf. annexe).

L'épithète math-art précise que, suivant une tendance caractéristique de ce siècle, ce n'est pas l'objet

lui-même qui est diffusé, mais l'information qui permet à quiconque de le reconstituer. L'artiste* crée le "mode d'emploi" de l'œuvre, le "spectateur" la réalise.

ANNEXE

A) Equation polaire de l'épicycloïde cardioïde



Puisque la roue et le rail sont égaux ainsi que les arcs CO et CP, la figure est symétrique par rapport à la tangente commune en C des deux cercles. PQ est construit égal à OA . En fonction de $t = \angle UOP$, on calcule les autres angles de la figure 1.

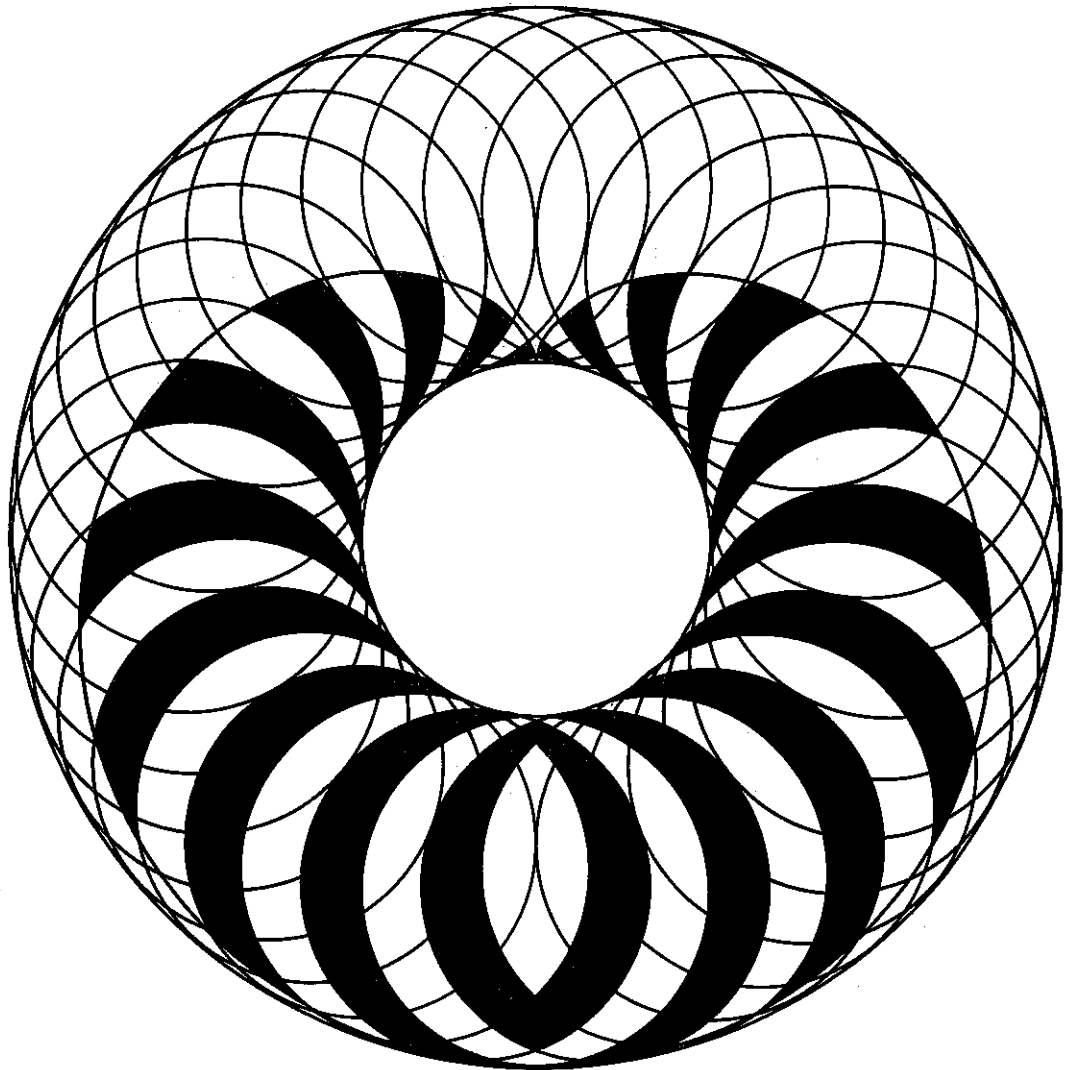
Passons aux vecteurs :

$$\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AA'} + \vec{A'P} = \vec{AA'} + \vec{A'P} + \vec{PQ} = \vec{AQ}$$

$$|\vec{OP}| = |\vec{AQ}| = AA' + 2A'P \cos t = 1 + \cos t$$

L'équation de l'épicycloïde cardioïde est donc $r = 1 + \cos t$.

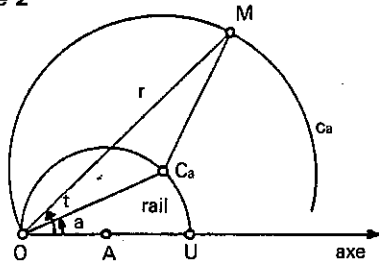
*Hermann von Baravalle, *Geometrie als Sprache der Formen*, Stuttgart, 1963.



B) Equation polaire des cercles de la cardioïde math-art

c_a l'un quelconque de ces cercles, est caractérisé par la position de son centre C_a sur le rail, et cette position est déterminée par l'angle $\text{UOC}_a = a$ (figure 2).

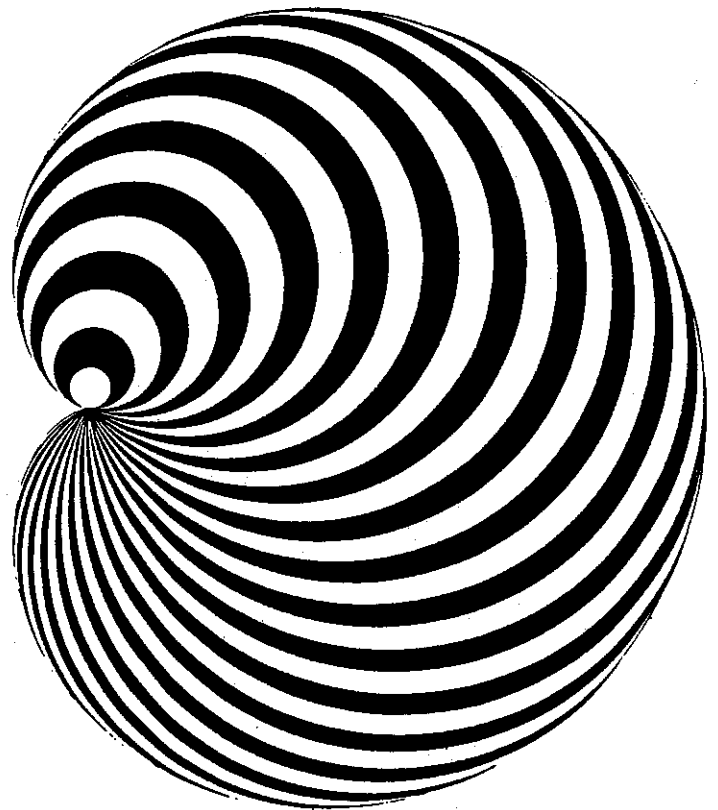
Figure 2



Dans le triangle isocèle OC_aM , $\text{OM} = r$ et $\text{C}_a\text{M} = \text{C}_a\text{O} = \cos a$ car $\text{OU} = 1$ et l'angle OC_aU est droit. Donc $r = 2\cos a \cos(t-a)$ ou encore $r = \cos t + \cos(t-2a)$.

C) L'épicycloïde cardioïde est l'enveloppe des cercles c_a .

Une demi-droite orientée Ot qui recoupe C_a et l'épicycloïde le fait en deux points d'abscisse $\cos t + \cos(t-2a)$ et $1 + \cos t$ respectivement, t désignant l'angle UOt . Or $\cos t + \cos(t-2a) < 1 + \cos t$ sauf si $t = 2a$. Cela montre qu' Ot rencontre c_a avant l'épicycloïde si $t \neq 2a$ et que les deux courbes ont en commun le point dont les coordonnées polaires sont $(2a; 1 + \cos 2a)$.



Donc l'épicycloïde cardioïde englobe c_a et touche ce cercle au point en question. Qui plus est, tout point de la cardioïde apparaît, pour un a bien choisi, comme point de contact de la courbe avec un des cercles c_a . Le point O semble faire exception, mais c'est le point de contact de la cardioïde avec le cercle de rayon nul centré en O .

TRIANGLES de Patrice MOREAU Nantes

Au-delà de l'Art Construit, le besoin d'appivoiser les transformations, de faire disparaître les genres. Aucun classement pour cet artiste, ni peintre ni sculpteur, mais un passage délibéré d'une non-peinture à une non-sculpture.

Ici, le support toile s'enroule autour des lignes, le papier photographique lui, devient dessin et la forme, simplifiée à l'extrême, est matérialisée par un bois qui lui donne existence. La sculpture elle-même vit avec son reflet : son double en peinture. Chaque couleur portée à son individualité, est son propre signifiant.

Rythme des formes, rythme des couleurs, musique de l'œil. En quelque sorte, un art de méditation, mais aussi d'osmose des moyens plastiques.

On semble comprendre que les artistes, dans cette recherche, veulent faire un passage à travers les différentes formes d'expression artistique, où proposent une réflexion sur des synthèses ; propos où la matérialisation serait le porteur de l'œuvre, un élément de l'ensemble créé, mais pas nécessairement sa finalité.

Josiane GRARE, mai 1986

Patrice MOREAU éclate le triangle, résolu à n'en montrer que le fondement : ses trois angles.

La simplicité et l'évidence de cette proposition n'est qu'illusoire. C'est là que commence l'univers du peintre; décider de briser cet espace, pour nous ouvrir à des dimensions nouvelles, affirmation d'un code pictural, parcours dans les marges de l'œuvre.

Les tensions s'opposent dans le sens le plus strict.

La toile sort de son cadre pour devenir objet.

La pureté des couleurs fait exploser la palette, les demi-teintes n'ont plus lieu d'exister.

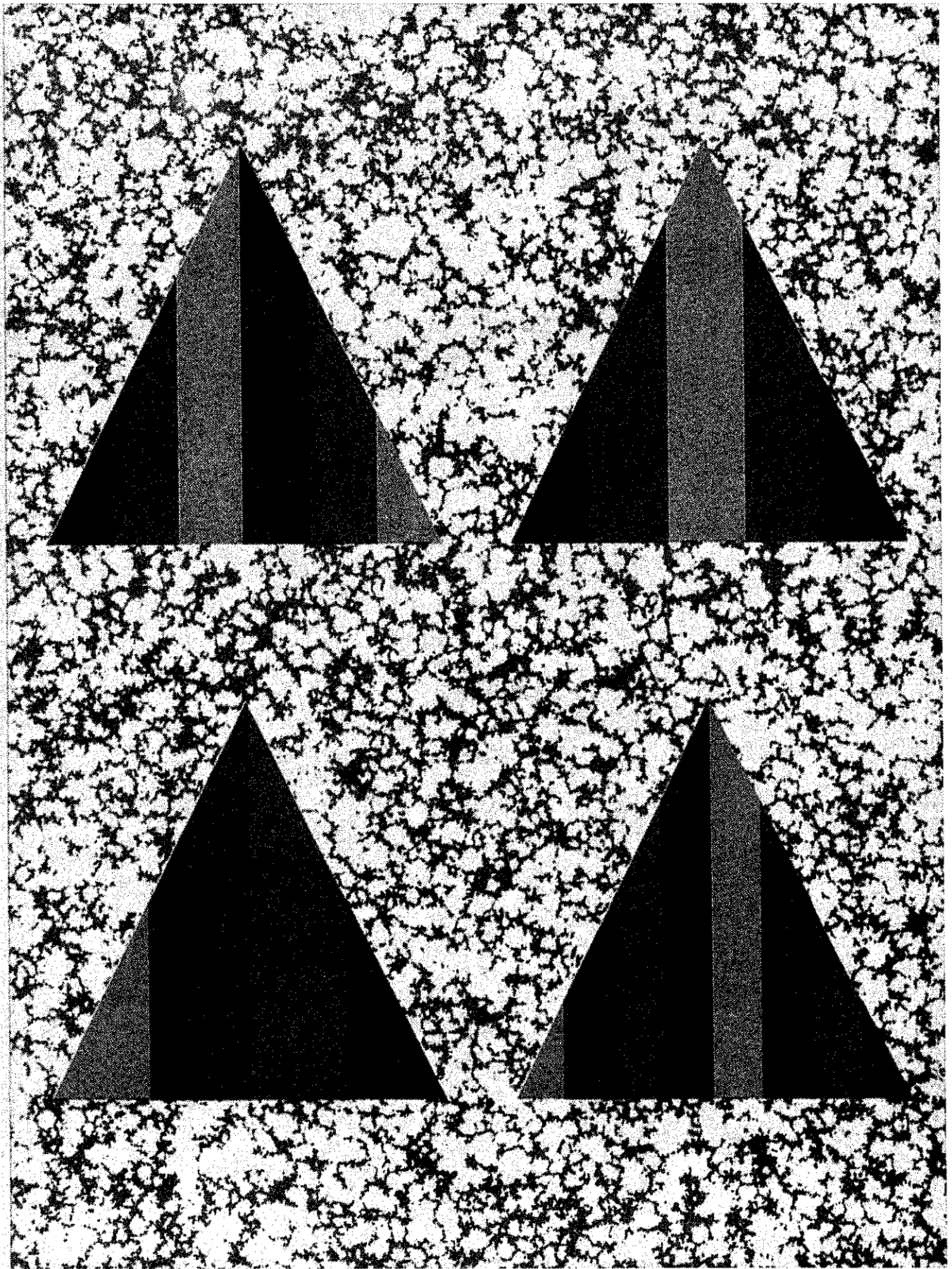
Les œuvres sont des cibles pour les jets du regard. Ici pas question de parcourir, il faut s'arrêter sur chaque œuvre.

Dans ses derniers travaux la géométrie, opposée au naturel des formes, ne fait qu'affirmer la vision quotidienne de nos parcours. Nous sommes pris par le doute : sculpture ou peinture ?

C'est bien là qu'il faut voir l'œuvre de Patrice Moreau, dans cette marge si étroite qui sépare ou rapproche les deux techniques.

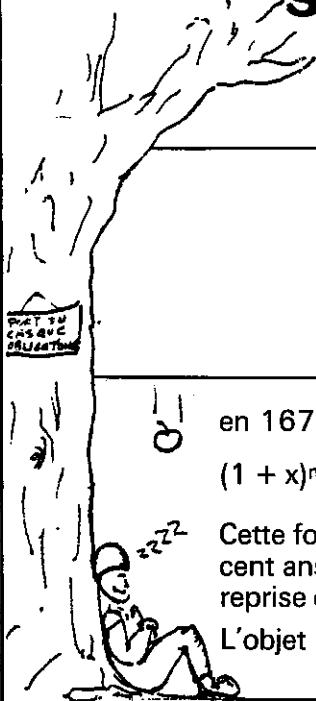
Il nous propose son "code de l'image", à nous de l'emprunter.

Arielle MEUNIER, mai 1986



SUR LES TRACES D'ISAAC NEWTON...

Jacques LUBCZANSKI



en 1676, Isaac Newton écrit l'égalité suivante, sans la démontrer :

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots$$

Cette formule connue sous le nom de "développement du binôme" sera prouvée près de cent ans plus tard, en 1773, pour m rationnel, par Leonhard Euler, et cette preuve sera reprise et étendue en 1821 par Augustin Cauchy, dans son cours à l'École Polytechnique.

L'objet de ce travail est d'étudier la formule de Newton dans quelques cas particuliers.

A. Formule de Newton pour un exposant entier positif

On suppose dans cette partie que $m \in \mathbb{N}$.

a. Ecrire la formule de Newton en extension (c.a.d. sans les ...), pour $m = 2, 3$ et 4 , puis pour m quelconque : combien y-a-t-il de termes dans la somme ? Quel est le coefficient de x^k où k est un entier entre 0 et m ? On note C_m^k ce coefficient.

b. Démontrer la formule, par récurrence.

c. En déduire, en posant $x = \frac{a}{b}$, que pour a et b réels, on a l'égalité :

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^m C_m^k a^k b^{m-k}$$

B. Un exemple d'exposant négatif

On suppose dans cette partie que $m = -1$.

a. Dans la formule de Newton, combien y-a-t-il de termes dans la somme ?

On note $S_n(x)$ la somme des n premiers termes. Montrer que $S_n(x)$ est la somme des termes d'une suite géométrique. En déduire une autre expression de $S_n(x)$.

b. Discuter, selon les valeurs de x , le comportement asymptotique (c'est-à-dire quand $n \rightarrow \infty$) de $S_n(x)$.

c. Justifier la formule de Newton pour $m = -1$, en précisant son domaine de validité pour x .

C. Un exemple d'exposant fractionnaire

On suppose dans cette partie que $m = 1/2$.

a. Dans la formule de Newton, combien y-a-t-il de termes dans la somme ?

On note encore $S_n(x)$ la somme des n premiers termes.

Etudier les variations de la fonction $x \mapsto (1+x)^{1/2}$ et des quatre fonctions S_1, S_2, S_3 et S_4 .

b. Tracer avec soin les graphes des cinq fonctions précédentes :

- dans un même repère d'unité 1 cm, pour $x \in [-10; 10]$

- dans un même repère d'unité 10 cm, pour $x \in [-1,2; 1,2]$

c. En observant les graphes, quelle conjecture peut-on émettre quant à la validité de la formule de Newton pour $m = 1/2$?

Inspirée de la brochure "thèmes en seconde" de la collection inter-irem n° 1-1981, cette activité a été réalisée dans une classe togolaise. D'autres compte-rendus d'activités paraîtront dans les prochains PLOT si vous nous les communiquez à temps !

Thème : "Comment varie l'aire d'un triangle isocèle ABC ($AB = AC = 10$ cm) quand on fait varier la longueur de la base ?"

Classe : Au Lycée de Tokoin (Lomé), 28 élèves de seconde indifférenciée, très hétérogène.

Matériel : Compas, équerre, règle graduée ; papier millimétré ; calculatrices (8 seulement).

Durée : Deux séances (1 h et 2 h). Les trois dernières heures du premier trimestre ; le même travail aurait sans doute demandé moins de temps en milieu de trimestre.

PREMIERE SEANCE

1. Je communique le thème à la classe, sans autre indication ; les élèves commencent à tracer des triangles. Quelques-uns dessinent des "petits" triangles, sans tenir compte de la condition $AB = AC = 10$ cm.

Premières réflexions :

- "L'aire varie avec l'angle \hat{A} ; quand l'angle devient plat, l'aire tend vers 0"
- "Non ! Elle augmente toujours"
- "On a : aire = $BC \times h / 2$. Quand BC augmente, h diminue, donc l'aire est constante".

2. Sans chercher à donner raison aux uns ou aux autres, je conseille alors de déterminer l'aire du ou des triangles qu'ils ont dessiné(s).

La formule : aire = base \times hauteur / 2 est bien connue, mais quelques élèves mesurent un deuxième côté au lieu de la hauteur. Les notations utilisées sont diverses : aire, a, A... ; B, b,...

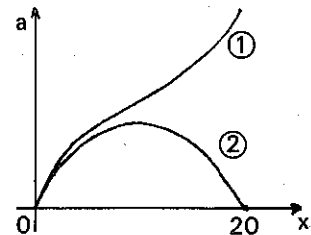
Pour permettre le dialogue entre les "chercheurs", nous décidons d'uniformiser les notations :

BC sera noté x ; la hauteur h ; l'aire a.

3. J'interviens pour poser quelques questions :

- Quelle est la valeur de x qui correspond à votre triangle ?
- Comment peut-on faire varier x ? (La réponse est immédiate : entre 0 et 20).
- A chaque valeur de x correspond une valeur de a ; on pourra illustrer cette situation par une représentation graphique : avez-vous une idée de l'allure du résultat ?

La classe se divise en deux tendances, ci-contre illustrées.



4. Je suggère de calculer les valeurs de a pour les valeurs entières de x comprises entre 0 et 20. Chaque élève "s'occupe" de 2 triangles et les résultats sont rassemblés sur le tableau.

Une seule erreur de calcul est constatée, et corrigée par les élèves eux-mêmes ; quelques discussions s'engagent sur les valeurs approchées (par excès ? par défaut ? combien de chiffres après la virgule ?).

Un élève (parmi les meilleurs de la classe) questionne : "on ne peut pas calculer, au lieu de mesurer la hauteur ?". Un petit groupe se lance alors dans les calculs ; il faut noter qu'il n'y a pas eu à ce niveau de recherche de formule littérale : la hauteur h est calculée pour chaque valeur de x.

5. Le tableau de valeurs se remplit progressivement ; je distribue les feuilles de papier millimétré.

Se pose alors le problème du choix d'un repère : x variant de 0 à 20, quelques élèves estiment qu'il est plus judicieux de placer la feuille horizontalement, et l'information circule vite. Mais comment choisir l'unité sur l'axe des ordonnées ?

Pendant que certains s'intéressent à la représentation graphique, d'autres s'évertuent à trouver une "formule" donnant a en fonction de x.

Deux résultats sont proposés :

$$a = x^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad a = \frac{x \sqrt{400 - x^2}}{2}$$

La première séance (1 h) s'achève alors. Pour le lendemain, chaque élève est invité à déterminer la formule donnant a.

Remarques :

- de nombreux élèves continuent la recherche pendant la récréation.
- à 12 h, trois élèves (d'ordinaire assez passifs en classe) viennent me présenter la courbe (correctement tracée) qu'ils ont obtenu.

DEUXIEME SEANCE

Sur ma demande, les élèves ont apporté leurs calculatrices (8 au total).

La "formule" a en général été calculée correctement.

6. A l'aide des calculatrices, les élèves remplissent une troisième colonne dans le tableau obtenu : les valeurs de a obtenues par le calcul, avec 2 chiffres après la virgule. Ce sont ces valeurs qui seront utilisées par la suite.

Quelques élèves ont déjà tracé la courbe, les autres commencent. Le problème du choix de l'unité sur l'axe des ordonnées gêne beaucoup d'élèves :

- "Ça sort de la feuille"
- "Ma courbe est trop plate"

Je ne donne aucune indication à ce sujet. Certains recommencent lorsque leur courbe ne les satisfait pas.

Le placement de valeurs décimales sur une échelle s'avère très laborieux et prend beaucoup de temps. Les points obtenus sont reliés entre eux soit pas une courbe "harmonieuse", soit par des segments de droite.

Toutes les courbes sont tracées avec plus de soin qu'à l'accoutumée, sans doute grâce à l'utilisation du papier millimétré.

Selon les élèves, le tracé de la courbe a nécessité de 20 à 50 mn, ce qui m'a paru bien long pour des élèves de seconde !

7. Je pose alors une nouvelle question : quelle est la valeur de x pour laquelle l'aire du triangle est la plus grande ?

Réponses immédiates :

- "D'après le graphique, c'est à peu près pour 14"
- "C'est entre 13 et 15"

J'invite alors les élèves à déterminer cette valeur avec plus de précision. Voici les méthodes proposées :

- "On va essayer les valeurs entre 13 et 15"
- "On va passer par la formule" (?)
- "On peut prendre la relation $a = \dots$ comme une fonction et calculer son taux de variation"

Chacun choisit sa méthode et un concours est lancé pour trouver la valeur exacte. Au fur et à mesure que le résultat s'affine, les élèves viennent inscrire leurs résultats au tableau. On obtient :

14	→	49,98998
14,1	→	49,999112
14,13	→	49,999922
14,14	→	49,999992
14,141	→	49,999999

La proposition : 14,15 → 50,000278 a soulevé de vives protestations dans la classe ("c'est pas possible !"), mais les élèves n'ont pas su expliquer cette impossibilité.

Ceux qui avaient tenté d'étudier le signe du taux de variation abandonnent (erreurs de calcul, trop compliqué).

8. On connaît maintenant la valeur cherchée avec suffisamment de précision pour tracer le triangle correspondant. Quelle est l'"allure" de ce triangle ?

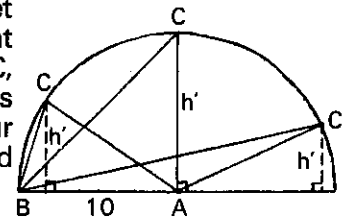
- "C'est un triangle rectangle" (vérification à l'équerre).

J'invite alors les élèves à déterminer les valeurs de x et de a correspondant à ce triangle particulier.

Pour x , on trouve $10\sqrt{2}$, et pour a , 50. Cela correspond bien aux calculs précédents.

9. La fin de la séance approchant, j'apporte moi-même une justification de ce résultat, à l'aide d'une figure.

Lorsque x varie, il est clair que le point C décrit un demi-cercle de centre A et de rayon 10. En désignant par h' la hauteur issue de C , on a : $a = 5h'$, et il est alors facile de voir que la valeur maximum de a correspond à ABC triangle rectangle.

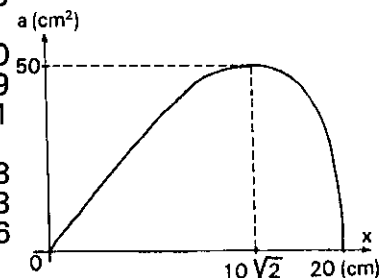


Fin de la séance.

10. Voici les résultats obtenus en classe :

Tableau		
0	0	0
1	5	4,99
2	9,9	9,95
3	14,7	14,83
4	19,6	19,60
5	24,2	24,21
6	28,5	28,62
7	32,9	32,79
8	36	36,66
9	40,5	40,19
10	45	48
11	46,8	45,93
12	48	48
13	50	49,40
14	49	49,99
15	49,5	49,61
16	48	48
17	45,8	44,78
18	38,8	39,23
19	28,5	29,66
20	0	0

Courbe



11. Je regrette de n'avoir pas pensé à approfondir en classe l'idée d'un élève de calculer le taux de variation de la fonction :

$$f: x \mapsto \frac{x}{y} \sqrt{400 - x^2}$$

En effet, un calcul tout à fait à la portée d'un élève de seconde montre que ce taux est du signe de :

$$400 - (x_1^2 + x_2^2)$$

On vérifie alors aisément que f est croissante sur $[0, 10\sqrt{2}]$, décroissante sur $[10\sqrt{2}, 20]$, ce qui valide de façon indiscutable la valeur $10\sqrt{2}$ déjà obtenue.

12. Conclusion

Les difficultés rencontrées lors du tracé de la courbe : choix d'un repère, placement de valeurs décimales sur un axe gradué, montrent qu'à l'évidence ces élèves de seconde n'ont pas assez pratiqué ces activités dans les classes précédentes, et c'est bien regrettable.

Mais il est bien agréable de constater que ces élèves sont prêts à s'enthousiasmer lorsqu'on fait appel à leur esprit d'initiative. Toute la classe a participé, et les idées les plus riches viennent quelquefois d'éléments passifs, ou montrant d'ordinaire peu d'intérêt pour les mathématiques. Je l'avoue, je vais vite recommencer ce type d'expérience. ■

CALCUL DE Sin x, Cos x, Tan x, ...SUR CALCULETTE

Jacques VERDIER - Nancy

Les calculettes seraient-elles passées de mode ?

A l'ère de l'ordinateur pour tous les enseignants, nous pensons que cet outil de calcul qui est dans la poche de tous les élèves doit continuer à être aussi un outil d'apprentissage du primaire au lycée.

Jacques Verdier, qui a préparé avec les lorrains le dernier congrès APMEP à Metz les 8-9 et 10 novembre, nous montre ici comment addition, soustraction et décalage permettent à la calculette de... calculer (approximativement).

● Les 3 fonctions de base de l'UAL (unité arithmétique et logique) d'une calculette sont : l'ADDITION, la SOUS-TRACTION, le DECALAGE.

L'algorithme réalisant les 4 opérations (+, -, ×, ÷), en virgule flottante, n'utilise que ces 3 fonctions : la division est effectuée par soustractions et décalages, et la multiplication par additions et décalages.

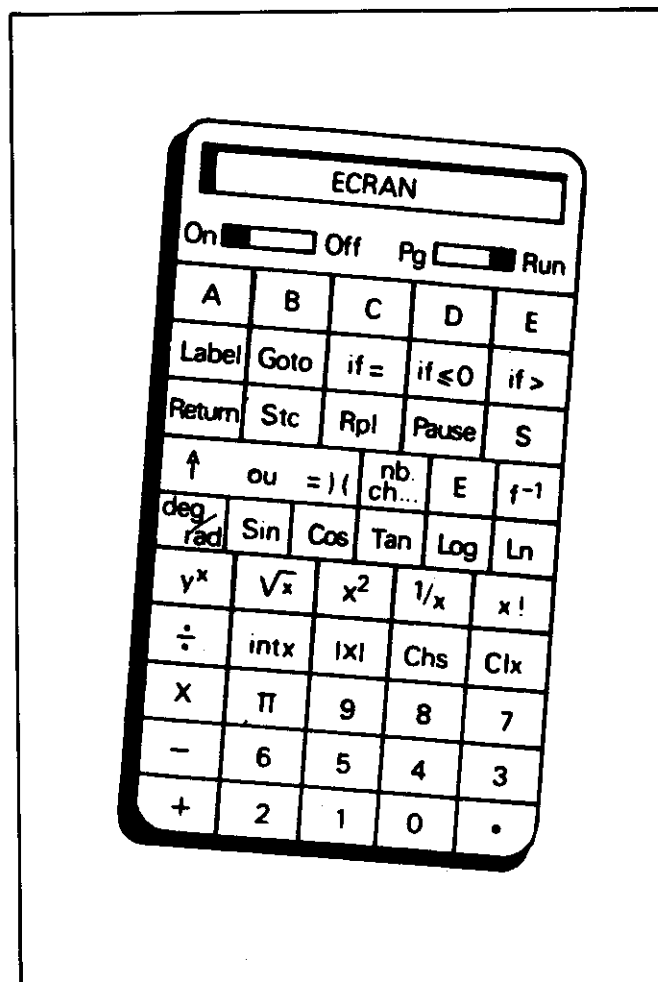
La structure interne de la calculette est très bien adaptée pour ces calculs en virgule flottante (ou notation scientifique).

● Dans une "petite" calculette (même HP41 ou TI59), les données sont codées en "DCB" (0 = 0000, 1 = 0001, 2 = 0010, ..., 9 = 1001), donc 4 bits par chiffre. Cela confère une certaine lenteur ! (un nombre est stocké sur 8 octets, soit 16 chiffres décimaux utilisés, sur une TI59).

Pour comparer : le Basic niveau II du TRS 80 stocke un nombre (en simple précision) sur 4 octets, en virgule flottante *binnaire* (et non DCB), ce qui permet de stocker jusqu'à $\pm 1,701411 \times 10^{38}$.

● Le mode angulaire est le radian. La machine a en mémoire les constantes $180/\pi$ et π , ce qui permet de ramener les angles en radians (conversions D-R-G) et de les restreindre au 1^{er} quadrant ($0 \ll x \ll \frac{\pi}{2}$).

Moyennant $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$ et $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$, il suffit à la machine de savoir calculer $\tan x$ (pour x radians entre 0 et $\pi/2$).



ALGORITHME DE CALCUL DE tan x :

• Le processus consiste à soustraire de x un certain nombre de constantes a_i , codées en MEM.

Ces constantes sont appelées ATR (arc tangent radix) et valent :

$$a_0 = \text{Arc tan } 10^0 = \frac{\pi}{4} = 0.785\ 398\ 163\ 397\ 450$$

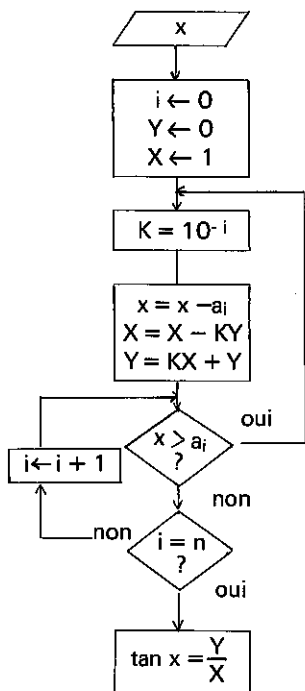
$$a_1 = \text{Arc tan } 10^{-1} = 0.099\ 688\ 652\ 491\ 200$$

$$a_2 = \text{Arc tan } 10^{-2} = 0.009\ 999\ 666\ 686\ 670$$

$$a_3 = \text{Arc tan } 10^{-3} = 0.000\ 999\ 999\ 666\ 667$$

$$a_4 = \text{Arc tan } 10^{-4} = 0.000\ 099\ 999\ 999\ 667$$

On pourrait continuer ainsi, avec $a_i = \text{Arc tan } 10^{-i}$. La TI 58/59 ne comporte que les cinq valeurs ci-dessus.



• L'algorithme ressemble à celui d'une division. Au bout de quelques dizaines de boucles, on peut trouver tan x avec une très bonne précision. Il est parfaitement adapté à la conception de la calculette, ce qui a permis le développement très rapide des calculettes scientifiques.

L'algorithme de calcul de ln x est du même type (cf. fiche "comment une calculatrice de poche calcule ln x").

• Voir plus loin l'exécution de l'algorithme pour $x = 1,5$ et une justification géométrique du procédé.

x = angle en rad
 $0 < x < \pi/2$
 a_i = constante en MEM

n = précision voulue
 i varie de 0 à n

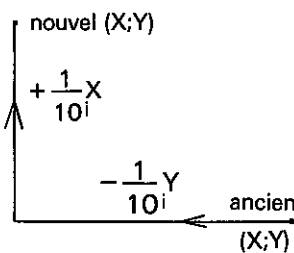
Pas n°	X	Y	x restant
			1,5
1	1	1	0,714 601 84
2	0,9	1,1	0,614 933 18
3	0,79	1,19	0,515 264 53
4	0,671	1,269	0,415 559 58
5	0,5441	1,3361	0,315 927 23
15	0,104 93	1,460 646	0,000 921 60
20	0,104 204 14	1,460 698 33	0,000 421 6045
30	0,103 588 75	1,460 742 13	0,000 000 3045

Au 30^e pas, on a déjà $\frac{Y}{X} = 14,101\ 358$

(alors que $\tan 1,5 = 14,101\ 419$).

Le calcul est bien plus rapide sur une TI30 que sur une TI59 (il dépend de la précision souhaitée!).

INTERPRETATION GEOMETRIQUE



On va de l'ancien point (X; Y) au nouveau par

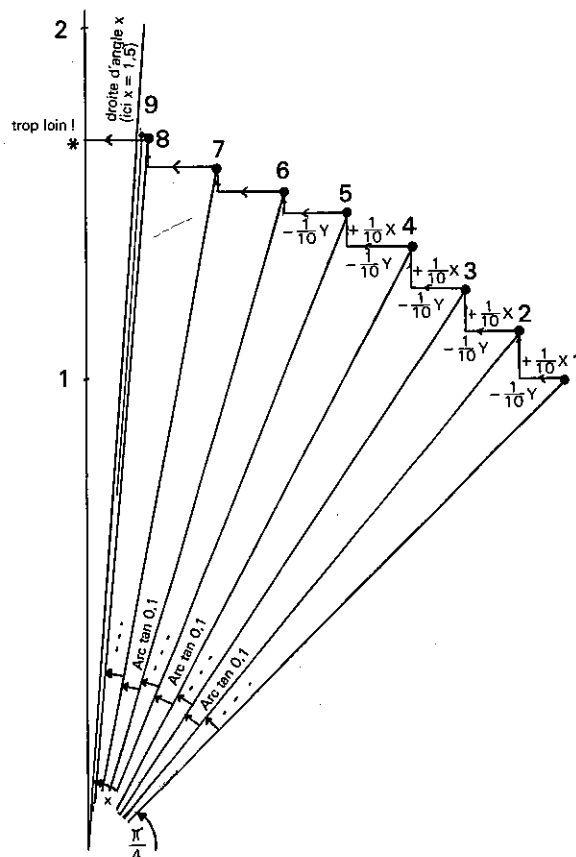
$$X = X - \frac{1}{10^i}Y$$

$$Y = Y + \frac{1}{10^i}X$$

Il est facile de montrer que l'angle duquel on a tourné est : $\text{Arc tan } \frac{1}{10^i}$

$$\text{car } \tan(u - v) = \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v} = \frac{1}{10^i}$$

$$\text{(avec } \tan u = \frac{Y}{X} \text{ et } \tan v = \frac{Y + X/10^i}{X - Y/10^i}$$



On part de $\frac{\pi}{4}$, et on ajoute donc $\text{Arc tan } \frac{1}{10}$ autant de fois que possible (sans toutefois dépasser x).

Ensuite, on ajoute $\text{Arc tan } \frac{1}{100}$, autant de fois que possible, puis $\text{Arc tan } \frac{1}{1000}$, etc.

La convergence vers le x de départ est "évidente" (démonstration rigoureuse dans : J.E. VOLDER, "The Cordic Trigonometric Computing Technics", sept. 1979, consultable à Paris au CNRS et au CNET).

Sur cet exemple précis ($x = 1,5$ rad), il faut enlever d'abord 1 fois $\frac{\pi}{4} = \text{Arc tan } 1$, puis 7 fois $\text{Arc tan } \frac{1}{10}$ (voir figure), ensuite 1 fois seulement $\text{Arc tan } \frac{1}{100}$, puis 6 fois $\text{Arc tan } \frac{1}{103}$, puis encore 9 fois $\text{Arc tan } \frac{1}{104}$.

Il y a ensuite à faire une estimation de l'erreur pour corriger le résultat. ■

QUAND ILS/ELLES "DEMONTRENT" POUR LA PREMIERE FOIS...

Roger PERROT - Rézé (Loire-Atlantique)

L'apprentissage progressif de la déduction est l'un des objectifs de l'enseignement des mathématiques au collège. Beaucoup de choses ont été dites et écrites sur le sujet.

Le texte qui suit est avant tout le témoignage du vécu d'une classe de 4^e du Collège de La Petite Lande à Rézé (Loire-Atlantique); une large place est laissée à la production des élèves qui élaborent pour la première fois des textes démonstratifs...

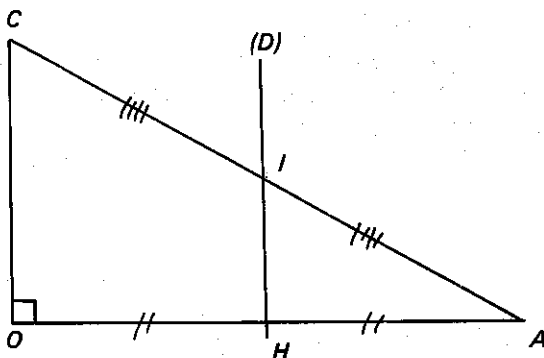
...Alors, quand on les laisse faire, comment écrivent-ils ? Comment démontrent-ils ?

La démarche suivie ici, intervient au cœur du programme de géométrie de 4^e. Il y a eu auparavant des chapitres avec beaucoup de théorèmes admis. Il vient d'y avoir le chapitre "PROJETER" et inévitablement la droite des milieux dans un triangle. On songe alors comme situation de réinvestissement possible à en profiter pour régler l'affaire du triangle rectangle et de son (demi) cercle circonscrit... et on songe aussi à tenter de mettre en place *les premières démonstrations de nouveaux théorèmes*.

C'est alors qu'est proposée par le professeur l'hypothèse/donnée qui fera l'objet de tout le travail avec sa conclusion/conjoncture :

Hypothèse/Données

Le triangle (ACO) est rectangle en O et H est le milieu de [OA]. La médiatrice de [OA] coupe [AC] en un point I.



Conclusion éventuelle :

I est le milieu de [AC].

Voici les différentes étapes du travail :

1. Ecriture personnelle de la démonstration
2. Mise en commun des textes par groupes de deux. Ré-écriture d'une démonstration par le groupe (avec exigences sur l'orthographe, les notations, le vocabulaire, la ponctuation... et la rigueur démonstrative).

Collectage par le professeur de douze textes rédigés sous la seule et entière responsabilité des auteurs.

3. Affichage et reproduction des textes.

Dans un premier temps neuf textes sont reproduits : acceptation / refus / critiques / corrections / modifications de ces textes comme travail personnel "à la maison". Voici ces neuf productions :

Démonstration 1 (Manuella - Sophie)

Le segment ~~[AO]~~ [CO] est perpendiculaire au segment ~~[OC]~~ [OA] et la droite (HI) est perpendiculaire au segment [OA]. Donc la droite (HI) est parallèle au segment ~~[AO]~~ [CO].

Dans le triangle (AOC) la droite (HI) passe par le point H qui est le milieu du segment [AO] et par le point I qui est le milieu de l'hypoténuse [CA]. Donc la droite (HI) est parallèle au segment [CO].

Démonstration 2 (S.B. - S.R.)

Dans un triangle rectangle COA la médiatrice du côté de l'angle droit [OA] est perpendiculaire [AC] en un point I, son milieu et parallèle au [CO].

Démonstration 3 (André P. - Stéphane S.)

Si dans un triangle rectangle (COA) on trace la médiatrice d'un des côtés [OA] de l'angle droit, la médiatrice est donc parallèle au côté [OC] et comme elle passe au milieu du côté [OA]. Alors elle passera par le milieu de l'hypoténuse.

Démonstration 4 (Yaux D - Haman P.)

La médiatrice $H \perp [OA]$ et $[OA] \perp [OC]$ dont la médiatrice $H // [OC]$.
Si la médiatrice $H \times [CA]$ en I alors $CI = IA$.

Démonstration 5

Dans le triangle (CAO), si le segment [OC] est parallèle à la médiatrice du segment [OA] alors la médiatrice passe par le milieu du segment [CA] en un point I.

Démonstration 6 (D.A. - C.R.)

Si le segment [CO] est perpendiculaire au segment [OA] et la médiatrice (D) du segment [OA] est parallèle au segment [OC] alors (D) coupe l'hypoténuse en son milieu.

Démonstration 7 (Stanislas C. - Laurent M.)

Le segment [OC] est \perp au segment [OA] et la droite (D) est perpendiculaire au segment [OA], dont la droite (D) est $//$ au segment [OC].

Alors la droite (D) passe par le milieu du segment [OA] et de l'hypoténuse.

Démonstration 8 (Olivier C. - Fabien V.)

Dans le triangle (OCA) si le segment [OA] est perpendiculaire au segment [OC] et que la droite (D) est perpendiculaire au segment [OA]. Alors la droite (D) est parallèle au segment [OC]. La droite (D) passe par le milieu du segment [OA] et est parallèle à la droite (OC). Alors la droite (D) passe par le milieu de l'hypoténuse [AC].

Démonstration 9 (Forten A.F. - Aubouet S.)

Dans le triangle (CAO), le segment [CO] est perpendiculaire au segment [OA], la droite (IH) est perpendiculaire au segment [OA] donc le segment [CO] est parallèle à la droite (IH). Dans le rectangle (CBAO), le segment [CA] et le segment [OB] se coupent en un point I qui est le milieu de ces diagonales. Donc le point I est le milieu de l'hypoténuse.
Alors la médiatrice passe par le milieu de l'hypoténuse.

A l'heure de géométrie suivante, le professeur intervient à son tour comme correcteur de ces textes, pendant 20 minutes environ. Ensuite, 10 minutes sont utilisées pour échanger brièvement et auto-évaluer les travaux personnels confrontés à celui du professeur.

Trois derniers textes sont alors proposés immédiatement comme *contrôle*, et en deuxième partie il est demandé d'énoncer le théorème démontré et les théorèmes et définitions utilisés dans la démonstration.

Démonstration 10

Si le segment [CO] est perpendiculaire à [OA] et le segment [OA] est perpendiculaire à la médiatrice (D) alors le segment [CO] est parallèle à la médiatrice (D).

Si H (H étant le point d'intersection de la médiatrice (D) sur le segment [OA]) est le milieu du segment [OA] et si la médiatrice (D) est parallèle à [OC] dont la droite (D) passe par le milieu du segment [AC].

Démonstration 11

On se donne un rectangle, on trace les diagonales de celui-ci, puis on trace la médiatrice de [OA], puis on sait que les diagonales se coupent en leur milieu donc en I et l'on s'aperçoit que $I = m [CA]$. Car on a fait appel à un théorème.

Démonstration 12

Dans le triangle (AOC).
Si [OC] est perpendiculaire à [OA] et si la médiatrice (IH) est perpendiculaire à [OA] alors cette médiatrice est parallèle à [OC].
Si la médiatrice (IH) est parallèle à [OC] alors cette médiatrice coupera l'hypoténuse [AC] en son milieu.

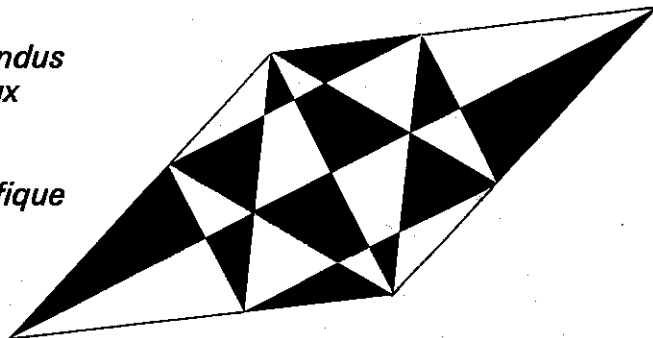
...Alors, quand on les laisse faire, comment écrivent-ils, comment démontrent-ils ?

NB. Je n'ai rien sélectionné... Ici, chacun produit et toutes les productions sont utilisées. Toutes sont vraiment utilisables.

André VIALA - Orléans

De nombreux irem viennent de publier des compte-rendus de travaux réalisés sur trois thèmes des nouveaux programmes de 6^e : Symétrie orthogonale, Géométrie dans l'espace et proportionnalité.

Voici, sur ce dernier thème, un extrait du suivi scientifique réalisé à l'irem d'Orléans (140 p. 30 F). André Viala a travaillé dans le groupe "problèmes multiplicatifs" d'Orléans avec Gérard Vernaud et André Rouchier.



Entrer dans la proportionnalité par le biais du **calcul mental** m'est apparu comme une solution satisfaisante.

J'ai donc, tout au long de l'année, utilisé une **progression** de calcul mental.

L'objectif étant, premièrement, de revenir assez souvent sur cette notion et, deuxièmement, de mieux situer individuellement chaque élève.

Dans le même ordre d'idée, j'ai utilisé le plus souvent possible des exercices de dessin permettant d'utiliser les échelles.

- Plan d'usine (irem de Nantes)
- Photo d'un élève devant un immeuble avec question sur la hauteur de l'immeuble, etc.
- Tangram à agrandir.

En utilisant un logiciel graphique sur le repérage, j'ai progressivement entraîné les élèves à visionner sur un graphique la proportionnalité (points alignés ou non alignés).

J'ai, par contre, laissé de côté volontairement les tableaux. Ce moyen me **paraissant artificiel** et surtout susceptible de masquer par son aspect mécanique la compréhension. Le travail de l'élève est alors réduit à l'application d'un mécanisme.

Calcul mental et proportionnalité

Les nombres doivent être simples et il doit y avoir une progression dans les difficultés.

1 billet aller coûte 28 F quel est le prix d'un aller retour ?

1 place de cinéma coûte 29 F quel est le prix de 2 places, 3 places, 4 places, 5 places, 10 places ?

1000 g de filet coûtent 120 F quel est le prix de 500 g, de 250 g ?

10 cartes de Loto coûtent 80 F quel est le prix d'une carte ?

1 abonnement pour 12 mois coûte 900 F quel est le prix pour 6 mois ? pour 3 mois ? pour 9 mois ?

2 baguettes coûtent 4,80 F quel est le prix d'une baguette ?

1 baguette coûte 2,40 F quel est le prix d'une demi-baguette ?

3 m de tissu coûtent 50 F - prix de 6 m ? 9 m ? 12 m ? 15 m ?

A 10 ans, Jules mesure 1,35 m. Combien mesurera-t-il à 20 ans ?

Une voiture consomme 6 l au 100 km quelle sera sa consommation pour 500 km ?

Dans une caisse de 25 kg d'oranges calibrées, il y a 110 oranges. Et dans une caisse de 50 kg ?

Pour faire des crêpes, il faut 1/2 l de lait pour 3 œufs... Et pour 1 l de lait combien d'œufs ? et pour 1 l 1/2 de lait ?

Pour faire des crêpes, il faut 0,5 l de lait pour 3 œufs... Et pour 1 l de lait combien d'œufs ? et pour 1,5 l de lait ?

Voici la recette des biscuits de Savoie : 4 œufs, 120 g de sucre, 100 g de farine, 50 g de beurre.

Pour 2 œufs ? Pour 6 œufs ? Pour 10 œufs ?

J'ai 5 ans, maman a 30 ans.

Quand j'aurai 10 ans maman aura

En 1 h le bus parcourt 32 km.

En 30 mn ? En 15 mn ? En 45 mn ?

En 2 h Jean a parcouru 50 km en vélo.

En 3 h ?

12 œufs coûtent 10 F

18 œufs ? 30 œufs ?

Pour 6 personnes il faut 1000 g de choucroute.

Pour 9 ? Pour 21 ?

Une voiture fait 120 km en 1 heure 20 minutes. Combien de temps lui a-t-il fallu pour faire 100 km ?

Un train parcourt 240 km en 3 h. Combien parcourt-il en 5 h ?

2 tablettes de chocolat coûtent 6 F.

Quel sera le prix de 3 tablettes ?

Il faut 5 œufs pour 200 g de sucre. Et pour 8 œufs combien de sucre ?

En 3 mn la voiture monte de 120 m. Et en 4 mn ?

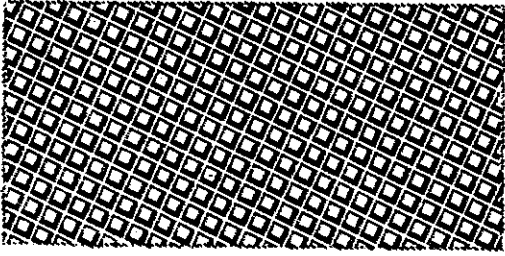
1 seau de 10 l se remplit en 50 s.

Combien de temps en secondes pour remplir un récipient de 25 l ?

Les chocolats : que choisir ?

Exploitation d'une enquête sur les prix dans une grande surface.

J'ai repris comme point de départ les résultats d'une enquête effectuée par d'anciens élèves au cours de l'année 1982-1983.



Je n'ai pas réactualisé les prix, le côté rétro n'étant pas pour déplaire aux élèves. Afin de simuler les tablettes j'ai confectionné des étiquettes.

Sur chaque étiquette figuraient le prix et la masse. Le travail a été réalisé par groupe de trois élèves. Chaque groupe avait à sa disposition un jeu complet d'étiquettes.

La consigne écrite au tableau était la suivante :

Quel est le chocolat le plus avantageux ?

(en avoir beaucoup pour pas cher a dit un élève).

Cette question a semblé avoir été assez bien comprise et les élèves ont commencé les comparaisons.

Les premières étiquettes utilisées ont été celles où figuraient des masses identiques. Ceci permettait d'éliminer assez rapidement plusieurs chocolats.

Dans certains groupes la comparaison nécessaire entre étiquettes portant des masses différentes a été une difficulté insurmontable.

Deux groupes sur cinq ont résolu le problème dont un par passage à l'unité (c'était d'ailleurs un seul élève dans ce groupe qui possédait le passage à l'unité).

Pour aller plus loin, j'ai ensuite écrit la consigne suivante :

Donner un classement du plus avantageux au moins avantageux de ces chocolats.

Cette consigne était de nature différente. En effet la comparaison des étiquettes deux à deux devient fastidieuse. Il faut trouver une méthode plus satisfaisante et aussi plus rapide.

Tous les groupes sont en difficulté sauf un. J'ai recouru au groupe ayant trouvé dans la première question pour débloquer la situation. C'est le passage aux 100 g qui est accepté à l'occasion de la mise en commun et qui est reconnu comme un moyen rapide de classement.

Remarque.

Par le calcul-mental je suis revenu sur ce genre d'exercices.

Exemples : 1 kg coûte 28 F
200 g coûteront ?

Les élèves proposent chacun leur solution que j'inscris au tableau.

L'aspect compétition intervient puisque le vainqueur est celui qui approche le plus, ou trouve la bonne réponse.

4,24 F

les 200 g

3,00 F

les 100 g

5,13 F

les 250 g

5,05 F

les 250 g

8,44 F

les 200 g

6,80 F

les 3 tablettes de 100 g

7,10 F

les 200 g

5,52 F

les 200 g

5,25 F

les 200 g

8,23 F

les 400 g

2,40 F

les 100 g

5,40 F

les 200 g

4,24 F

les 200 g

4,68 F

les 100 g

3,50 F

les 100 g

9,75 F

les 5 tablettes de 100 g

10,11 F

les 400 g



AUX FRONTIÈRES DU CHAOS

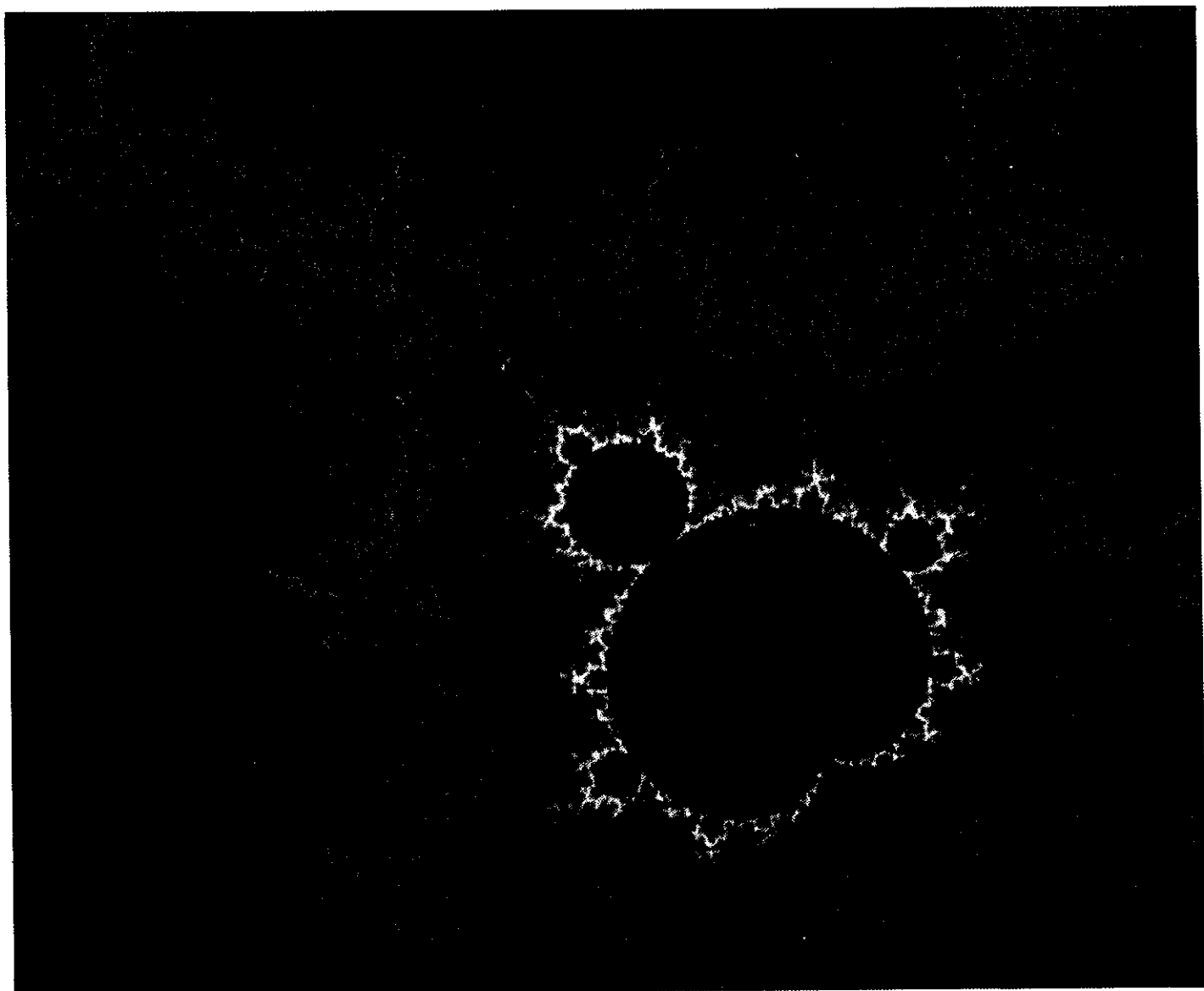
*Nous vous avons déjà parlé dans le n° 35 des ensembles
de Julia et Mandelbrot.*

*Le Goethe-Institut fait itinérer une superbe exposition
de panneaux réalisés par l'Université de Brème en RFA.*

*Elle était à Toulouse lors des journées scientifiques
présentées par le CCSTI.*

*Elle pourrait être à la Cité des Sciences de La Villette en Mai 87
lors du cycle intitulé "Mathématiques et Art".*

*Voici quelques extraits du livre superbe qui l'accompagne
"The Beauty of Fractals". Springer-Verlag 1986.*



Sommaire des actes du 5^e Congrès ICME d'Adélaïde

Plenary Sessions

Socio-Cultural Bases for Mathematical Education — <i>Ubiratan D'Ambrosio</i>	1
Reflection and Recursion — <i>Jeremy Kilpatrick</i>	7
Discrete Mathematics — <i>Renfrey Potts</i>	31

Action Groups

1. Early Childhood Years	49
2. Elementary School (Ages 7-12)	57
3. Junior Secondary School (Ages 11-16)	73
4. Senior Secondary School (Ages 15-19)	84
5. Tertiary (Post-Secondary) Institutions (18+)	95
6. Pre-Service Teacher Education	111
7. Mathematics in Adult, Technical and Vocational Education	124

Theme Groups

1. Mathematics For All	133
2. The Professional Life of Teachers	146
3. The Role of Technology	159
4. Theory, Research and Practice in Mathematical Education	177
5. Curriculum Development	187
6. Applications and Modelling	197
7. Problem Solving	212

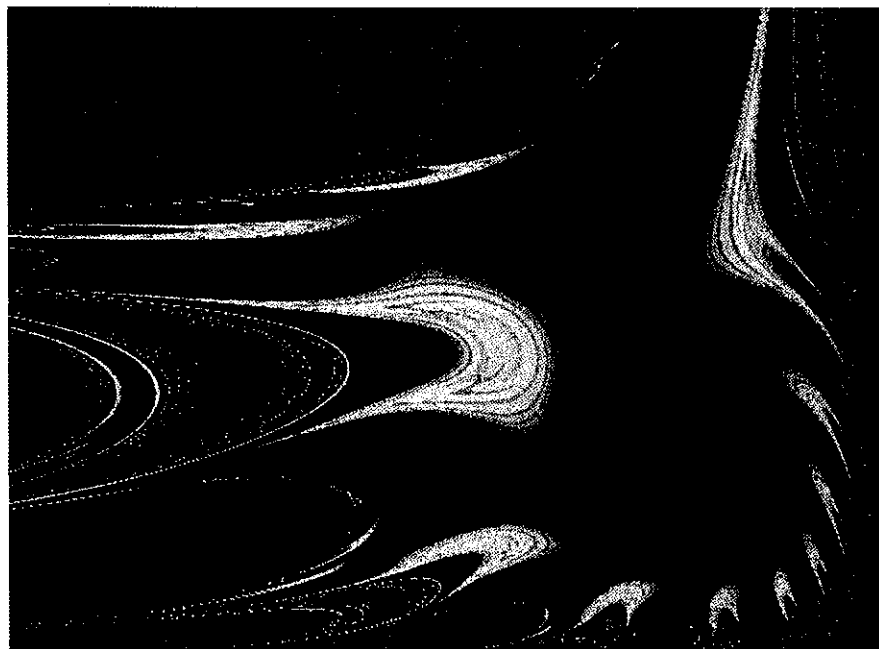
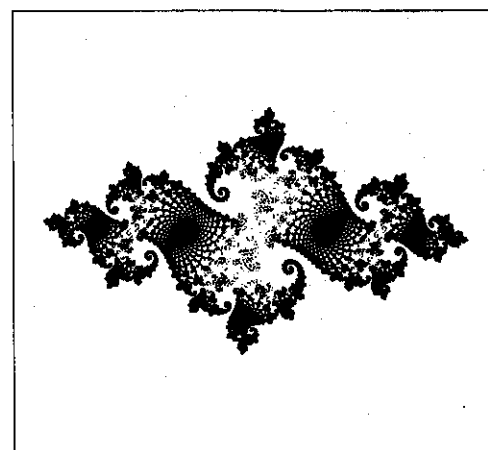
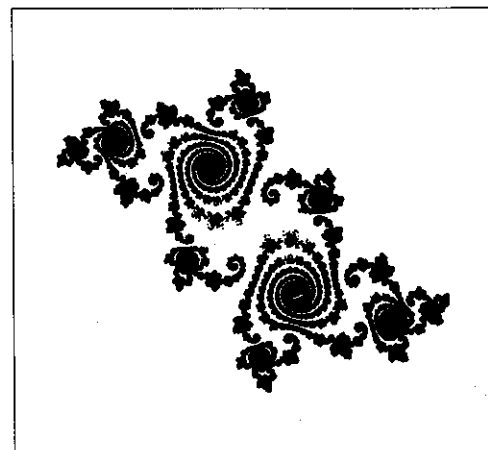
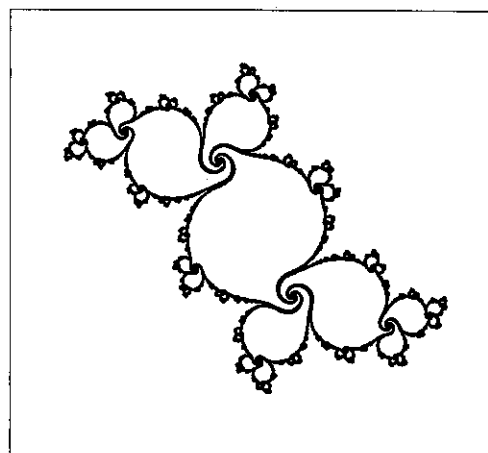
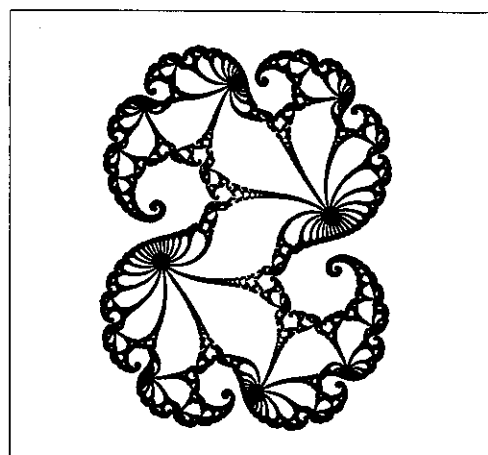
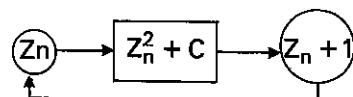
Topic Areas

1. Evaluation, Examinations and Assessment	227
2. Competitions	243
3. The Teaching of Geometry	254
4. Relationship Between the History and Pedagogy of Mathematics	256
5. Language and Mathematics	261
6. Psychology of Mathematics Education	273
7. Research and Teaching	284
8. Theory of Mathematics Education	293
9. Teaching of Statistics	300
10. Women and Mathematics	306

Invited Addresses

Presidential Address — <i>Jean-Pierre Kahane</i>	315
Public Forum	328
The Effects of Technology on Mathematics Education	346
The Nature of Proof	352
Debate: The Microcomputer: Miracle or Menace in Mathematics Education?	359
Specially Invited Presentations	373
The Work of ICMI	380

Editeur : Marjorie Carss - Birkhäuser - Boston - Bâle - Stuttgart



MESURES ET DIMENSIONS

Jean-Pierre KAHANE - Paris Sud



Depuis la rentrée, la Sous-Commission Française de l'ICME prépare le 6^e Congrès International sur l'Enseignement des Mathématiques. Il se tiendra du 27 juillet au 3 août 1988 à Budapest.

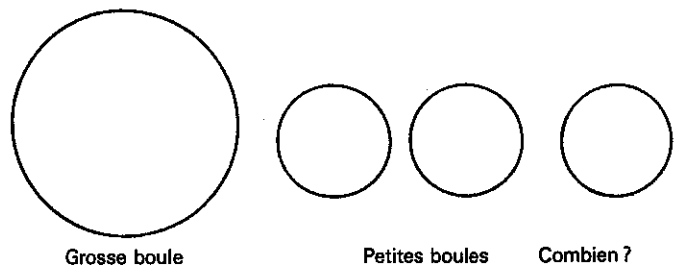
En attendant de lire les documents de synthèse nous vous proposons le texte de la conférence faite par J.P. Kahane, président de l'ICME à Adélaïde lors du précédent congrès. Les "proceeding" de ce congrès sont édités par Marjorie Carss chez Birkhäuser et se trouvent dans toutes les documentations IREM. Le thème de la conférence permettra entre autre aux abonnés bretons de mesurer leur côte !



Je commencerai par une petite histoire que je tiens de mon père et qui s'est passée, il y a plus de cinquante ans, à Paris, à la Faculté de Pharmacie. Au début de ce siècle, l'enseignement primaire en France était très ambitieux ; on y enseignait les formules donnant les surfaces et les volumes des corps usuels, et tous les enfants étaient censés connaître les formules $S = 4\pi R^2$ et $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ pour la surface et le volume d'une sphère (on ne disait pas encore "une boule"). Dire qu'ils comprenaient ces formules, c'est autre chose. Ici commence l'histoire. En travaux pratiques de pharmacie, des étudiants ont à fabriquer des boulettes d'un certain produit. Mon père, comme moniteur, s'adresse à un groupe qui a modelé une boule trop grosse. "Fabriquez donc des boules plus petites, disons, de diamètre deux fois plus petit." Puis il a l'idée d'une petite question : "combien de petites boules pourrez-vous obtenir à partir de la grosse si vous réduisez le diamètre de moitié?" (figure 1). Hésitation des étudiants, réflexion, évaluation : "Hum, peut-être quatre ou cinq !". De la formule $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ ils avaient peut-être

retenu le coefficient $\frac{4}{3}\pi$, mais pas l'essentiel, à savoir qu'on multiplie V par 8 quand on multiplie R par 2.

Figure 1



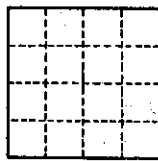
Comment varient les diverses mesures (les longueurs, les arcs, les volumes) quand on dilate un objet ? Quelle dilatation faut-il opérer, par exemple, pour doubler la surface ou doubler le volume ? Ces questions sont parmi les plus anciennes que nous rapporte la littérature. Je tenterai de montrer qu'elles ont des prolongements actuels intéressants, et qu'elles méritent de passer dans la conscience commune.

La plus ancienne leçon de mathématiques que nous connaissons est une illustration de la maïeutique, l'art de faire accoucher l'élève des connaissances qui sont en lui. Socrate s'adresse à l'esclave de Ménon, il lui pose une série de questions, et il lui fait découvrir comment doubler un carré. C'est Platon qui relate l'histoire, et voici un résumé du dialogue, sous forme de figure (figure 2). L'admirable dans Platon est qu'il n'y a pas de figure, mais qu'on peut les reconstituer sans difficulté à partir du texte. Je ne suis pas du tout convaincu que l'esclave de Ménon ait redécouvert quelque chose qui se trouvait déjà en lui, mais à coup sûr Socrate lui a enseigné une belle propriété de la diagonale du carré. Dans d'autres dialogues, il apparaît que Platon est fasciné par les propriétés arithmétiques de \sqrt{n} , dont le premier exemple est l'incommensurabilité de la diagonale et du côté, et aussi par le problème du doublement du cube. Dans sa théorie des polyèdres réguliers, les faces sont triangulées, et Platon introduit explicitement des échelles de dilatation permettant de doubler la surface du cube ou de tripler celles du tétraèdre, de l'octaèdre et de l'icosaèdre (figure 3) : ainsi, à chaque élément - feu, air, eau, terre - correspond une forme - tétraèdre, octaèdre, icosaèdre, cube - mais plusieurs tailles. L'ensemble des cubes de Platon est invariant, semble-t-il, par le groupe des dilatations de rapport $2^{n/2}$, et l'ensemble des autres polyèdres par le groupe des dilatations de rapport $3^{n/2}$. C'est ainsi que, dans la chimie platonicienne, la formule feu + eau = air s'exprime comme la recombinaison des petits triangles constituant les faces d'un tétraèdre et d'un icosaèdre sous la forme d'un octaèdre (fig. 4).

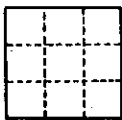
Figure 2



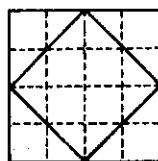
Quatre petits carrés.
Comment doubler ?



1^{re} réponse
On compte 16 petits carrés
Réponse fautive.

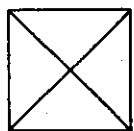


2^e réponse
On compte 9 petits carrés
Réponse fautive.

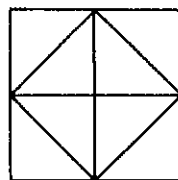


3^e réponse
La découverte !

Figure 3

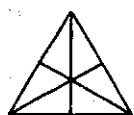


Face d'un cube
4 triangles

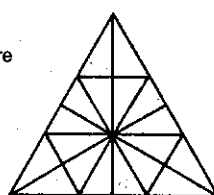


Doublement
(dilatation 2)
8 triangles

Figure 4



Face d'un tétraèdre
octaèdre
icosaèdre
6 triangles



Triplement
(dilatation 3)
18 triangles

Dans tous les cas, l'essentiel est ceci : si l'on dilate un objet dans le rapport λ , on multiplie sa mesure en

dimension d par λ^d . Nous verrons tout à l'heure comment cela permet d'élargir considérablement la notion de dimension, et de parler de dimensions non entières. Mais avant de plonger dans les mathématiques du 20^e siècle, voici une très belle application de la notion de dimension, qui remonte à Galilée et peut être considérée comme la base de la biométrie. Pourquoi un éléphant n'a-t-il pas la même forme qu'une mouche ? Tout simplement parce que si on dilatait une mouche jusqu'à la taille d'un éléphant, dans un rapport $\lambda = 10^3$, son volume, donc sa masse, serait multiplié par $\lambda = 10^9$, tandis que la surface porteuse des petites pattes serait multipliée par $\lambda^2 = 10^6$; la pression par unité de surface serait multipliée par $\lambda = 10^3$, donc la mouche agrandie à la taille d'un éléphant s'écraserait sur le sol. Dans la biométrie contemporaine, on s'intéresse depuis un siècle au volume du cerveau des mammifères en fonction de leur poids (Lapicque, etc.). La première approximation est la formule $v_c = Cp^{2/3}$ ou v_c est le volume moyen du cerveau pour une espèce, p le poids moyen de l'espèce, et C une constante indépendante de l'espèce. Cela signifie, grosso modo, que le volume du cerveau croît proportionnellement non à la taille ni au volume des animaux, mais à leur surface. En fait, les terminaisons nerveuses ne sont pas également réparties à la surface, la puissance $2/3$ n'est pas tout à fait correcte, et C définit des classes d'espèces de mammifères, avec une place un peu privilégiée pour l'homme. Cela suggère déjà que les dimensions entières ne sont pas les seules à intervenir dans la nature. Nous y reviendrons.

Dans le développement des mathématiques du 20^e siècle, les notions de dimension et de mesure ont été élaborées avec des motivations et des applications bien différentes. Elles ne se sont rejointes qu'en 1919, avec la théorie de la mesure et de la dimension de Hausdorff, et elles prennent actuellement des aspects nouveaux. C'est cette histoire que je voudrais maintenant retracer.

La notion de dimension est à la source des travaux de Cantor sur la cardinalité. Tout au cours du 19^e siècle, les mathématiciens avaient manipulé des variétés d -dimensionnelles, et non seulement des courbes ($d = 1$), des surfaces ($d = 2$) ou des volumes ($d = 3$). Localement, une variété d -dimensionnelle est l'image d'un cube I^d de dimension d ($d = 1, 2, 3, 4, \dots$). Cantor tente d'élaborer l'idée intuitive qu'une variété de dimension d contient plus de points qu'une variété de dimension d' si $d > d'$. A sa grande surprise ("je le vois, mais je ne le crois pas" écrivait-il à Dedekind), il démontre le contraire : il existe une correspondance bijective entre I^d et $I^{d'}$ quels que soient d et d' . On dit maintenant que toutes les variétés ont la même puissance, ou le même cardinalité : celle du continu. Dedekind, consulté par Cantor, confirme que la démonstration est correcte, mais il considère que le problème doit être posé d'une autre façon : si $d \neq d'$, il n'existe pas, pense-t-il, de correspondance bijective et bicontinue entre I^d et $I^{d'}$. Cela devient, pour plusieurs décades, le problème de la dimension, finalement résolu par Brouwer. En effet, il n'existe pas de correspondance bijective et bicontinue entre I^d et $I^{d'}$, c'est-à-dire que I^d et $I^{d'}$ ne sont pas topologiquement équivalents. La dimension peut être définie comme un invariant topologique : toutes les variétés topologiquement équivalentes à I^d ont pour dimension d . Il existe ainsi

une échelle de dimensions entières, telle que toutes les courbes sans points doubles aient pour dimension 1, toutes les surfaces aient pour dimension 2, etc. C'est la dimension topologique. Les articles et traités sur la dimension, jusque vers 1950, concernent principalement la dimension topologique.

Quant à la mesure, sa théorie moderne dérive de la thèse de Lebesgue. En trente ans (1903-1933) la théorie de la mesure renouvelle complètement l'analyse et les probabilités. L'outil essentiel est la nouvelle intégrale, l'intégrale de Lebesgue, et ses généralisations. En identifiant probabilité et mesure, l'axiomatique de Kolmogorov donne à la fois un cadre abstrait très général, et le domaine des applications les plus importantes dans la pratique. Ainsi, à première vue, et dans beaucoup de traités, la théorie moderne de la mesure apparaît comme une théorie abstraite, très puissante, fondement commun des théories de l'intégration, de l'analyse fonctionnelle, des probabilités.

Or, pour Lebesgue, l'aspect géométrique est également important. Lebesgue avait développé la théorie de la mesure sur la droite. Carathéodory l'avait étendue à d'autres variétés. Hausdorff en 1919 en donne une version géométrique très générale, qu'on peut résumer ainsi. Pour mesurer les parties d'un ensemble E , on dispose d'une infinité dénombrable de petites pièces e_k , de poids p_k . On suppose que chaque partie de E , soit A , peut être recouverte par une collection de pièces e_k de diamètres inférieurs à un $\epsilon > 0$ donné, et cela quel que soit ϵ . A chaque recouvrement (e_k) on associe la somme des poids p_k correspondants. Quand A et ϵ sont donnés, on prend la borne inférieure de ces sommes $\sum p_k$ correspondant aux recouvrements de A par des e_k de diamètres inférieurs à ϵ . Cette borne inférieure (qui peut être nulle, ou infinie) ne peut que croître quand ϵ décroît. Sa limite quand ϵ tend vers zéro est la mesure de Hausdorff de A , $H(A)$. Ainsi toute partie A de E a une mesure $H(A)$, qui peut être nulle, finie non nulle, ou infinie. Au sens de Lebesgue ou de Carathéodory, c'est ce qu'on appelle une mesure extérieure.

Pratiquement, on prend souvent pour e_k des intervalles, ou des disques, ou des boules, on choisit pour p_k une certaine fonction du diamètre des e_k

$$p_k = h(\text{diam } e_k),$$

et on choisit la collection des e_k assez riche (par exemple, la collection des boules à centres et à rayons rationnels). En particulier, si $h(t) = t^d$, $H(A)$ est, à une constante multiplicative près, la mesure d -dimensionnelle de A . On le vérifie dans les cas usuels, et on le prend pour définition lorsque, par exemple, d n'est pas entier. Ayant ainsi défini la mesure d -dimensionnelle, que je note maintenant $m_d(A)$, il est facile de vérifier que :

1) $m_d(A \cup B) = m_d(A) + m_d(B)$ si A et B sont à une distance positive (ou plus généralement si $m_d(A \cap B) = 0$ moyennant que A et B soient "mesurables")

2) $m_d(A) = m_d(TA)$ quel que soit le déplacement T (on désigne par TA l'image de A par le déplacement T) ;

3) $m_d(\lambda A) = \lambda^d m_d(A)$ quel que soit $\lambda > 0$.

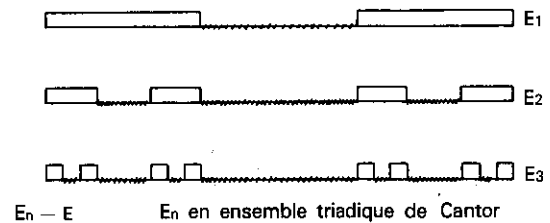
En conséquence, l'effet d'une dilatation de rapport λ est de multiplier la mesure d -dimensionnelle par λ^d , ce que nous avons reconnu comme une relation essentielle entre mesure et dimension.

On voit que, dans la théorie de Hausdorff, d n'est pas nécessairement un entier. On voit aussi que, si $m_d(A)$ est fini et non nul, la mesure δ -dimensionnelle de A est nulle si $\delta > d$ et infinie si $\delta < d$. Généralement, la borne inférieure des δ tels que $m_\delta(A) = 0$ est égale à la borne supérieure des δ tels que $m_\delta(A) = \infty$. Cette borne commune est, par définition la dimension de Hausdorff de A . Il est facile de voir que cette dimension est toujours supérieure ou égale à la dimension topologique.

Voici tout de suite quelques illustrations de ces notions.

1. L'ensemble triadique de Cantor. C'est l'ensemble des points du segment $[0, 1]$ dont l'écriture, dans le système de numération à base 3, peut se faire uniquement avec des 0 et des 2. On l'obtient par une construction détaillée sur la figure 5.

Figure 5



Admettons que l'ensemble triadique de Cantor, E , porte une mesure qui donne la même masse à deux portions égales, et soit m cette mesure. Comme E est la réunion disjointe de $1/3E$ et de $1/3E + 2/3E$, c'est-à-dire de la portion portée par $[0, 1/3]$ et de la portion portée par $[2/3, 1]$ on a :

$$m(E) = m(1/3E) + m(1/3E + 2/3E) = 2m(1/3E).$$

Si c'est une mesure de Hausdorff finie et non nulle en dimension d , on a donc :

$$1 = 2 \times (1/3)^d$$

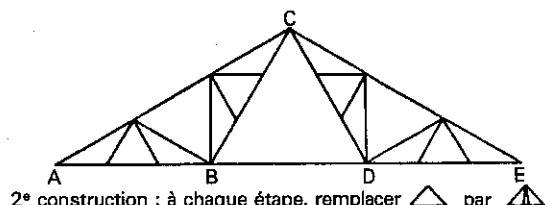
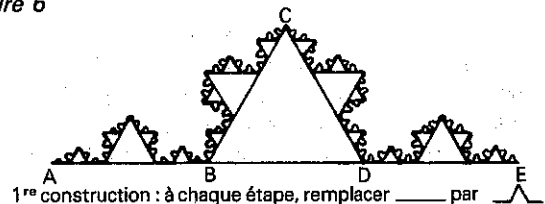
$$d = (\log 2) / (\log 3) = 0.631$$

c'est en effet la dimension de Hausdorff de l'ensemble E .

2. La courbe de Von Koch. Weierstrass avait donné en 1872 le premier exemple d'une fonction continue sans dérivée. Von Koch, en 1904, a voulu montrer qu'une construction géométrique simple conduit à une courbe qui n'admet de tangente en aucun point (figure 6). Nous indiquons deux manières de construire la courbe :

- a) comme limite de lignes polygonales
- b) comme intersection d'une suite décroissante d'ensembles plans.

Figure 6



Cette courbe admet un paramètre naturel, donc chaque arc a une mesure qui est la différence des valeurs du paramètre aux deux extrémités. Or, visiblement, les autres arcs AB, BC, CD, DA sont égaux. Et l'arc AB est obtenu à partir de l'arc AE (la courbe entière) par dilatation de rapport $1/3$. Donc :

$$m(\text{arc AE}) = 4m(1/3 \text{ arc AE}).$$

Si c'est une mesure de Hausdorff finie et non nulle en dimension d , on a donc :

$$1 = 4 \times (1/3)^d$$

$$d = (\log 4)/(\log 3) = 1.262$$

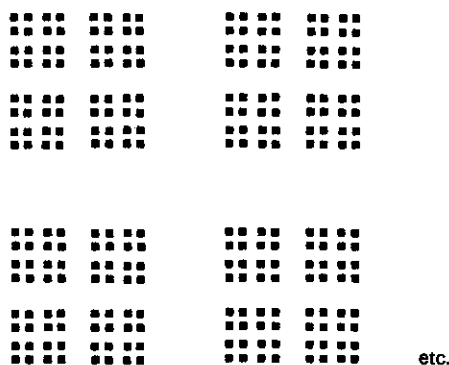
et on vérifie qu'il en est bien ainsi.

3. Le carré de l'ensemble triadique de Cantor (figure 7). Là encore, l'ensemble E est la réunion disjointe de quatre portions égales, obtenues à partir de E par dilatation de rapport $1/3$. La dimension de Hausdorff est encore :

$$d = (\log 4)/(\log 3)$$

la même que pour la courbe de Von Koch.

Figure 7



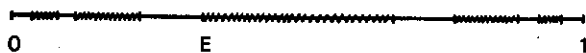
4. Les ensembles du type de Cantor à rapport de dissection ξ ($0 < \xi < 1/2$), et les courbes du type de Von Koch à rapport ξ . La construction est indiquée sur les figures 8 et 9. Les dimensions sont respectivement :

$$d = (\log 2)/(\log 1/\xi)$$

$$d = (\log 4)/(\log 1/\xi)$$

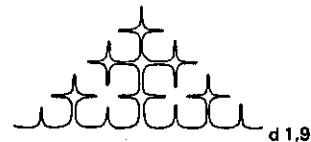
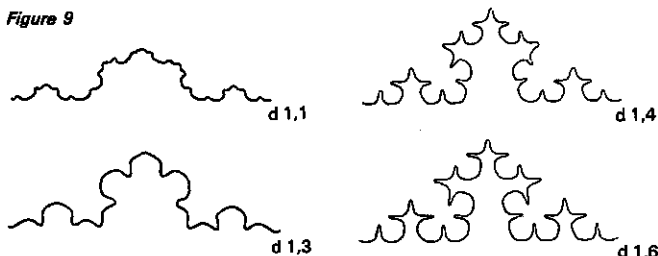
Si ξ tend vers $1/2$, la première tend vers 1, et la seconde tend vers 2. Pour $\xi = 1/2$, la première construction donne simplement la paramétrisation ordinaire du segment $[0,1]$. La seconde donne une paramétrisation intéressante d'un triangle isocèle, autrement dit, une courbe qui recouvre toute une surface : c'est une version, due à Cesaro et retrouvée indépendamment par Paul Lévy, de la fameuse courbe de Peano (qui recouvre tout un carré).

Figure 8



Il existe bien d'autres exemples d'ensembles dont on peut calculer la dimension de Hausdorff. A la suite de Hausdorff, c'est surtout Besicovitch et ses élèves qui ont développé les aspects géométriques de la théorie de la mesure et de la dimension de Hausdorff.

Figure 9



Avant de revenir aux mathématiques, il est temps d'indiquer que ces notions sont bien adaptées à l'étude du monde naturel. A propos du mouvement brownien, Jean Perrin écrivait déjà au début du siècle que "c'est un cas où il est vraiment naturel de penser à ces fonctions continues sans dérivées que les mathématiciens ont imaginées, et que l'on regardait à tort comme de simples curiosités mathématiques, puisque l'expérience peut les suggérer" (voir fig. 10 le tracé donné par Jean Perrin d'une trajectoire brownienne, approchée par une ligne polygonale joignant les points images d'une progression arithmétique). Et Jean Perrin ajoutait :

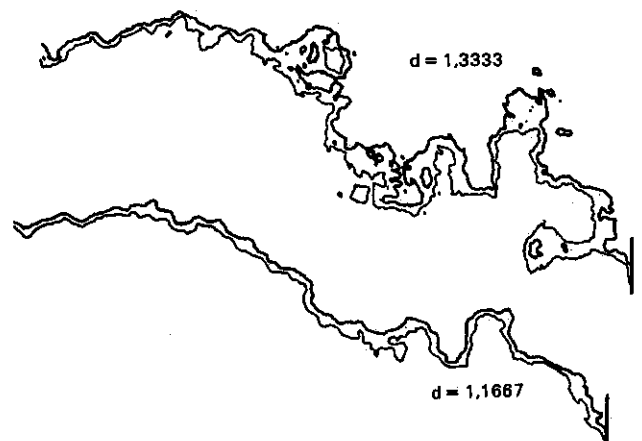
"On fera des réflexions analogues pour toutes les propriétés qui, à notre échelle, semblent régulièrement continues, telles que la vitesse, la pression, la température. Et nous les verrons devenir de plus en plus irrégulières, à mesure que nous augmenterons le grossissement de l'image toujours imparfaite que nous nous faisons de l'Univers. La densité était nulle en tout point, sauf exceptions : plus généralement, la fonction qui représente la propriété physique étudiée (mettons que ce soit le potentiel électrique) formera dans toute matière un continuum présentant une infinité de points singuliers, et dont les mathématiciens nous permettront de poursuivre l'étude."

Une bonne partie des travaux de Wiener sur le mouvement brownien allait sortir de cette intuition de Jean Perrin. Le mouvement brownien et les processus qui en sont dérivés constituent d'ailleurs un outil précieux pour obtenir des ensembles aléatoires de dimension arbitraire. On a bien étudié les propriétés des images d'ensembles donnés par de tels processus aléatoires, des graphes, des lignes de niveau. On dispose maintenant de véritables catalogues d'ensembles obtenus par des procédés aléatoires et dont on connaît la dimension.

Figure 10 La trajectoire du mouvement brownien selon Jean Perrin



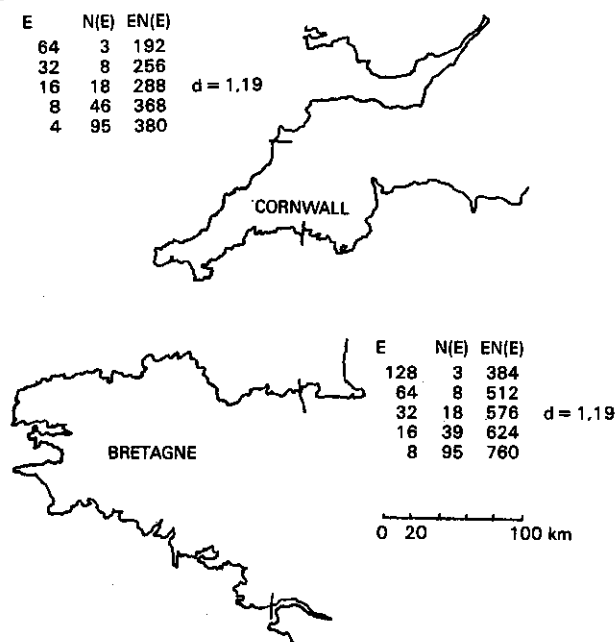
Figure 11



D'autre part, il apparaît que beaucoup d'objets naturels ont une forme ou une découpe qui rappelle les ensembles de Cantor ou les courbes de Von Koch, mais plus encore les objets aléatoires dont nous venons de parler. La forme d'une côte découpée telle que celle de la Bretagne en France, ou celle de l'archipel des Philippines, rappellent les ensembles de niveau de certaines fonctions aléatoires de deux variables réelles. Une foule d'exemples et de données se trouvent dans le livre de B. Mandelbrot sur les fractals, avec des illustrations de plus en plus belles au fur et à mesure des éditions (figure 11).

Ainsi, lorsqu'il s'agit d'une côte découpée, la notion de longueur n'a pas de signification. Suivant l'échelle, on obtient des longueurs différentes, et le modèle mathématique qui s'impose est celui d'une courbe non rectifiable. Pratiquement, si l'on désigne par $N(\epsilon)$ le nombre minimum de disques de diamètre ϵ permettant de recouvrir l'ensemble, on voit que $N(\epsilon)$ se comporte comme une puissance de $1/\epsilon$ quand ϵ tend vers 0, c'est-à-dire que le graphe de $\log N(\epsilon)$ en fonction de $\log(1/\epsilon)$ est à peu près linéaire. Si l'on désigne sa pente par d , c'est une bonne approximation de la dimension de Hausdorff du modèle. Il est donc raisonnable de parler de la dimension de la côte de Bretagne, ou de la dimension de la côte de Cornouailles et le fait que ses deux côtes sont découpées de manière analogue s'exprime par l'égalité approximative de leurs dimensions (figures 12, 13, 14).

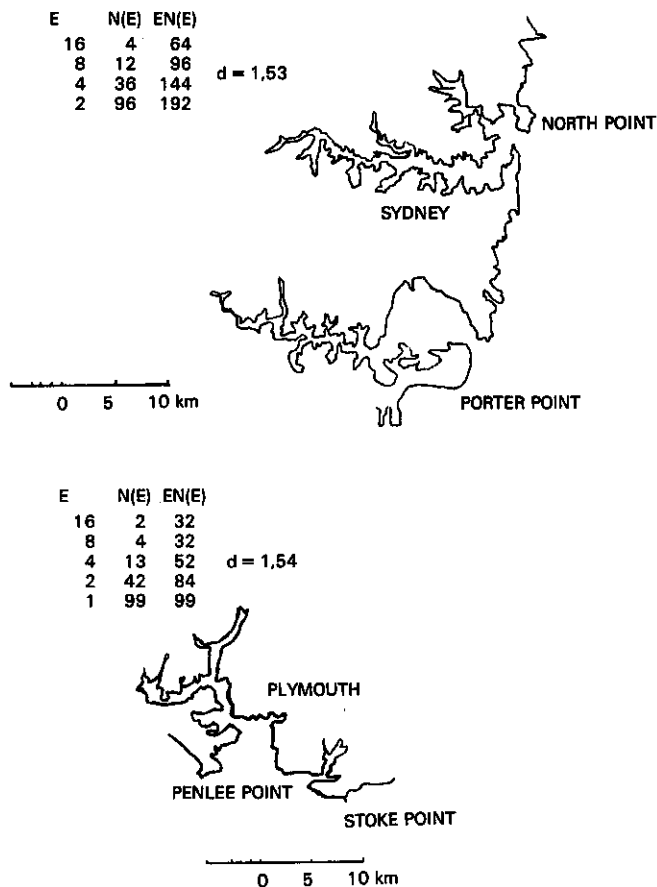
Figure 12



Actuellement, des calculs de dimensions apparaissent dans beaucoup de disciplines expérimentales ou d'observation : le relief de la glace de la face immergée des icebergs, la répartition des nuages, la surface des substances favorisant la catalyse, les phénomènes de percolation sont des exemples où des dimensions sont effectivement considérées et calculées. Benoît Mandelbrot a attiré l'attention d'un large public scientifique sur le fait que la géométrie naturelle est bien souvent la géométrie des formes irrégulières, qu'il appelle géométrie fractale, tandis que la géométrie de la droite, du cercle, des variétés régulières est le plus souvent celle des créations humaines.

En même temps que la dimension de Hausdorff commence à devenir familière aux scientifiques non-mathématiciens, les mathématiciens se préoccupent de plus en plus des aspects géométriques de la théorie de la mesure, des aspects métriques de la notion de la dimension.

Figure 13



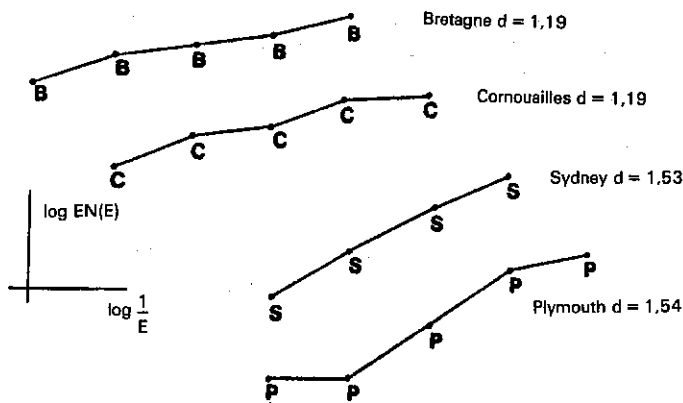
Au cours des années 1920-1950, c'est surtout la théorie du potentiel et l'analyse harmonique qui avaient provoqué des études de dimensions. En particulier, Bouligand avait considéré l'indice : $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \log N(\epsilon) / \log(1/\epsilon)$

et aussi sa version homogénéisée, dans laquelle $N(\epsilon)$ désigne le nombre minimum de boules de diamètre ϵ permettant de recouvrir l'intersection d'un cube fixe et d'un dilaté quelconque de l'ensemble. Ce second indice de Bouligand coïncide avec la "dimension métrique" introduite par P. Assouad en 1977. Le premier souci d'Assouad est de définir un invariant pour les transformations lipschitziennes, c'est-à-dire celles qui ne modifient la distance que dans un rapport borné. La dimension métrique est un tel invariant, et de plus elle détermine (sauf quand elle est entière) s'il est possible ou non de plonger un espace métrique dans un espace euclidien \mathbb{R}^n par une transformation lipschitzienne : c'est possible si la dimension métrique est inférieure à n , impossible si elle est supérieure à n . A titre d'exemple, la droite réelle sur laquelle la distance est définie par :

$$d(x,y) = |x - y|^\alpha \quad (0 < \alpha < 1)$$

a pour dimension métrique $d = 1/\alpha$. Le théorème de plongement dit donc que, pour $n > 1/\alpha$, il existe une courbe $M(t)$ dans \mathbb{R}^n telle que le rapport $(\|M(t) - M(t')\|) / (|t - t'|^\alpha)$ soit compris entre deux nombres positifs indépendants de t et de t' . Quand $\alpha = (\log 3) / (\log 4)$, la courbe de Von Koch fait l'affaire.

Figure 14



Quand $1/2 < \alpha < 1$, une variante de la courbe de Von Koch répond à la question. Mais pour $\alpha < 1/2$, la construction est moins facile.

Ces courbes d'Assouad Γ ont une belle application, fondée sur le théorème de prolongement de H. Whitney. En effet, si l'on considère le paramètre t comme fonction du point M , on a sur la courbe Γ

$$t(M) - t(M') \approx \|M(t) - M(t')\|^{\alpha}$$

le signe \approx signifie que le rapport des deux membres est compris entre deux nombres positifs fixes. Le théorème de prolongement de Whitney nous dit alors - au moins dans les cas où d n'est pas entier - qu'il existe un prolongement de la fonction $t(M)$ à tout \mathbb{R}^n , soit $\theta(M)$, tel que la fonction $\theta(\cdot)$ prenne ses valeurs dans $[0, 1]$ et soit de classe C^d (c'est-à-dire différentiable jusqu'à l'ordre $[d]$, et telle que les dérivées d'ordre $[d]$ satisfont une condition de régularité de Hölder d'ordre $d - [d]$). Ainsi il existe une fonction de classe C^d appliquant \mathbb{R}^n sur $[0, 1]$ et dont toutes les valeurs sont critiques (c'est-à-dire que leur pré-image contient un point où le gradient est nul). C'est la réciproque d'un théorème de Sard (1942) disant que, pour une fonction de classe C^n définie sur \mathbb{R}^n , l'ensemble des valeurs critiques est de mesure nulle.

En fait, pour $d < 2$, l'exemple est dû à H. Whitney, et c'est même l'origine du théorème de prolongement. Curieusement, l'exemple de Whitney a précédé le théorème de Sard. C'est un travail qui se trouve au carrefour de la théorie métrique et de la topologie (1935).

La théorie du potentiel avait suggéré d'autres définitions de la dimension. Ainsi, plusieurs notions de dimensions capacitaires ont été proposées par Polya et Szegö, et d'autres sont possibles. Toutes ces définitions équivalent, en fait, à celle de Hausdorff. C'est, essentiellement, l'un des résultats majeurs de la thèse de Frostman (1935), à compléter par des travaux suédois récents.

En théorie des nombres et en analyse harmonique, des ensembles ayant même dimension de Hausdorff peuvent avoir des comportements très différents, de sorte que d'autres indices ont été proposés. Dans le cas des ensembles aléatoires, ces indices sont souvent égaux à la dimension de Hausdorff - c'est un champ de recherches introduit par R. Salem -.

Dans la théorie géométrique de la mesure et de la dimension, une notion nouvelle a été introduite récemment par C. Tricot. Au lieu de recouvrir un ensemble A par des petites pièces e_k (disons, des

boules), on dispose des boules disjointes b_k centrées sur A , de diamètre inférieur à ϵ , et on considère la borne supérieure de $\sum h$ (diam b_k). Cette borne supérieure ne peut que décroître quand ϵ décroît. Elle a donc une limite quand $\epsilon \rightarrow 0$, qu'on désigne par $P(A)$. La mesure de Tricot (sous la forme élaborée par J. Taylor et C. Tricot) est la borne inférieure des sommes $\sum P(A_n)$ pour toutes les décompositions de A en sous-ensembles A_n . On l'appelle mesure de packing et on la note $p(A)$.

En choisissant $h(t) = t^d$, on a la mesure du packing d -dimensionnelle. Au lieu de la dimension de Hausdorff, on peut définir la dimension de packing, $\text{Dim } A$, comme la borne inférieure des d telles que la mesure de packing d -dimensionnelle soit nulle. On a toujours :

$$\dim A \leq \text{Dim } A.$$

Pour les produits cartésiens d'ensembles, on a les inégalités remarquables :

$$\dim A + \dim B \leq \dim(A \times B) \leq \dim A + \dim B$$

$$\dim(A \times B) \leq \dim A + \dim B$$

Un sujet de recherches tout à fait actuel est l'étude des ensembles A pour lesquels $0 < m(A) = p(A) < \infty$, et de ceux pour lesquels $0 < m(A) = p(A) < \infty$. Les premiers, dans un certain sens, sont lisses, tandis que les seconds sont rugueux ou éclatés. Il se peut que la comparaison des mesures de Hausdorff et de Tricot donne une définition mathématique de la fractalité. Il se peut aussi que la fractalité reste une notion méta-mathématique, exprimant une attitude de l'esprit autant qu'une réalité objective. Actuellement, la meilleure et la seule définition d'un objet fractal, ou d'une fractale, est ce que Benoît Mandelbrot, l'inventeur du terme, reconnaît comme tel.

Si j'ai choisi de parler de ce sujet à Adélaïde, c'est pour une série de raisons que je veux énumérer en conclusion.

1. Mesures et dimensions traversent toute l'histoire des mathématiques, et c'est un sujet particulièrement vivant depuis quelques années.
2. L'aspect géométrique, secondaire pendant un demi-siècle, revient au premier plan. A la suite de Benoît Mandelbrot, de nombreux mathématiciens utilisent les ordinateurs pour visualiser des ensembles fractals (courbes ou arbres étranges, ensembles du type de Cantor, etc.). Des articles et des ouvrages sont en cours de parution sur la géométrie des fractals.
3. Cette géométrie exprime des phénomènes naturels importants, et qui s'imposent à l'attention, dans le monde physique comme dans le monde vivant.
4. Quoique très différente de la géométrie euclidienne, cette géométrie est également élémentaire, dans le sens que beaucoup de gens peuvent comprendre les résultats et s'attaquer aux problèmes. En particulier, c'est un champ de recherches possibles pour des enseignants qui n'ont pas la possibilité de s'attaquer à des sujets nécessitant beaucoup de connaissances ou de techniques mathématiques.

Au niveau même des enfants, la facilité que nous avons maintenant à tracer des figures et à manipuler de grands nombres me semble rendre les notions de mesures et dimensions plus faciles à assimiler qu'autrefois. ■

DROIT DE REPONSE... SANS LIMITE

Raymond BARRA - Poitiers

*Limite or not limite, le débat reste ouvert
dans la rubrique "le courrier des lecteurs"*

L'article "*Plus de limites pour dériver*" dans le numéro 35 de PLOT m'a fait sourire. Car voilà deux enseignants éminemment respectables, l'auteur et moi, qui veulent bien faire, qui croient bien faire (et peut-être même croient faire mieux que les autres), et qui sur un sujet des plus classiques ont des conceptions fort différentes.

Amusant.

"C'est au troisième trimestre" dit l'auteur "que l'on retrouvera la dérivée, comme limite d'un taux de variation". Mais il prend bien soin de nous rassurer, il n'est pas "anti-limite" : la convergence des suites est, elle, abordée assez tôt.

Puis-je dire que je pense tout différemment ?

Le "gros morceau" de la classe de première, c'est la dérivation ; aussi je crois nécessaire d'aborder au plus tôt la découverte et l'utilisation de ce merveilleux outil. Quant aux limites de suites..., j'y reviendrai.

Je cite un passage de M. Glaeser, extrait de son livre "*Mathématiques pour l'élève-professeur*" ; je cite de mémoire car ce livre a disparu de ma bibliothèque (à la place, un Maigret : la retraite, "ça se prépare"). Donc en substance, Glaeser dit : "*dans la dérivation l'essentiel est de voir pourquoi on s'intéresse à des taux de variation et pourquoi il est nécessaire de passer à la limite*". Je pense comme lui. Le problème pour moi n'est donc pas de trouver des stratagèmes pour retarder l'arrivée du mot limite, mais il est d'expliquer ces "Pourquoi", et à l'occasion, de donner au mot limite un sens suffisant pour la compréhension de la solution des problèmes posés.

L'auteur de l'article ne se tromperait-il pas de problèmes ? Le problème n'est pas de savoir "*comment dériver sans limite*"; en l'état actuel, chercher une dérivée, qu'on le veuille ou non, c'est chercher une limite, seuls les polynômes pourraient faire exception. Le problème est plutôt de savoir jusqu'à quelle profondeur il faut descendre dans l'entendement du

mot limite pour avoir d'assez bonnes idées sur la dérivation, sachant que les règles de calcul permettront dans les cas usuels de trouver les dérivées sans utilisation explicite de la limite. En corollaire, la question est de savoir si les programmes actuels n'accordent pas encore trop de place à la notion de limite.

Quant à la convergence des suites, notion difficile aussi, je n'en vois pas l'urgence en classe de première. Certes les suites interviennent dans bien des calculs d'approximation, mais dans tous les cas usuels la question de la convergence ne se pose pas, nul ne doute que l'approximation à la $n^{\text{ième}}$ étape sera d'autant meilleure que n est grand.

Voilà pour les remarques de fond

Pour les détails, tout en sachant que la donnée d'une définition la plus élaborée n'est pas toujours le meilleur moyen pour donner de bonnes idées sur l'objet défini, je reste sceptique sur l'efficacité de la définition choisie pour la tangente "droite qui coupe la courbe en un seul point". On est bien loin de la dérivée ! Alors toute horizontale est tangente à la courbe de $y = x^3$; et pas seulement les horizontales d'ailleurs.

Par ailleurs, dans les problèmes d'approximation affine, je ne crois pas que l'on néglige h^2 parce que h^2 est très petit ; h aussi peut être très petit et pourtant on le garde ; je crois qu'on rendrait les choses plus compréhensibles en disant que l'on néglige h^2 parce que h^2 est d'ordre 2, c'est-à-dire qu'il est très petit *par rapport à h* ; c'est sur cette comparaison qu'il faut insister me semble-t-il. D'ailleurs, dans ces problèmes, la vraie question est celle-ci : pourquoi au moment de généraliser écrit-on $h^2 = h \epsilon(h)$, au lieu de $h^2 = \varphi(h)$, ce qui serait le plus naturel ? Cette question n'est jamais soulevée dans les manuels, peut-être parce qu'elle est trop difficile ; mais alors pourquoi ne pas commencer par l'étude de la limite des taux de variations qui a au moins l'avantage de poser vraiment le problème ?

Cette petite note a été traduite et adaptée d'après un livre tchèque destiné à la préparation aux olympiades mathématiques intitulé "Exercices au sujet de maximum et minimum de fonctions".

Énoncé de la propriété :

Le produit de deux nombres dont la somme est donnée est maximum quand ils sont égaux.

Démonstration :

Prenons deux réels x et y et posons :

$$S = x + y; P = xy \text{ et } d = \frac{1}{2}(x - y)$$

$$\text{On a donc : } x = \frac{1}{2}S + d \text{ et } y = \frac{1}{2}S - d$$

$$\text{Ce qui donne : } P = \frac{1}{4}S^2 - d^2$$

On constate que P est au maximum quand $d = 0$, c'est à dire quand $x = y = \frac{S}{2}$.

$$\text{On a alors : } P = \frac{1}{4}S^2.$$

Quelques exercices d'application :

1. On considère un secteur circulaire x de rayon r et de périmètre donné p . Trouver r et x pour que l'aire A du secteur soit maximale.

$$\text{Il vient : } p = 2r + rx \text{ D'où : } x = \frac{p-2r}{r} \text{ avec } r < \frac{p}{2}$$

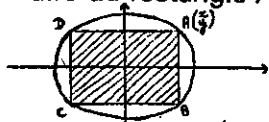
$$\text{Par conséquent : } A = \frac{1}{2}r^2x = \frac{1}{2}r(p-2r) = r\left(\frac{p}{2} - r\right).$$

On constate que $r + \frac{p}{2} - r$ est constante, d'où A est maximale lorsque $r = \frac{p}{2} - r$ (d'après la propriété) c'est à dire lorsque : $r = \frac{p}{4}$. Donc : $x = 2$ et $A_{\max} = \frac{p^2}{16}$.

2. Trouver le rectangle d'aire maximale contenu dans l'ellipse (E) d'équation : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Soit $A(x; y) \in (E)$

L'aire du rectangle ABCD est : $A = 4xy$



$$(x < a \text{ et } y < b)$$

$$\text{Il vient : } A = 4x \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} = 4 \frac{b}{a} \sqrt{x^2(a^2 - x^2)}$$

On constate que A est maximale lorsque $x^2(a^2 - x^2)$ l'est aussi.

Or $x^2 + (a^2 - x^2)$ est constante ; donc A est maximale lorsque $x^2 = a^2 - x^2$ (propriété) c'est à dire : $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$$\text{Alors : } A_{\max} = 2ab$$

3. Soit un losange dont les diagonales ont pour longueur $2p$ et $2q$ ($p > q$). Trouver l'ellipse d'aire maximale inscrite dans ce losange.

$$\text{(Réponse : } A_{\max} = \frac{1}{2} \pi pq)$$

4. Soit un cercle de centre O et de rayon $r > 0$. Soit un point M tel que $OM = a$ ($a < r$). Trouver le quadrilatère d'aire maximale inscrit dans dont les diagonales sont perpendiculaires en M .

$$\text{(Réponse : } A_{\max} = 2r^2 - a^2)$$

5. Trouver le pentagone ABCDE (de périmètre donné p) d'aire maximale tel que ABE soit un triangle équilatéral et BCDE un rectangle.

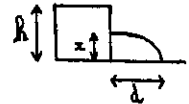
$$\text{(Réponse : } A_{\max} = \frac{p^2}{4(6 - \sqrt{3})})$$

6. Déterminer les dimensions d'un cône de surface donnée S pour que son volume soit maximal.

$$\text{(Réponse : } V_{\max} = \frac{\sqrt{2}\pi}{2\pi} S \sqrt{S})$$

7. A quelle hauteur doit-on percer un cylindre de hauteur h rempli de liquide pour que le jet ait une longueur maximale ?

$$\text{(Réponse : } x = \frac{h}{2} \text{ et } d_{\max} = h).$$



Autres applications :

Grâce à la propriété énoncée, on peut démontrer d'autres propriétés :

la fonction f
 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ atteint son maximum pour $x = \frac{1}{2}$
 $x \mapsto x(s-x)$

Ceci nous permet de trouver les extrema de la fonction.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto ax^2 + bx + c.$$

Si $a > 0$, f n'admet pas de maximum mais un minimum pour $x = -\frac{b}{2a}$

Si $a < 0$, f n'admet pas de minimum mais un maximum pour $x = -\frac{b}{2a}$

8. Deux automobilistes roulent sur deux routes perpendiculaires en direction de leur croisement O à des vitesses respectives V_1 et V_2 .

A l'instant $t = 0$, on a : $OA = k$ et $OB = \ell$.

A quel instant la distance AB est-elle minimale ?

Conclusion :

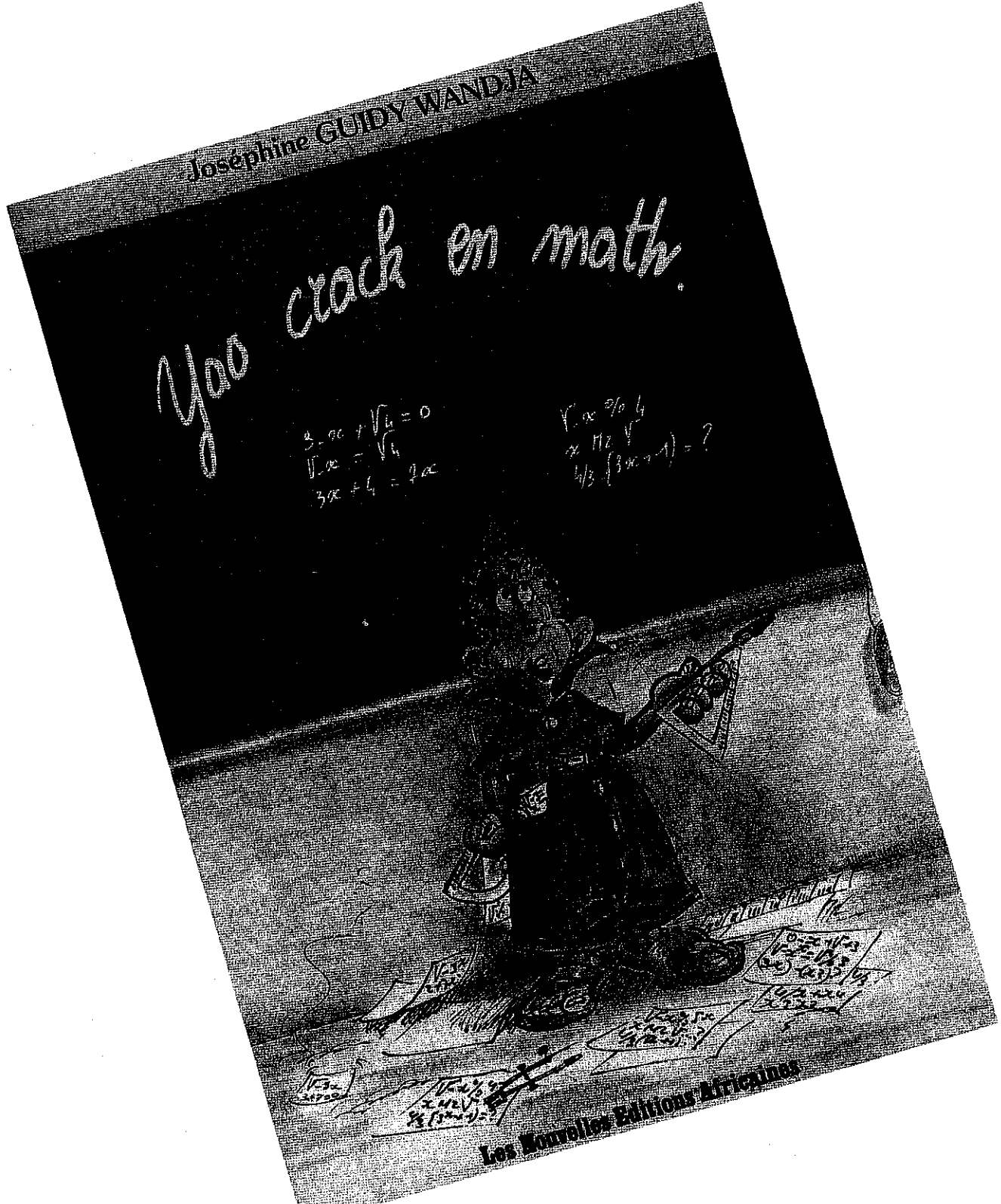
Ainsi la propriété utilisée permet d'étudier les maxima et minima des fonctions où intervient la fonction quadratique.

YAO! LES MATHS!! JE CRAQUE!!!

SOUVENIRS DE VACANCES

Michel CLINARD

*Léger pour la valise, légal pour la douane, il s'agit d'un petit livre que l'on trouve dans toutes les librairies de "Codivoire":
YAO, CRACK EN MATHS - (Nouvelles éditions africaines)*



JESS SAH BI, collaborateur du quotidien national Fraternité-Matin a réalisé la bande dessinée ; Joséphine GUIDY WANDJA, professeur de mathématiques à l'université d'Abidjan a conçu les scénarios et les textes.

Yao, qui pourrait être un élève de troisième ne manque pas de bon sens, de "jugeotte" et d'esprit de répartie, pourtant il concentre toutes les erreurs et mauvais comportements mathématiques et en conséquence "Yao craque en maths" (autre lecture du titre).

Une place importante est accordée au problème du zéro, au sens de la lettre en algèbre, à l'enseignement mathématique peu adapté à la vie de tous les jours.

Un livre récréatif au départ qui peut se lire à plusieurs niveaux :

- attrayant pour les enfants bien que certains passages les amèneront à déclarer à l'exemple de Yao : "votre français est trop fort pour moi". Voici l'article 3

qu'on peut lire dans la planche intitulée : Déclaration des droits des mathématiques : "le concept de vérité est limité essentiellement au dedans d'une théorie donnée. Nulle proposition ne peut être envisagée qui n'en fasse expressément partie".

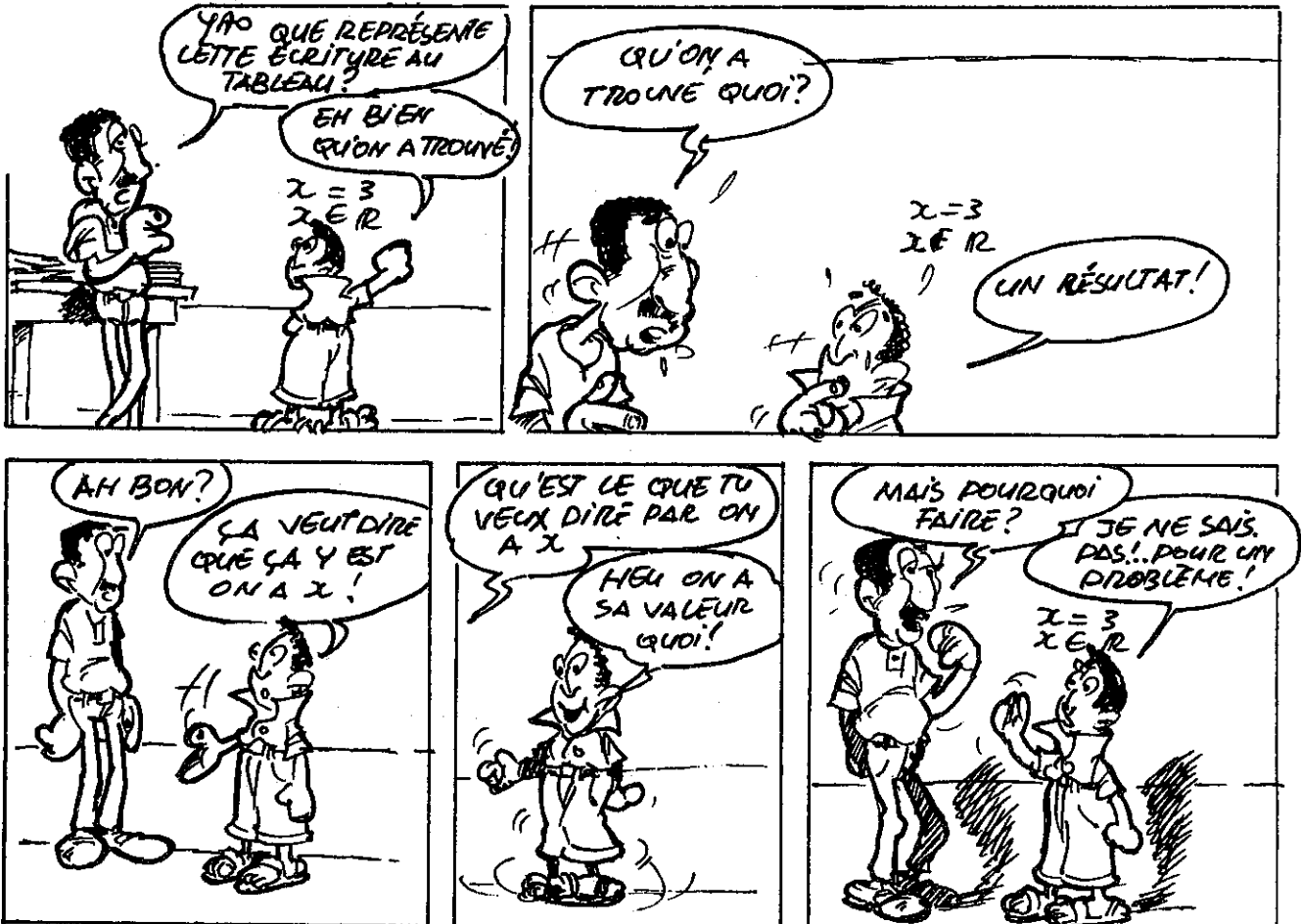
- utile pour les professeurs qui peuvent sélectionner certaines pages, les distribuer en classe et faire réfléchir les enfants sur leurs démarches erronées (et peut être sur le caractère universel de certains comportements mathématiques).

- bienvenu pour faciliter les communications pédagogique-mathématiques souvent difficiles à aborder. Ainsi, la planche "zéro en maths" peut conduire à consulter : "la notion de zéro" (A. Michelot - Paris Vrin), "Epistémologie des nombres relatifs" (G. Glaeser RDM 2.3 La pensée sauvage) ou "le problème du zéro" (D. Pascal DEA de l'université Aix-Marseille-Bordeaux).

De saines lectures qui, si elles vous évoquent Yao, prolongent d'autant les vacances...

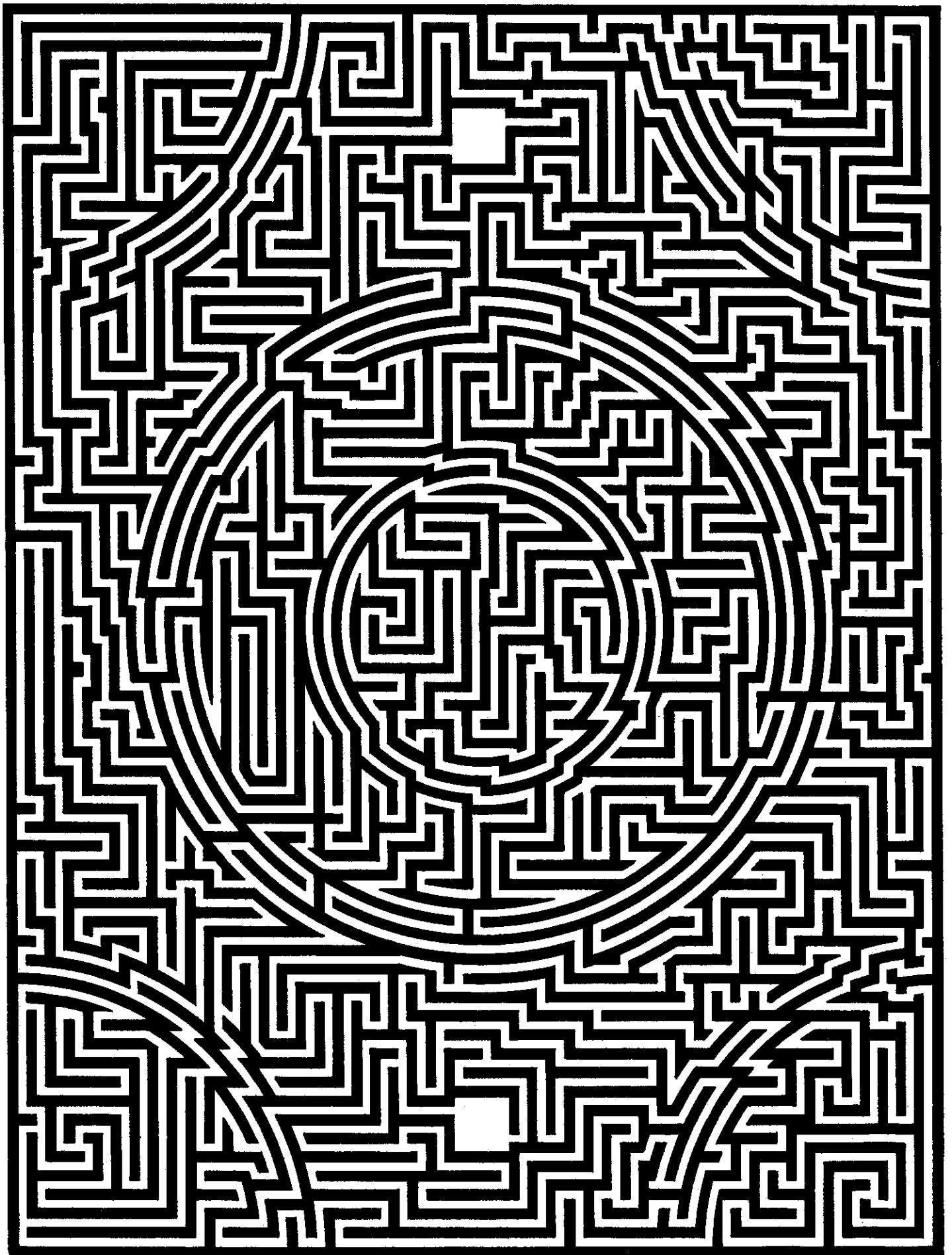
AIR AFRIQUE

YAO VOIT BROUILLARD



ZÉRO EN MATHS





Prix Houphouët Boigny

COTE D'IVOIRE 86

Les épreuves finales de mathématiques du Prix Houphouët Boigny 1986 organisées par la Société de Côte d'Ivoire, se sont déroulées en mai.

6^e - 5^e

1. Le 16 mai 1986 est un vendredi.

Tu sais que chaque année comporte 365 jours sauf les années bissextiles qui en comptent 366. Tous les quatre ans, il y a une année bissextile. La dernière année bissextile était l'année 1984, la prochaine année bissextile sera l'année 1988.

- Quel jour de la semaine fêtera-t-on le 1^{er} janvier 2000 ?
- Koffi est né le 29 février 1964. Quel jour de la semaine est-il né ? Combien d'anniversaires a-t-il déjà fêtés ?

2. Construis un triangle SOA rectangle en O tel que, en cm, $\text{mes}[SA] = 8,5$ et $\text{mes}[OA] = 3,2$. Rédige le programme de construction que tu as suivi.

Construis la figure correspondant au programme de construction suivant, en utilisant le centimètre comme unité :

- Marque un point O du plan.
- Trace le cercle C de centre O et de rayon 10.
- Marque un point A du cercle C.
- Trace le diamètre [AG].
- Construis le diamètre [HK] tel que les droites (AG) et (HK) soient perpendiculaires.
- Construis le milieu I de [OH].
- Trace le cercle de centre I et passant par A.
- Appelle J le point commun à ce cercle, et à [HK].
- Dans la suite du programme, r désigne la distance entre A et J. Marque sur le cercle C quatre points B, C, D et E tels que $AB = r$, $BC = r$, $CD = r$ et $DE = r$.

- Trace les segments [AB], [BC], [CD], [DE], [EA]. Que peux-tu dire de la distance EA ?
- Calcule la mesure en degrés du petit arc \widehat{AB} .
- Trace de nouveau un cercle C de centre O et de rayon 10.

En utilisant le programme de construction, marque cinq points du cercle C appelés S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 , et qui partagent le cercle C en cinq arcs $\widehat{S_1S_2}, \widehat{S_2S_3}, \widehat{S_3S_4}, \widehat{S_4S_5}$ et $\widehat{S_5S_1}$ de même mesure.

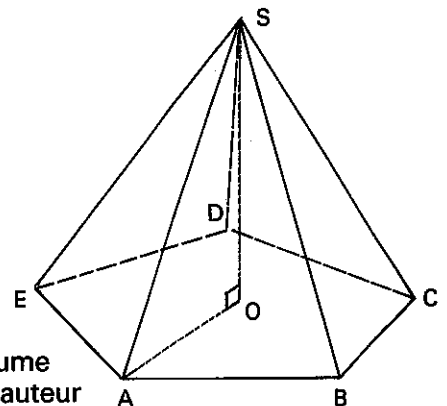
Marque les points A, B, C, D et E tels que :

$$\begin{aligned} [S_1S_3] \cap [S_2S_5] &= \{A\}; & [S_2S_4] \cap [S_1S_3] &= \{B\}; \\ [S_3S_5] \cap [S_2S_4] &= \{C\}; & [S_4S_1] \cap [S_3S_5] &= \{D\}; \\ [S_5S_2] \cap [S_4S_1] &= \{E\}. \end{aligned}$$

La figure obtenue est le patron d'une pyramide de sommet S, de base ABCDE et telle que la droite (SO) est, après montage (voir figure), perpendiculaire à chacune des droites (OA), (OB), (OC), (OD), (OE).

Le segment [SO] est appelé hauteur de la pyramide.

En utilisant toutes les figures que tu as construites pour y mesurer les segments dont tu as besoin, calcule le volume de la pyramide d'après la formule ci-dessous :



V : mesure du volume
h : mesure de la hauteur
B : mesure de l'aire de base

$$V = \frac{1}{3} \times h \times B$$

1. a, b, c, \dots désignent des chiffres. On notera \bar{a} le nombre s'écrivant avec le chiffre a , \overline{ab} le nombre s'écrivant avec les deux chiffres a et b . On te rappelle que ; $\overline{ab} = 10a + b$.

Montrer qu'en renversant un nombre de deux chiffres, on obtient un second nombre tel que la différence de ces deux nombres est un multiple de 9 (en renversant le nombre \overline{ab} , on obtient le nombre \overline{ba}). Ton professeur de mathématiques serait sûrement scandalisé de te voir simplifier les fractions de la manière qui suit :

$$\frac{16}{64} = \frac{\cancel{1}\cancel{6}}{\cancel{6}\cancel{4}} = \frac{1}{4} \quad (\text{on a supprimé } 6 \text{ au numérateur et au dénominateur}).$$

Et pourtant, cela donne parfois des réponses correctes.

Trouve tous les exemples de fractions ayant pour termes des naturels distincts de deux chiffres et acceptant une telle simplification.

2. M étant un point quelconque, on désigne par S_M la symétrie de centre M .

On considère un triangle ABC . Construis les points A_1, B_1 et C_1 tels que $A_1 = S_B(A)$, $B_1 = S_C(B)$ et $C_1 = S_A(C)$.

Place les points M, N et P tels que
 $\{M\} = (AA_1) \cap (B_1C_1)$, $\{N\} = (BB_1) \cap (C_1A_1)$ et
 $\{P\} = (CC_1) \cap (A_1B_1)$.

Le triangle $A_1B_1C_1$ étant donné, trouve un programme de construction (que tu justifieras) du triangle ABC tel que

$$A_1 = S_B(A), B_1 = S_C(B) \text{ et } C_1 = S_A(C).$$

(Pour avoir le même triangle que tes camarades, commence par tracer, en prenant le centimètre comme unité, un triangle $A_1B_1C_1$ tel que $A_1B_1 = 6$, $B_1C_1 = 9$ et $C_1A_1 = 12$).

1. a, b, c, d sont des nombres réels strictement supérieurs à 1 tels que :

- il y en a deux d'entre eux dont la somme est égale à d ;
 - il y en a deux d'entre eux dont la différence est égale à d ;
 - il y en a deux d'entre eux dont le produit est égal à d ;
 - il y en a deux d'entre eux dont le quotient est égal à d .
- Déterminer ces nombres réels.

2. $ABCD$ est un quadrilatère.

Démontrer que :

$$2 \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = (AB^2 + CD^2) - (AD^2 + BC^2).$$

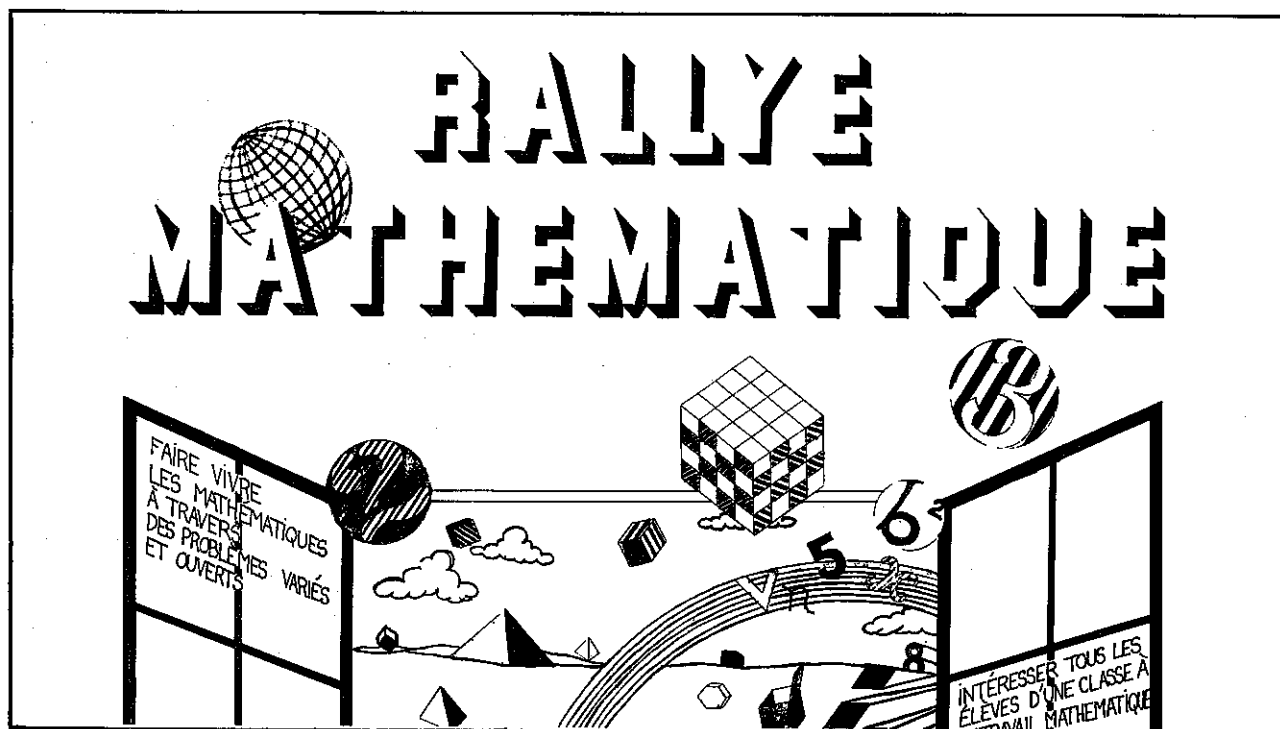
Un quadrilatère est formé de quatre tiges rigides articulées entre elles aux extrémités. On suppose que pour une position des tiges, les diagonales du quadrilatère sont perpendiculaires.

Montrer qu'après toute déformation de ce quadrilatère articulé, les diagonales sont encore perpendiculaires.

3. Le prix d'une pierre précieuse est proportionnel au carré de sa masse.

On fait tomber accidentellement cette pierre précieuse de 20 g et elle se casse en deux morceaux de masses m_1 et m_2 . On doit alors vendre séparément les deux morceaux.

- A-t-on ainsi perdu de l'argent ?
- Pour quelles valeurs de m_1 et m_2 perdrait-on le plus d'argent ?



*Le rallye d'Orléans s'étend cette année au Loiret.
Toujours avec la formule originale "classe contre classe".
Il s'adresse indistinctement aux élèves de troisième et de seconde.*

Voici deux des douze exercices de 86 avec complément ou commentaires extraits de la publication de l'Irem d'Orléans n° 25 : Démarches algorithmiques en mathématiques qui contient par ailleurs une mine de situations et de réflexions sur le sujet (Nov. 86, 218 p. 40 F)

Exercice 3 (15 points sur 100) attention au noyau
Des cubes identiques sont assemblés pour former un grand cube plein dont on peint entièrement certaines faces.
Quand la peinture a séché, le grand cube est démonté et on trouve que 45 des petits cubes ne portent aucune trace de peinture.
Combien de faces du grand cube ont-elles été peintes ? Justifiez.

Complément : attention à la peinture !

Avec 27 petits cubes en bois on fabrique un cube de 3 sur 3 petits cubes. On peint les six faces de ce grand cube en bleu. On laisse sécher... On démonte le grand cube que l'on reconstruit en ne faisant apparaître que des faces non peintes. On peint ces six faces en blanc. On laisse sécher... Et on recommence... on démonte pour les peindre en rouge et on remonte en ne faisant apparaître que des faces non peintes... si on peut !!
Essayer !! pouvez-vous y arriver ? Comment ?

Il permet d'effectuer un calcul dès qu'on introduit 3 nombres X, Y, Z et affiche ensuite le résultat noté P.
• Exprimer algébriquement P en fonction de X, Y, Z.
• Représenter un montage permettant d'effectuer le même calcul que celui proposé et nécessitant le moins possible de machines élémentaires.

Commentaires

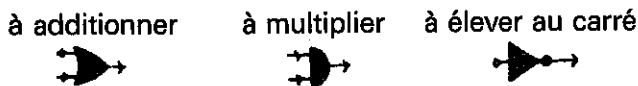
Cet exercice est intéressant à plus d'un titre :

- il propose une représentation imagée d'un algorithme de calcul,
- il montre l'importance des connaissances mathématiques et leur nécessité pour produire des algorithmes performants : avec l'expression $P = ZXY (Z + XY(X + Y))$, 6 opérations produisent le même résultat que les dix du schéma de départ,
- il peut être étendu à un nombre quelconque de nombres $x_0, x_1 \dots x_n$.

Exercice 12 - 10 points

Ce n'est pas une machine infernale

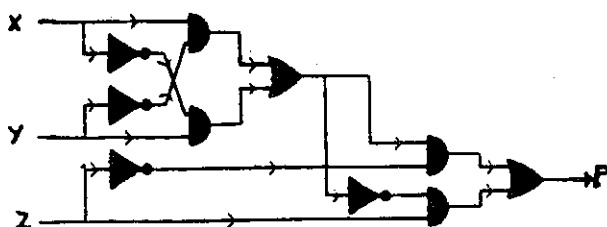
Les symboles ci-dessous désignent des machines élémentaires :



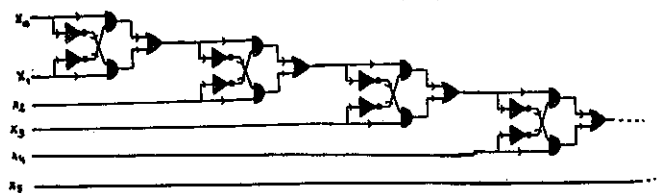
Leur effet sur des nombres A, B, C, D, E, peut se représenter de la manière suivante :



Voici un montage à 3 entrées et une sortie réalisée à partir de ces machines :



En modifiant un peu la présentation du schéma on constate que certains "blocs" reviennent systématiquement :



Cela apparaît aussi avec la forme algébrique simplifiée : si on note T l'expression $XY (X + Y)$ on constate que T et P ont des structures identiques :
 $P = ZXY (Z + XY(X + Y)) = ZT(X + T)$.

On peut rendre compte de cette "homothétie interne" des calculs par une analyse récurrente simple :

Produire le résultat $R(p)$ de p opérations du type $XY(X + Y)$, c'est composer le nombre X_p (on part de x_0) avec le résultat $R(p - 1)$ des $p - 1$ opérations précédentes :

$$p \geq 1 : R(p) = x_p \cdot R(p - 1) \cdot (x_p + R(p - 1))$$

et $R(0) = x_0$

L'algorithme suivant utilise la sous-procédure fonctionnelle **PRODUIT-SOMME**

PRODUIT-SOMME (réel X , réel Y) — réel
 — $X * Y * (X + Y)$
FIN PRODUIT-SOMME

CALCUL (liste de réels $[x_0 \ x_1 \ \dots \ x_n]$) — réel

Choix : longueur liste = 1 : → élément de la liste
 longueur liste = 1 : → **PRODUIT-SOMME**
 (DERNIER liste,
CALCUL SAUF DERNIER liste)

Fin choix
 Fin **CALCUL**

Contrairement à **PRODUIT-SOMME**, **CALCUL** ne correspond pas à une opération commutative, l'ordre des nombres $x_0, x_1 \dots x_n$ est donc important. Pour l'épreuve du Rallye, il faut appeler **CALCUL [X Y Z]**.

Préparez-vous à chercher : prêt ? Partez !

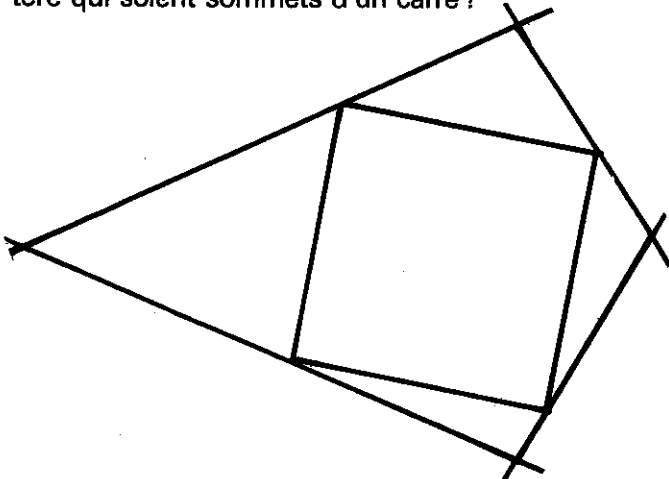
Cône et coniques

Tout le monde le sait ! Toute conique s'obtient en coupant un cône par un plan. De plus, un cône est une surface développable, on peut le réaliser avec une feuille de papier (voir problème - Plot n° 34 et Arabella in 31).

Et bien, pouvez-vous découper dans une feuille un patron de cône qui fasse apparaître une section plane ayant la forme d'une ellipse ?

Cherche carré inscrit dans quadrilatère.

Dessinez un quadrilatère quelconque. Pouvez-vous trouver quatre points sur les quatre côtés du quadrilatère qui soient sommets d'un carré ?



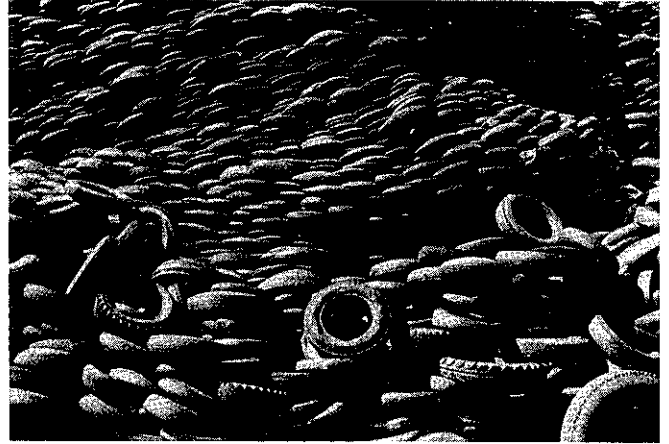
Orléans - Rallye 87

Les quatre problèmes qui suivent, un peu modifiés, sont tirés des épreuves préparatoires proposées pour le rallye d'Orléans 87.

La roue de secours

Une voiture a parcouru 20 000 kilomètres. Les cinq roues de la voiture (y compris la roue de secours) ont été usées de la même façon.

Avez-vous une explication ?



Quel est le plus grand ?

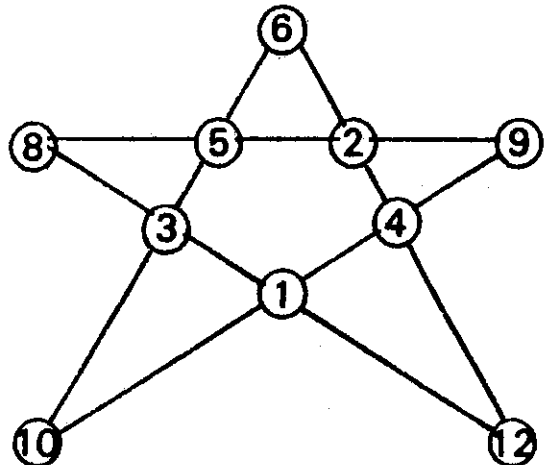
$$\frac{2,000\ 000\ 001}{2,000\ 000\ 001 - (1,000\ 000\ 001)^2}$$

ou

$$\frac{2,000\ 000\ 002}{2,000\ 000\ 002 - (1,000\ 000\ 001)^2}$$

Etoile magique

En plaçant convenablement les dix nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12 aux croisements cinq branches de cette étoile, la somme est toujours la même. En utilisant les mêmes nombres, trouvez d'autres dispositions "magiques". Et avec d'autres nombres ?



Des mammifères prolifiques

Les campagnoles (ou mulots) se reproduisent dès l'âge de deux mois, à raison de six portées de quatre petits par an, un par mois, étalées d'avril à septembre. On isole un couple de mulots adultes. Il paraît qu'en douze mois, ce couple peut avoir plus de cinq cents descendants. Qu'en pensez-vous ?

Ndlr : chez les mulots, n'importe quel mâle peut féconder n'importe quelle femelle.

AU RYTHME DES ALGORITHMES

Michel CLINARD - Orléans

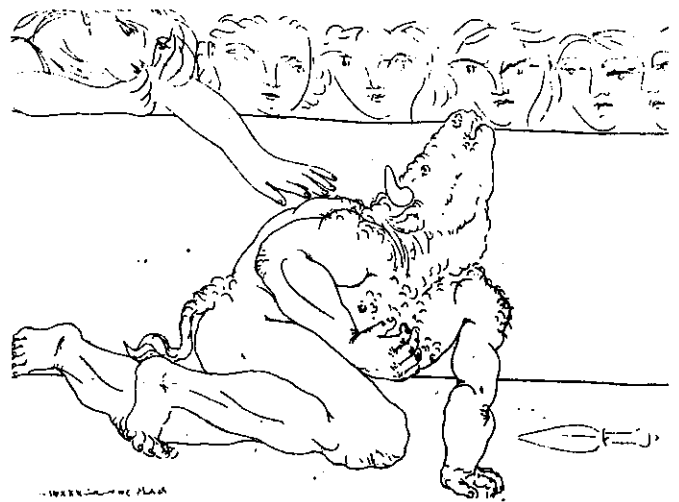
2^e Episode : Aporie labyrinthique (à vos Robert !).

En Chine ancienne, dans la taoïsme, le thème des labyrinthes est abondamment représenté. Pour nous, c'est la construction de Dédale qui symbolise mythologiquement la notion d'aporie : difficulté logique liée à une alternative embarrassante, problème insoluble ou qui contient en lui-même sa solution.

Le Labyrinthe fut construit en Crète à la demande de Minos pour y enfermer le Minotaure, rejeton sanginaire, fruit des unions coupables de Pasiphae. Thésée tue l'homme-taureau et peut sortir du labyrinthe grâce au peloton de fil donné par Dédale à la demande d'Ariane.

Minos, quelque peu courroucé, enferme dans le labyrinthe Dédale et Icare qui pourront fuir grâce aux ailes de cire et de plumes fabriquées par le père, mais une mauvaise maîtrise de l'espace aérien sera fatale au fils.

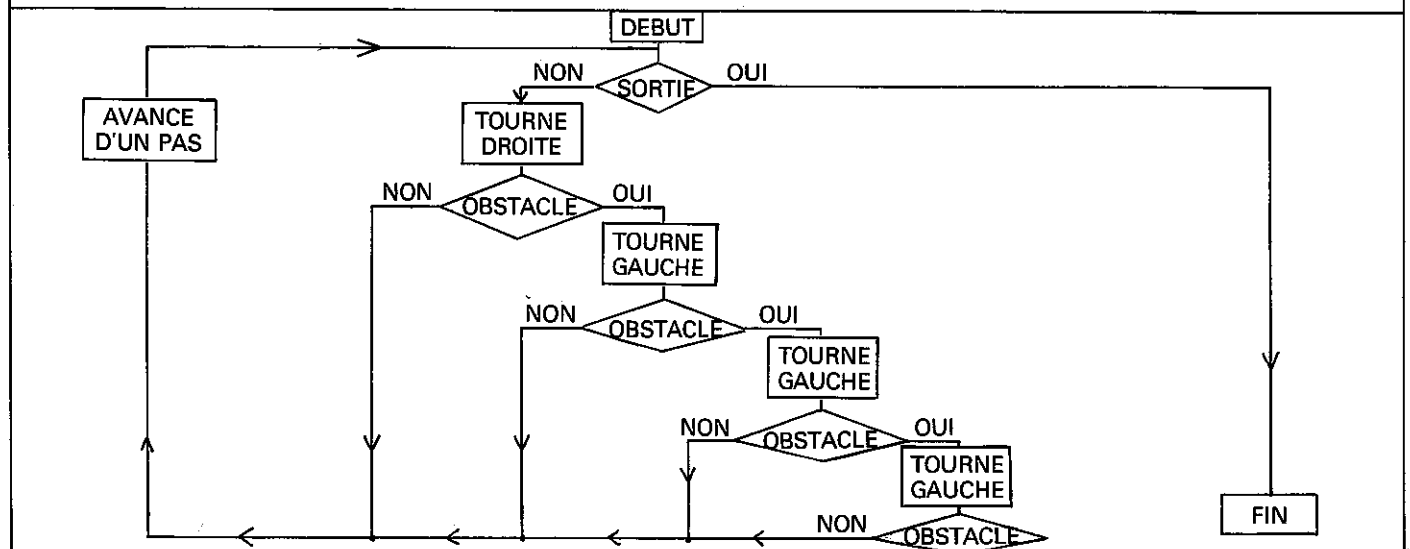
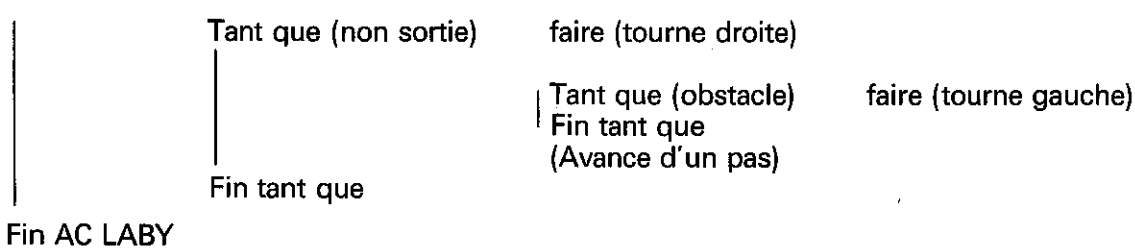
Cette longue introduction permet donc de s'interroger sur l'existence et la portée d'un tel récit mythologique si Thésée ou Dédale avaient eu à leur disposition l'algorithme suivant :



Minotaure mourant (eau-forte).

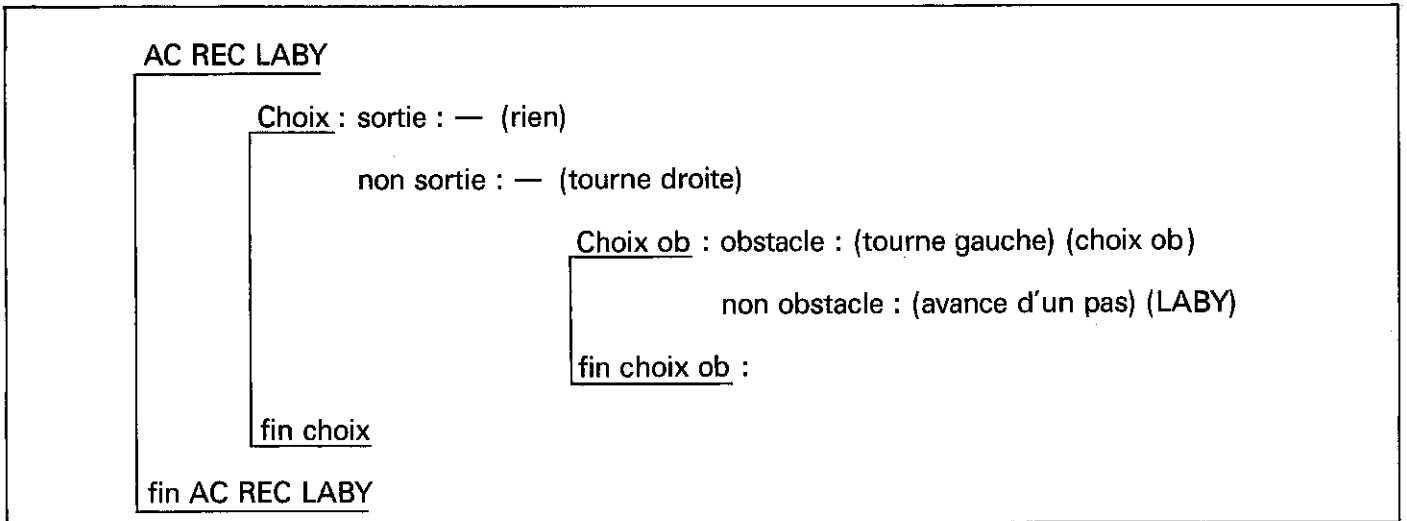
Algorithme d'action basée sur une observation systématique des chemins tournant toujours à droite :

AC LABY



On peut représenter l'algorithme par le schéma ci-dessus en remarquant qu'après un "tourne-droit" et trois "tourne-gauche" on repart forcément par où on est venu, le dernier test "obstacle" ne peut donc pas

être positif. Cette situation se produit "au bout" d'un mauvais chemin :
On peut aussi donner une version récursive de cet algorithme :



Il est nécessaire de définir deux procédures : LABY et choix OB pour permettre les appels récursifs. On peut d'ailleurs observer une modularité interactive LABY ↔ CHOIX OB.

(Rien) peut être remplacé par l'affichage d'un message accompagné d'une petite mélodie qui séduira le plus exigeant des mélomanes.

Avec LOGO on peut définir :

```

    POUR LABY
    SI SOR [STOP]
    TD 90
    CHOIX OB
    FIN
  
```

```

    POUR CHOIX OB
    SI OB [TG 90 CHOIX OB]
    AY 10 LABY
    FIN
  
```

La tâche la plus pénible (mais pas la plus difficile d'un point de vue algorithmique) est la construction du labyrinthe (on peut utiliser FPOS ou le fichier GENE de la valise des stages IPT de l'été 1985). Les procédures-test CHOIX OB et SOR (SORTIE est déjà une primitive) sont liées à la représentation, nous y reviendrons avec des problèmes de simulation.

Il est évidemment plus facile d'utiliser le logiciel AGD (même valise) avec l'algorithme séquentiel :

```

    O-D ; 1-?G5 ; 2-?G5 ; 3-?G5 ; 4-A ; 5-O
  
```

En général les problèmes des labyrinthes séduisent et intéressent les élèves (défi ludique ou atavisme mythologique). La compréhension ne pose pas de difficulté et les essais peuvent être nombreux. On obtient souvent de bons algorithmes qui permettent de sortir du *labyrinthe particulier* qui est donné.

Trouver un algorithme général est plus délicat, on peut observer plusieurs types de difficultés :

- celles liées au problème lui-même (en particulier comment généraliser - et donc abstraire - quand on a pour support de réflexion une représentation particulière),

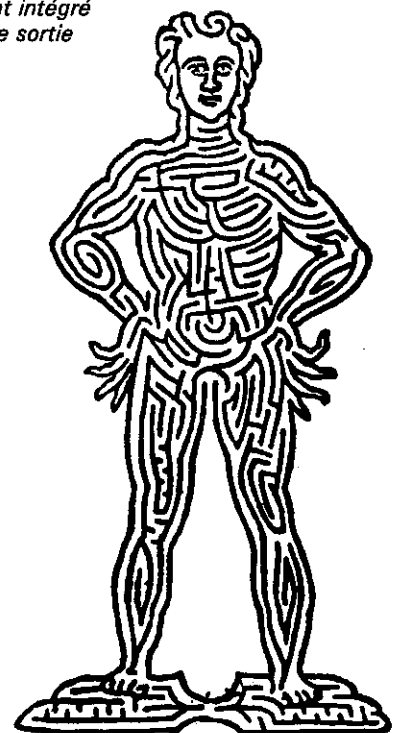
- celles propres à l'algorithme,
- celles touchant à la notion de généralisation qui n'apparaît pas toujours nécessaire ou susceptible d'apporter des solutions meilleures.

Ce dernier problème dépasse le cadre de l'algorithmique même s'il est ici mieux mis en évidence avec les algorithmes précédents qui sont efficaces mais peu rapides (surtout si l'on se perd dans de longs mauvais "chemins de droite" alors que la sortie s'atteint facilement en tournant à gauche).

Un algorithme examinant les chemins de gauche n'apporterait rien de plus d'un point de vue théorique.

Quelles solutions proposez-vous ? ■

Stéréotype de l'homme heureux ayant pleinement intégré un algorithme de sortie de labyrinthe.



Homme labyrinthique. Gravure sur bois de Francesco Segala. XVI^e siècle.

Ces deux programmes, faciles à comprendre et à adapter au logo vous permettront-ils de sortir des "apories logarithmiques" de l'auteur !

POUR MARCHER

TEST TOUCHE EN AVANT
SI VRAI [A DROITE 180]
SI FAUX [AVANCE 1]
MARCHE

FIN

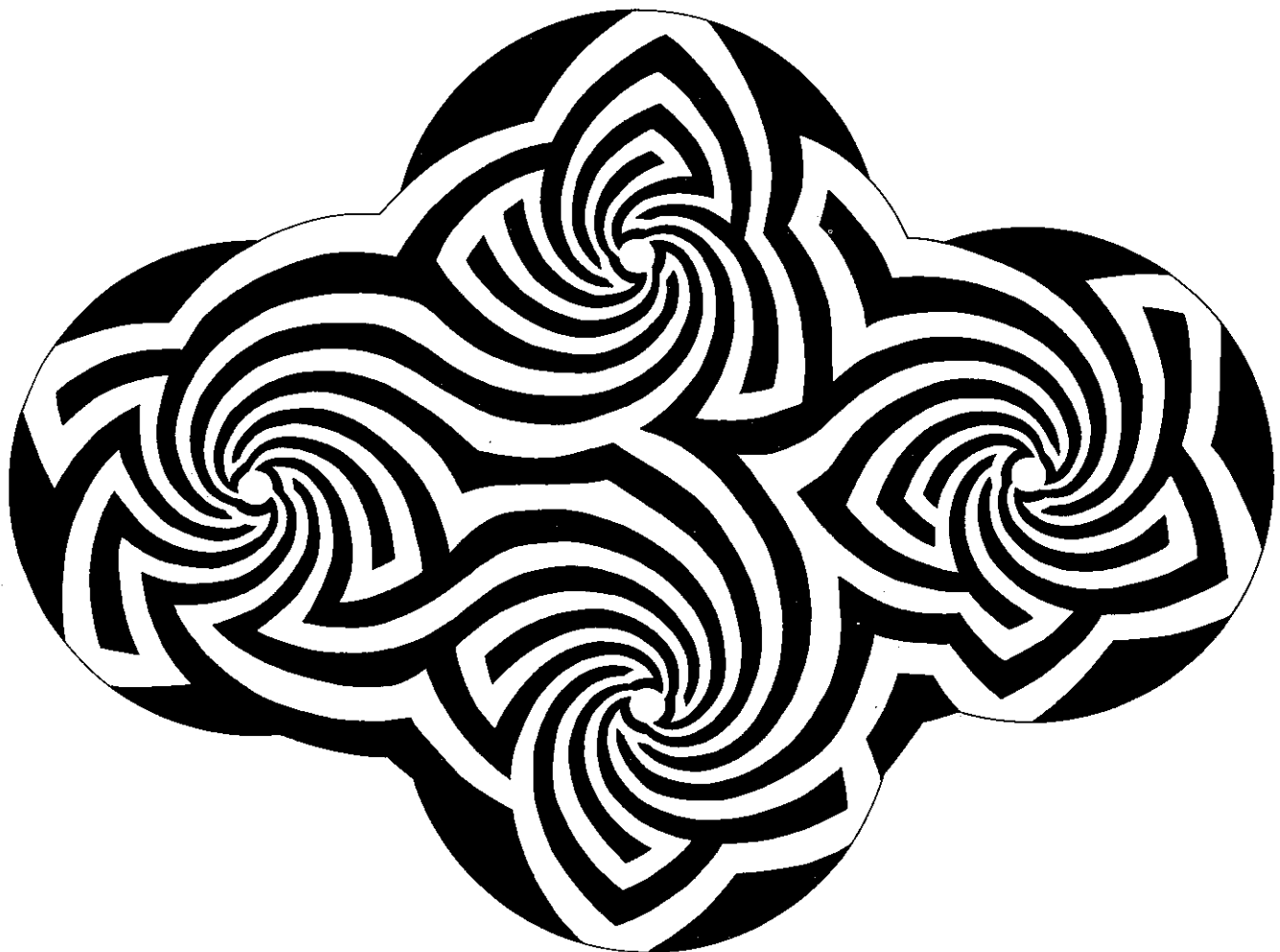
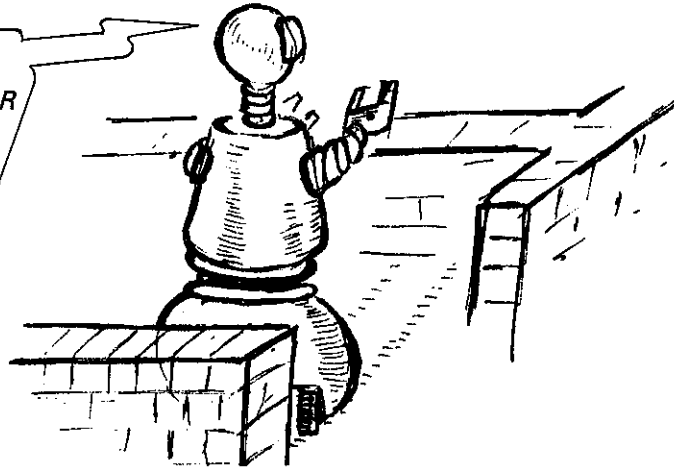
POUR VOLER

OISEAU
AVANCE 5
ATTEND 2
VOLE

FIN

*Extrait et traduit de "vingt choses à faire avec un ordinateur"
de S. Papert et C. Solomon, adapt. E. Martin et A. Deledicq - Cedric-Nathan.*

APRES 2.10⁵
ALLER ET RETOUR
J'ENVISAGE
DE VOLER...



ERRATA au n° 36

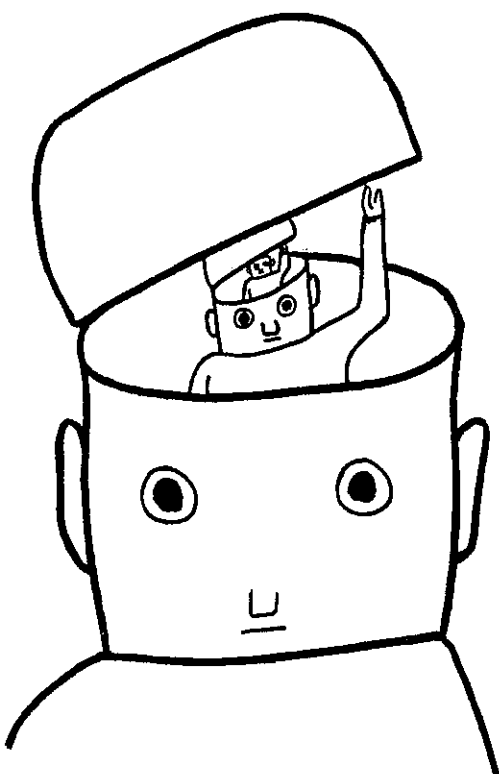
- Erreur de frappe (oui, je sais c'est facile à dire et de toute façon la relecture aurait dû la corriger) : il faut lire "autoréférent" et non "autoréférant".
- Oubli à l'impression qui n'aura pas échappé aux fins connaisseurs de l'appel récursif (oui, je sais... c'est beaucoup pour une première de nouvelle rubrique)... pour que le programme DEMANDE puisse s'arrêter, l'un des deux tests (choix liste ou choix réponse) doit conduire à **liste vide** ou **oui**.
Si ce n'est pas le cas, après examen d'un élément de la liste, il faut donc étudier le suivant grâce à l'appel de : DEMANDE équipe animation (liste des membres de l'équipe **sauf le premier élément**).
Il manquait le contenu de cette parenthèse, le programme aurait bouclé jusqu'à ce que le premier élément dise **oui** (la procédure récursive comme nouveau moyen d'obtenir des aveux spontanés... ?).
Cet oubli permet d'insister sur l'importance de l'appel "réduisant la taille" de la variable, on peut ainsi s'assurer que le test d'arrêt sera atteint : un premier petit pas vers la preuve d'algorithme.

Programme LOGO illustrant l'algorithme de recherche d'un responsable de la rubrique "ALGORITHMME"
(voir PLOT n° 36)

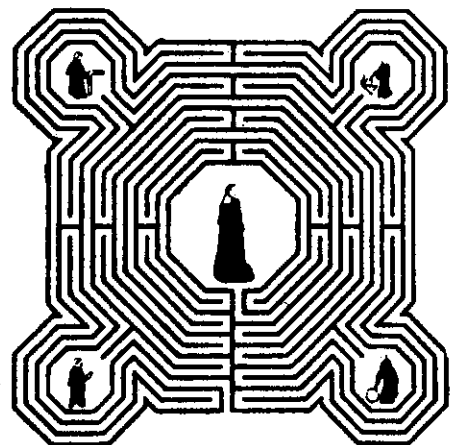
```
POUR DEMANDE :L
SI VIDE? :L [EC [PAS DE RESPONSABLE, PAS DE RUBRIQUE] STOP]
SI EGAL? CHOSE PREM :L "OUI [EC PH PREM :L [SE CHARGE DE LA RUBRIQUE] STOP]
DEMANDE SP :L
FIN

DONNE "MIRAULT [JE N'AI PAS LE TEMPS]
DONNE "PARPAY [BOF]
DONNE "CRESPIN [J'HABITE TROP LOIN]
DONNE "MONSELLIER [C'EST PLUS A MON AGE ...]
DONNE "M.DARCHE [QU'EST CE QU' UN ALGORITHMME ?]
DONNE "M.L.DARCHE [MAIS JE SUIS LA REDACTRICE EN CHEF {}]
DONNE "CLINARD "OUI ( PENSANT QU'ON LUI PROPOSAIT UNE TASSE DE CAFE )

APPELER LE PROGRAMME "DEMANDE" AVEC LA LISTE DES MEMBRES DE L'EQUIPE D'ANIMATION
```



*Plan du Labyrinthe
de la Cathédrale de Reims,
XVI^e siècle.
Détruit en 1779.*



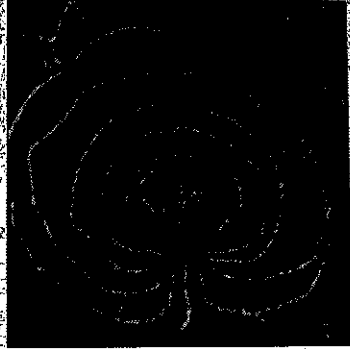
Labyrinthes et actualités

Alors que le comité national Apmep s'interroge sur la nature du bulletin national, nous vous proposons de participer à ce débat en écrivant au Plot, au Bulletin National Vert et en consultant d'autres bulletins "Apmep" de l'étranger. Ci-après, 3 pages du bulletin trimestriel (64 p.) de décembre du journal *Mathematics Teaching* n° 117 de nos collègues anglo-saxons.
En quoi sommes-nous différents ? Prouvons-lé !!

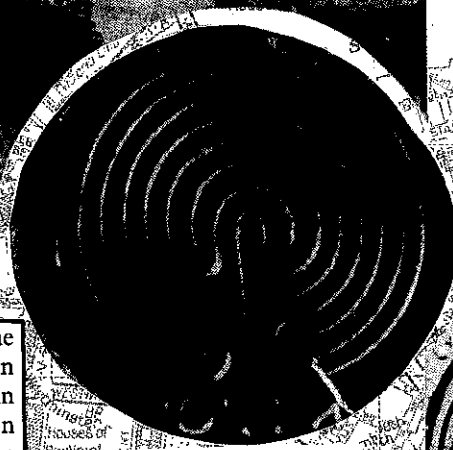
LABYRINTHS



Classical legend placed the Minotaur slain by Theseus at the centre of a Labyrinth said to have been built by Daedalus. This is sometimes held to refer to the complex passageways of the Palace of Knossos through which Theseus escaped using the thread of Ariadne. But the *labrys* was the Minoan sacred double-headed axe connected with a cult in which dancing played a large part; and Homer describes how 'Daedalus in Knossos once contrived a dancing-floor for the fair-haired Ariadne'. Excavated seals show ecstatic whirling priestesses. It has been suggested that the Labyrinth refers to the floor-pattern prominent in fertility rites.



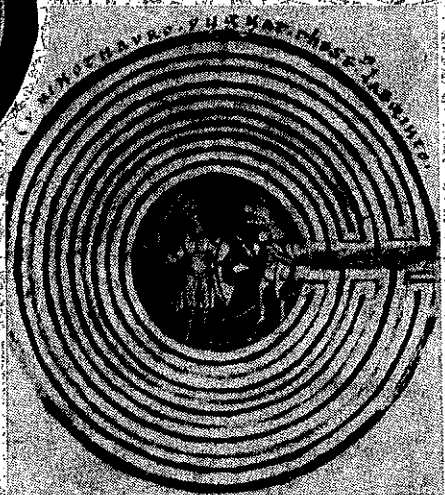
Rock engraving, Italy, before 2nd millenium BC



Coin: Knossos, 1st millenium BC



Etruscan wine-jar: warriors emerging from the Trojan game (or maze dance)



MSS painting, Munich, 12th century AD

The labyrinth pattern became stylised and featured on Cretan coins; copied and elaborated in Greek jewellery and Roman mosaics; and embroidered on the state robes of the Byzantine emperors – as symbols, according to some interpretations, of the folds of sin by which we are surrounded. The labyrinth design began to appear on the floors of cathedrals (particularly in France) in the 12th century, as a penitential path symbolizing the pilgrimage to the Holy Land, the way to Calvary, or indeed the path of life. The centre was often referred to as Jerusalem, sometimes as Heaven. But there was a persistent tradition of calling it a Daedalus. Indeed, until it was melted down for cannon during the French Revolution, the metal plaque at the centre of the Chartres labyrinth depicted Theseus fighting the Minotaur.



Scratchings on pillar at Pompeii, dated before 79AD

Closely related are designs such as those decorating some Celtic monuments but also found in many widely differing cultures. Unlike the paths of a labyrinth, these usually have no beginning and no end, but they are certainly labyrinthine in their complexity, seeming to share the Hilbert objective to fill a finite space with an infinite curve. Some modern painters have used this powerful image, perhaps expressing sheer intellectual delight in the ramifications of thought, or a Kafka-esque despair at the tortuous paths of social life. (Notice also the use of the image by students reported in Borasi's article on p38.)



Neolithic rock painting, Ireland



Hopi Indian: the route through the maze is said to symbolise the human life-journey planned by the universal Creator



Celtic cross

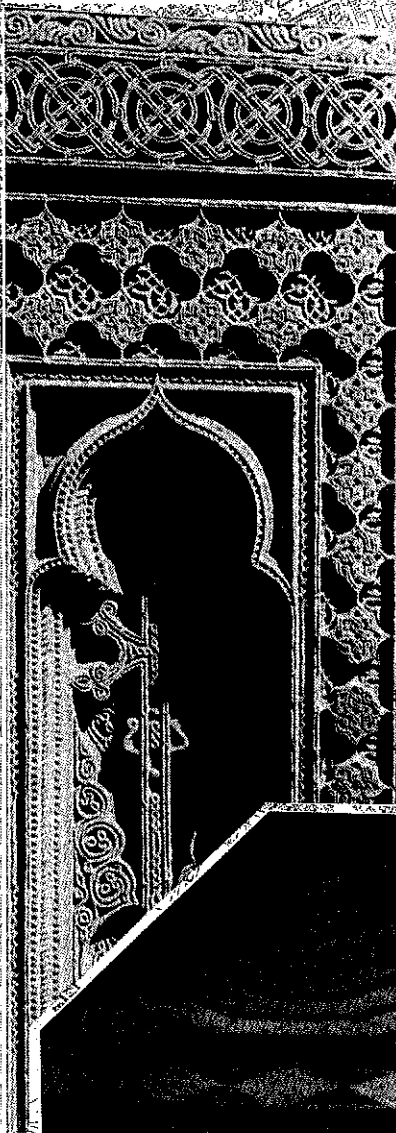


Etruscan jar



Pebbles found on an uninhabited island in Finland

Part of Armenian tombstone



Part of Yoruba door-panel



Victor Pasmore, Coast of the inland sea

ABONNEMENTS au journal PLOT pour 1987 et après

Jusqu'à 50 % de réduction
si vous vous abonnez pour 2 ans ou +

Nom et prénom
ou établissement _____

Adresse complète _____

Code postal et ville _____

Ecole élémentaire Collège Lycée Supérieur Autre

Pour les 4 numéros :

de 1986

de 1987

de 1988

de 1989

payé par chèque

désire facture

nouvel abonné

	Tarif normal et établissement	Membre Apnep	Pays étrangers (par avion)	Règlement
Pour un an	100 F	80 F	120 F	[]
Par année supplémentaire	+ 50 F	+ 40 F	+ 80 F	

BON DE COMMANDE 1987

Les Dossiers et Matériels du PLOT

20 % de réduction pour plus de 500 F d'achat

		Abonnés		Non Abonnés		Matériel (Nombre)	Dossier (Nombre)	Coût Total
35 F	40 F	Polyèdres dans l'espace n° 1						
35 F	40 F	Polyèdres dans l'espace n° 2						
35 F	40 F	Aléatoire						
35 F	40 F	Papiers accrochés						
35 F	40 F	Pliages et mathématiques						
35 F	40 F	Espaces, pavages et symétries (à paraître)						
20 F	Les Dossiers "Ludi-Math" (Poitiers)		n° 1/20 F	n° 2/20 F				
30 F/40 F			n° 3/30 F	n° 4/40 F				
50 F	Catalogue exposition : Mosaïque Mathématique							
10 F	Affiches pour la classe : "Horizons Mathématiques"					<input type="checkbox"/>		
	"Polyèdres dans l'espace"					<input type="checkbox"/>		
	60 x 40 cm "l'Univers mathématique"					<input type="checkbox"/>		
40 F	Pochettes pour rétroprojecteur					n°		
40 F/60 F	Pochettes de diapositives					n°		
	Frais d'envoi forfaitaire pour toute commande							15 F
	- 20 % pour plus de 500 F d'achat							TOTAL

Nom : _____

Adresse : _____

Règlement à envoyer à l'APMEP Orléans-Tours - BP 6759, 45067 Orléans-Cedex 2 - CCP La Source 144009X

VOTRE CORRESPONDANT REGIONAL

écrire à : Régionale de l'APMEP

POITIERS : IREM - 40, avenue du Recteur Pineau - 86022 Poitiers (Serge Parpay)
 LIMOGES : IREM - 123, rue Albert Thomas - 87060 Limoges (Roger Crépin)
 NANTES : IREM - 38, bd Michelet - BP 1044 - 44037 Nantes (Raymond Torrent)
 RENNES : Collège La Harpe - BP 1325 - 35016 Rennes (Georges Le Nezet)
 ROUEN : IREM - BP 27 - 76130 - Mont-Saint-Aignan (Jacqueline Collet)
 BREST : IREM - Université - 6, avenue Le Gorgen - 29283 Brest (André Treguer)
 CAEN : IREM - IUT - Boulevard Maréchal Juin - 14000 Caen (Francis Conynck)

COTE D'IVOIRE : Daniel Boutté - BP 927 - Abidjan 06
 TOGO : Gérard Dubos - BP 91 - Lomé
 MAURITANIE : Pierre Latourette - BP 203 - Nouakchott
 CAMEROUN : Pigeonneau Roger - BP 1303 - Yaoundé
 CONGO : Leclercq Jean-Claude - BP 2175 - Brazzaville