
CONSTRUIRE L'ESPACE

Michel DARCHE - La Villette

VOYAGES ALLER-RETOUR DES ECRANS AU REEL

Déjà en 1980, lors du congrès international sur l'enseignement des mathématiques à Berkeley, la géométrie semblait vouloir reprendre une place de choix dans la formation des jeunes.

Depuis l'évolution technologique a confirmé cette tendance :

- *les objets, avec leurs propriétés géométriques, sont plus accessibles et plus présents dans la vie de tous les jours,*
- *la visualisation de ces objets prend de plus en plus de place dans l'audiovisuel, l'informatique et transforme fortement les métiers traditionnels, du secrétariat au dessin industriel ou la comptabilité, sans parler des nouveaux métiers qui s'appuient sur ces nouveaux outils,*
- *enfin de nombreux problèmes actuels des mathématiques débouchent sur la géométrisation et la visualisation.*



Les problèmes, pour la formation, portent sur trois points :

1) Comment se dégager (un peu) de l'emprise de la géométrie analytique omniprésente depuis une vingtaine d'années.

2) Comment réorganiser le processus général d'apprentissage des concepts géométriques qui passe de l'analyse interne des objets, aux constructions de classes d'objets, aux relations entre ces objets et aux structures des transformations sur ces classes d'objets.

3) Comment, enfin, prendre en compte le développement historique passé et présent, de la géométrie tout en tenant compte de la psychogénèse des structures géométriques chez l'enfant et l'adulte.

Les activités proposées dans ce numéro essaient de tenir compte de ces préoccupations et proposent des situations avec des objets, puis sur leurs représentations, sur les transformations de ces objets et leurs représentations pour revenir à la fin sur ces objets comme supports de validation.

La démarche proposée aux enseignants et formateurs part des situations proposées aux élèves et s'appuie sur les réactions des participants. Ces situations visent à :

1) Permettre à chacun, jeune ou adulte, de *s'investir* dans l'activité quels que soient ses savoirs.

2) Lui permettre de *formuler* des hypothèses, de *choisir* un plan d'action, de le mettre *en œuvre* et de *confronter*, au sein du groupe, les différentes démarches.

3) Permettre, collectivement, de *valider* les différentes démarches.

4) Faire émerger, au sein du groupe, de *nouvelles connaissances* en balisant, en particulier, le champ de validité des connaissances antérieures.

Par ailleurs l'acquisition de savoir doit s'accompagner d'acquisition de savoir-faire. Là encore, trop de poids est donné, dans l'enseignement, à l'acquisition de connaissances mathématiques au détriment de l'*activité mathématique* (Qu'en reste-t-il en fin de scolarité ?).

Du point de vue didactique les travaux de recherche ont permis de dégager un certain nombre de variables didactiques relevées et étudiées par Guy Brousseau (la taille des objets) et Janos Baracs (la forme, les mesures des objets).

La taille avec :

La **micro-géométrie** de la feuille de papier, de l'écran, de ce que l'on peut poser sur la table.

La **méso-géométrie** de ce qui peut être contenu dans une pièce ou parcouru du regard.

La **macro-géométrie** ("large-skile") du déplacement dans une ville, dans un navire, dans un musée (plans-cartes...).

On peut citer aussi la **géo-métrie** qui concerne le globe terrestre avec une nouvelle géométrie, celle de la sphère avec les problèmes de plus court chemin sur la Terre ou de cartographie (cf. Plot n° 38) et encore la "**cosmo-géométrie**" qui concerne les géométries non-euclidiennes comme celles de l'univers.

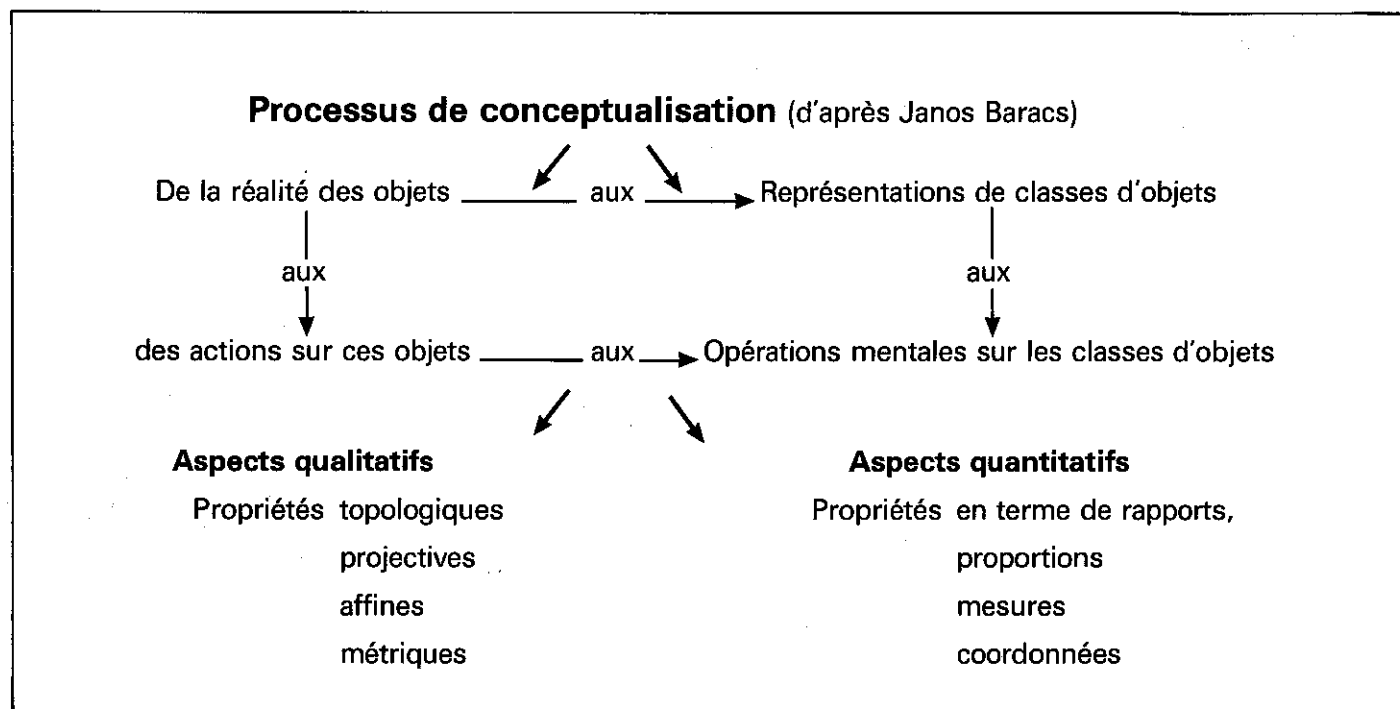
La forme et la mesure avec :

Les aspects qualitatifs

- Propriétés topologiques (notion de forme-graphe...)
- Propriétés projectives
- Propriétés affines

Les aspects quantitatifs

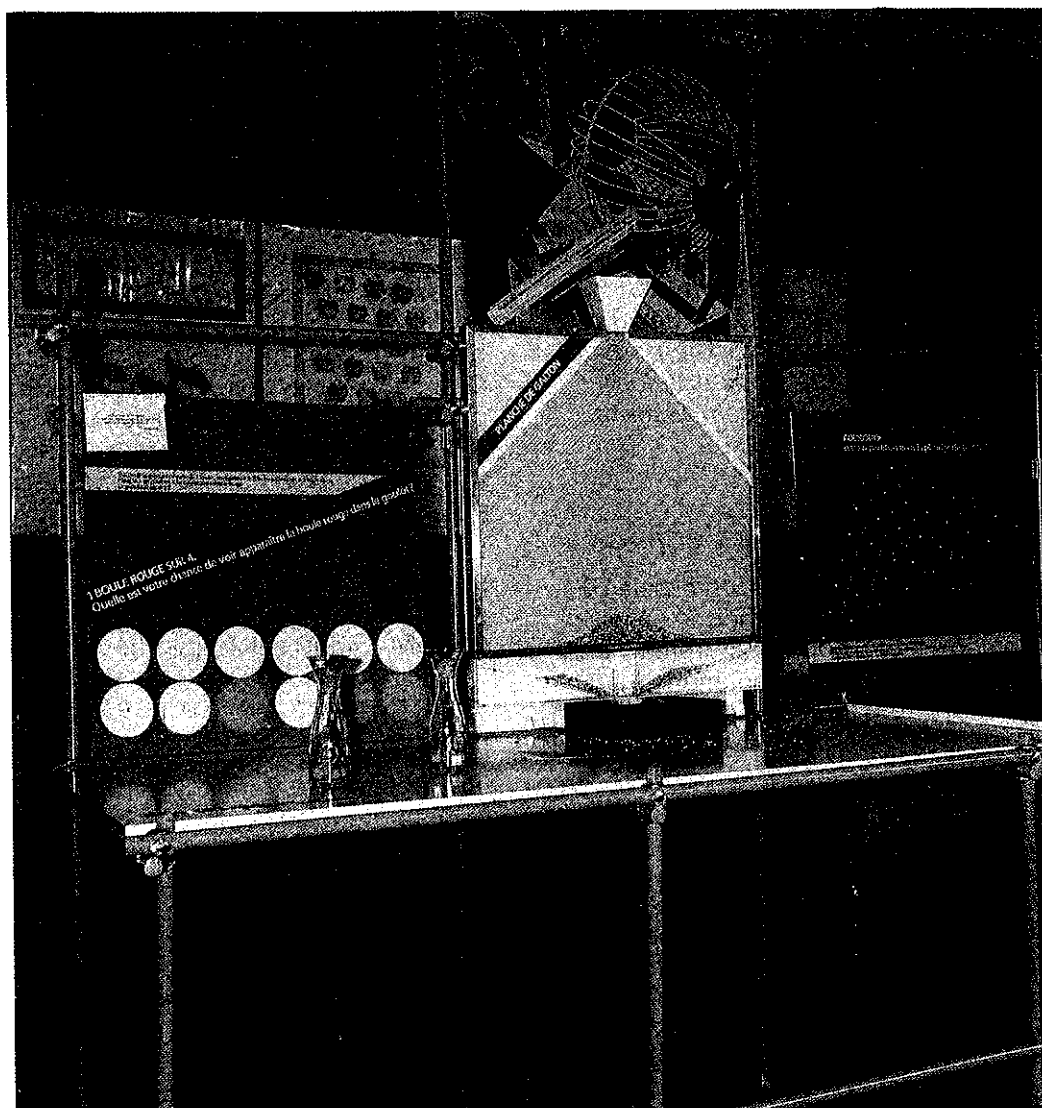
- Rapports, proportions, échelles
- Mesures, combinatoire
- Repérage par les coordonnées.



des CPPN
aux 18-25 ans

L'ESPACE VU PAR DES BAS NIVEAUX DE QUALIFICATION

L'outil qui est proposé ici permet de repérer et de faire repérer par des stagiaires leurs capacités à percevoir les relations entre des objets de l'espace et leurs représentations.



Il s'agit de "positionner les connaissances" d'un groupe de stagiaires de 18 à 25 ans, filles et garçons en stage pour un an à La Villette pour une formation à la maintenance d'exposition.

Le positionnement s'effectue par groupe de 3 ou 4 personnes ce qui permet la discussion et l'argumentation.

Pour des raisons d'économie de moyens et de temps nous n'aborderons que certains domaines de l'espace.

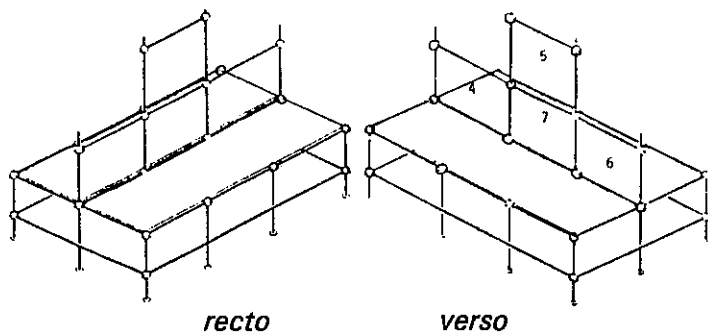
Par ailleurs, ce positionnement s'inscrit dans une dynamique d'apprentissage. Il ne doit pas être consi-

déré comme une photographie des savoirs des formés mais plutôt comme la première image d'une suite de séquences d'apprentissage.

1. Lectures de dessins perspectifs :

Le groupe de recherche ayant travaillé sur les expositions "Horizons Mathématiques" a choisi comme exemple concret : Comment remonter un kiosque de l'exposition ?

Le positionnement s'effectue par groupe de 3 ou 4 personnes ce qui permet la discussion et l'argumentation.



On leur présente le dessin en perspective d'un kiosque de l'exposition et on leur demande de le décrire : Comment est-il fait ? De quoi est-il fait ? Quels sont les différents éléments qui constituent le kiosque ? Après une première discussion sur les différents éléments, une question précise est posée : Combien y a-t-il de barres de taille moyenne (sachant qu'il y a 3 types de barres, des petites, des grandes et... des moyennes).

La nécessité de dénombrer permet de faire formuler les procédures de lecture du dessin, les problèmes posés par les parties cachées, la notion de devant-derrrière, la difficulté qu'ont les formés à se fixer un point de départ significatif et à le mémoriser plus de 5 secondes. On touche là, deux problèmes liés : le dénombrement et l'organisation des informations dans un contexte géométrique.

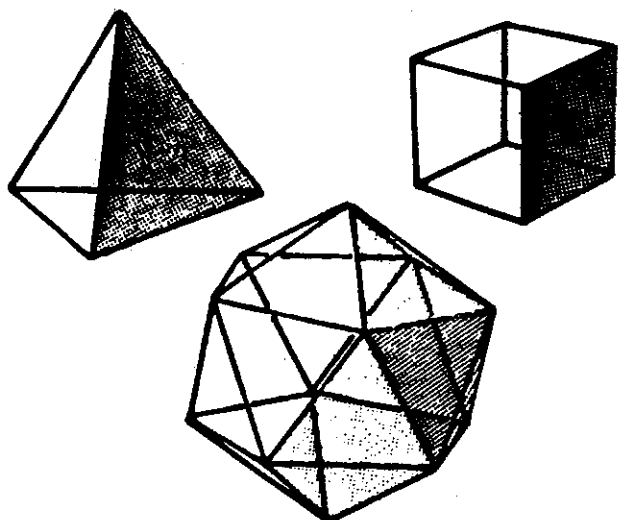
2. Structuration d'un objet de l'espace

A travers l'activité qui est proposée ici, on essaie de repérer les capacités des formés à mettre en évidence les relations entre faces, sommets, arêtes d'un objet représenté de 3 façons : représentations mentales, représentation par un objet, représentation sur écran.

a) l'objet concret

Un cube, ça a combien de faces ?
Question posée sans présenter l'objet.

Voici un objet (il s'agit d'un icosaèdre régulier) réalisé avec des triangles en carton (attachés les uns aux autres par des élastiques). (Toujours le Plot matériel !).



Combien y a-t-il de triangles à votre avis ?

1^{re} phase :

L'objet est montré mais n'est pas donné.

Formulation d'hypothèse : entre 15 et 30 faces.

2^e phase :

Vérifiez vos réponses.

On donne l'objet avec une contrainte donnée si besoin est : n'écrivez pas dessus (pour éviter le comptage). Les hypothèses s'affinent : entre 16 et... 19 en général.

La difficulté, pour les formés, est de considérer l'objet comme la réunion, le groupement d'objets plus simples.

b) l'objet sur écran

Présentation de polyèdres sur écran (faces arrières cachées).

Voici un autre polyèdre. Combien a-t-il de faces ?

On fait tourner le polyèdre sur lui-même suivant les axes X, Y ou Z et on présente dans l'ordre le cube, l'icosaèdre, le dodécaèdre, l'octaèdre et le tétraèdre.

Les quatre premiers apportent, en général, des réponses correctes qui font apparaître "l'effet miroir" de l'écran : les élèves comptent les faces visibles et multiplient par 2.

Ceci sera mis en évidence avec le tétraèdre qui, au départ, montre 3 de ses faces (réponse des stagiaires : 6 en tout) et qui, en le faisant tourner, n'en montrera que deux, d'où le problème de percevoir l'objet autrement que par effet miroir.

Un outil de vérification peut être donné à la fin de la séquence : faire apparaître les faces cachées en pointillés (logiciel utilisé "polyèdres" - CNAM - CREEM - Paris sur Apple II).

3. Organisation de l'espace

Une activité qui peut être réalisée en situation réelle ou, à l'échelle, en maquette avec du matériel Nathan : monter réellement un kiosque de l'exposition avec le matériel à disposition.

Bien que cette activité soit longue (1 heure minimum) elle a l'avantage d'être concrète et de faire intervenir deux types d'interactions entre variables didactiques :

- passage micro — méso-géométrie
- passage représentation — objet

D'autres éléments sont également révélateur de la prégnance de la symétrie sur d'autres transformations :

- La symétrie est très fortement présente sur le dessin.
- Pour construire le kiosque c'est l'aspect translation qui est, en fait, à utiliser en premier sinon le kiosque est difficile à monter et de toute façon tordu !
- Un troisième élément est aussi mis en évidence : la symétrie d'ordre 3 des rotules.

Par ailleurs le montage du kiosque, avec panneaux et tables demande une organisation, un algorithme de montage qui peut être étudié en fin de séquence (aspect organisation des données).

Même d'éminents directeurs d'Irem s'y sont faits prendre lors du montage de l'exposition "Horizons mathématiques"!!!

L'ESPACE VU PAR DES PROFS EN FORMATION

Les activités proposées ici visent :

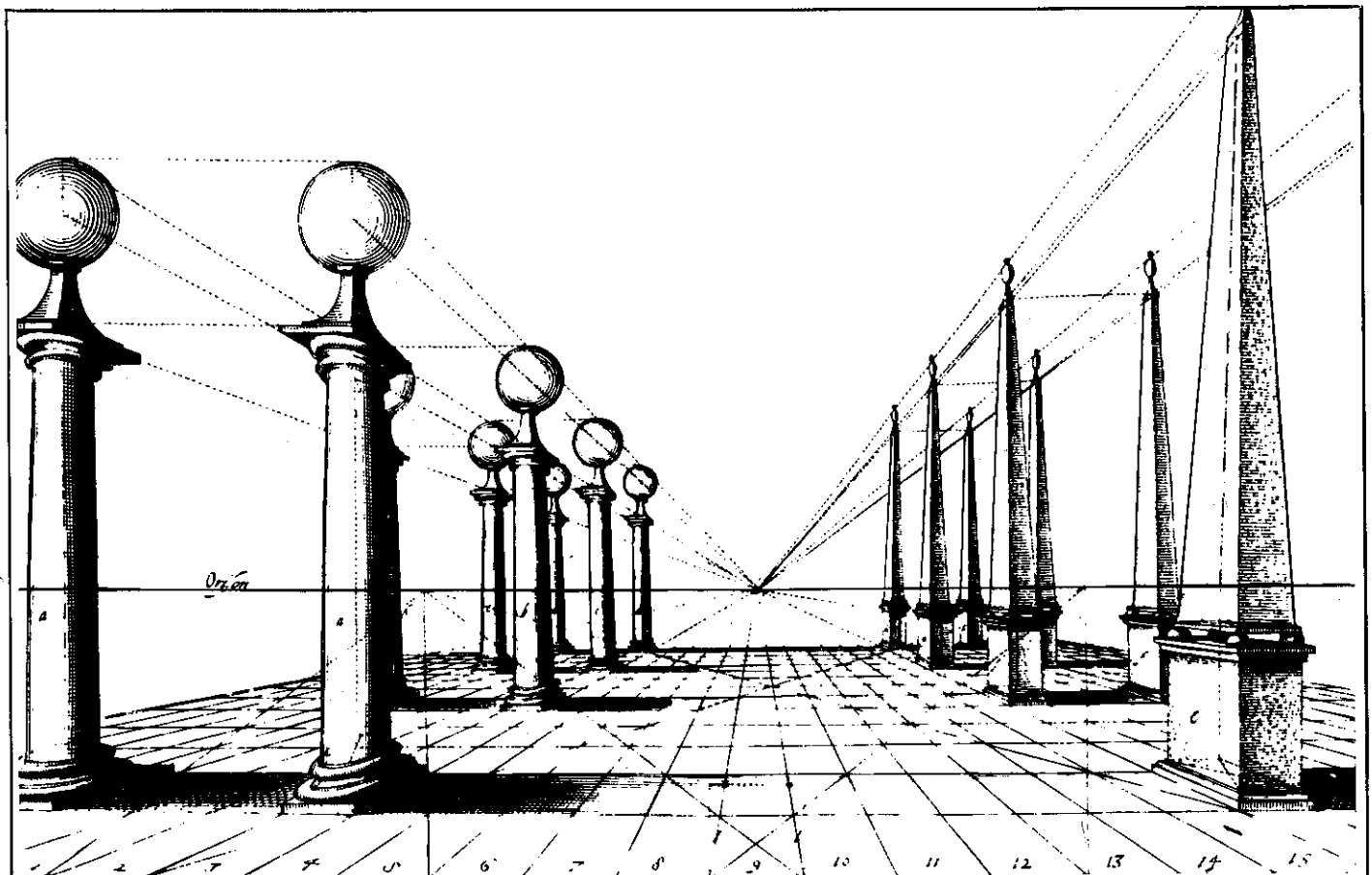
- à mettre en interaction trois types de représentations :
 - les représentations mentales
 - les représentations par dessin
 - la visualisation de l'objet ou d'une maquette.
- à lier le problème aux outils techniques qui doivent être utilisés pour réaliser l'objet.

On peut ainsi demander aux stagiaires de réaliser des polyèdres simples, cubes, tétraèdres... en utilisant :

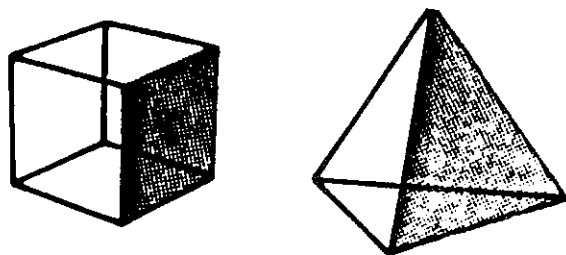
- des faces cartonnées assemblées par collage, scotchage ou élastique (cf. matériels polyèdres du PLOT)
- des patrons à réaliser et à coller (matériel IREM d'Orléans),
- des tubes-arêtes à associer à l'aide de nœuds en plastique ou par du fil ou de la gomme à mâcher;
- des plaques de plexiglas ou de bois.

Chaque matériau et chaque matériel va poser un problème technique particulier qui va prolonger l'étude et faire apparaître des caractéristiques supplémentaires de l'objet.

Ceci est particulièrement évident avec la découpe d'objets dans du polystyrène avec un fil-coupeur (matériel de l'IREM de Clermont-Ferrand).



CONSTRUIRE DES POLYEDRES



Publics :

Elèves, adultes ou... enseignants.

La consigne :

Construire, par groupe de 3 à 5 personnes, tous les polyèdres réguliers convexes.

L'objectif :

Comment s'assurer qu'on les a tous trouvés ?

Le matériel :

Des triangles, carrés, pentagones et hexagones réguliers en carton à assembler avec des élastiques (matériel diffusé par le PLOT-pochette n° 1).

1) Déroulement :

D'abord retrouver une *définition* correcte de "polyèdre régulier convexe". (cf. Dossier "Polyèdres dans l'espace du PLOT, page 10).

Polyèdre convexe fait de polygones réguliers tous isométriques deux à deux et, de plus, où tous les sommets sont identiques.

Cette dernière propriété apparaîtra lorsque les participants construiront des doubles tétraèdres ou autres deltaèdres.

La construction

Apparaissent rapidement le tétraèdre et le cube bien connus. Le dodécaèdre apparaît aussi et, plus difficilement, l'octaèdre et plus encore l'icosaèdre. On cherche aussi à construire des polyèdres avec des hexagones ! En laissant faire, on reste à plat ou, si l'on force pour fermer, on "gauchit" les faces.

Synthèse et preuve

Synthèse et preuve qu'ils ne sont que 5. On fait apparaître les propriétés et le codage - sommet.

On peut ici (pour la culture mathématique), parler de la dualité entre cube et octaèdre, dodécaèdre et icosaèdre. Parler de la formule d'Euler-Poincaré $F + S = A + 2$ (et de l'histoire de sa "démonstration").

Mais l'objectif est la preuve qu'ils sont 5 ! L'invariance des sommets pour chaque polyèdre a déjà été remarquée. De plus, autour d'un sommet on a pu mettre 3 (c'est le minimum), 4 et même 5 triangles pour obtenir le tétraèdre, l'octaèdre, l'icosaèdre.

Peut-on en mettre plus ? Réponse non, car avec 6 triangles on n'obtient pas un angle solide mais un plat $6 \times 60^\circ = 360^\circ$ et avec plus de 6 triangles on perd la convexité.

Et avec les carrés ! Même chose, avec 3 carrés autour d'un sommet on obtient le cube et avec 4 on "retombe" à plat, $4 \times 90^\circ = 360^\circ$.

Et avec les pentagones ? Idem. Avec 3 c'est le dodécaèdre, et avec 4 ? On obtient plus de 360° ! Sûr ? Quel est l'angle au sommet d'un pentagone ?

La réponse est ici le plus souvent 72° pour l'angle au sommet. Intéressant car $72^\circ \times 4 = 288^\circ$ qui est inférieur à 360° ! Alors on en aurait oublié un ? On vérifie que 4 pentagones partant d'un même sommet ça gauchit fortement.

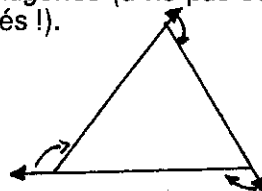
Alors ? C'est pas 72° ? Oui, mais alors, c'est combien ? Et comment trouver d'une façon générale l'angle au sommet d'un polygone régulier à n sommets ?

Diverses méthodes sont proposées qui sont correctes. On pourra introduire ici la méthode de la Tortue (Langage Logo) qui conduit au théorème du trajet total. Cela consiste à répéter la suite des instructions :

AVance, tourne à DRoite de x degrés, qui permet de tracer la figure en faisant un tour complet sur soi-même d'où l'angle supplémentaire de l'angle cherché : $\frac{360^\circ}{n}$ et d'où l'angle cherché (ici $180^\circ - \frac{360^\circ}{5}$).

Et pour finir, retour aux pentagones : $180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$ et $4 \times 108^\circ = 432^\circ$ qui est supérieur à 360° (ouf !);

Reste les hexagones (à ne pas oublier, surtout s'ils ont été utilisés !).



Pas de problèmes : $3 \times 120^\circ = 360^\circ$ d'où le pavage plan. Et, au-dessus, l'angle au sommet sera supérieur à 120° donc pas de polyèdres convexes réguliers avec des n-gones pour $n \geq 6$.

Cette activité, bien qu'un peu longue, permet surtout de structurer quelques objets de l'espace, mais aussi de construire, pour bien des jeunes et des moins jeunes, et parfois pour la 1^{re} fois, les 5 polyèdres réguliers.

La construction, le dénombrement des sommets et des arêtes, la régularité des sommets permettent cette structuration. On remarque aussi que l'octaèdre est constitué de 2 pyramides, l'icosaèdre de 2 pyramides collées sur un antiprisme à bases pentagonales et le dodécaèdre fait de deux parties isométriques légèrement (à préciser) tournées l'une par rapport à l'autre.

Elle permet aussi, ce qui n'est pas négligeable, de repenser concrètement des angles.

Elle permettra, surtout pour les autres activités dans l'espace, de partir d'objets concrets comme le tétraèdre ou le cube en en ayant déjà manipulés.

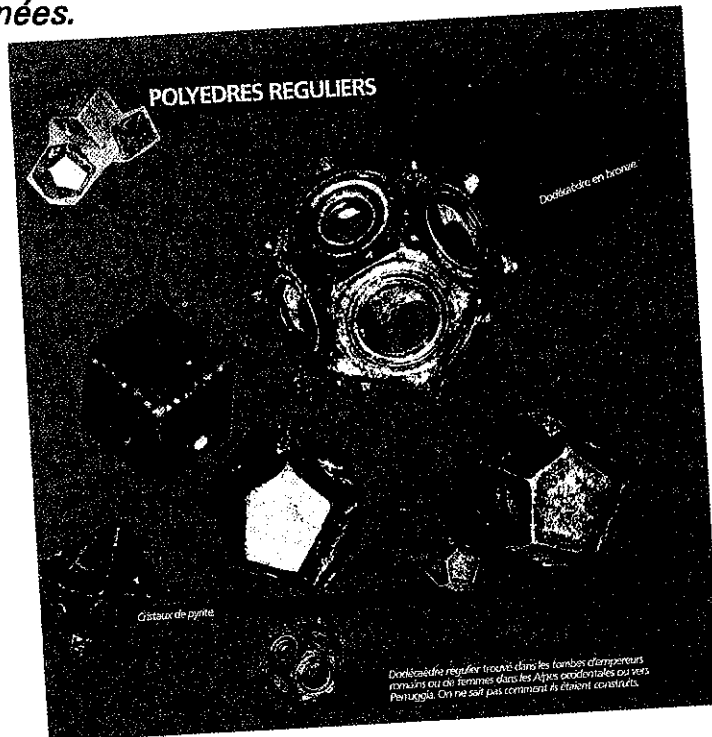
Combien d'enseignants ont déjà construits ou découpés les cinq polyèdres réguliers ?

Remarque : Cette activité, peut être faite avec d'autres règles pour ceux qui connaissent déjà bien les cinq solides de Platon. Par exemple, en demandant d'essayer de construire des polyèdres à partir de codes-sommets (4,4,4) (5,5,5) ou (4,6,6) ou... (4,5,6) ou de graphes planaires.

	Faces	Nombre	Sommets	Arêtes	Code-sommet
Tétraèdre régulier	triangles	4	4	6	3-3-3
Cube	carrés	6	8	12	4-4-4
Octaèdre régulier	triangles	8	6	12	3-3-3-3
Dodécaèdre (régulier)	pentagones	12	20	30	5-5-5
Icosaèdre (régulier)	triangles	20	12	30	3-3-3-3-3

SYMETRIES DES POLYEDRES

Là encore, une activité qui demande peu de matériel mais qui commence à faire faire aux participants la navette entre l'objet concret et ses représentations mentales ou dessinées.



Consigne :

Dresser la liste des isométries qui "conservent" le tétraèdre régulier, le cube.

L'objectif :

Une autre façon de voir les objets de l'espace, par leurs invariants. Une occasion de parler d'angles de l'espace et de mesures.

Le matériel :

Des tétraèdres et des cubes fabriqués précédemment.

Le déroulement pour le tétraèdre :

Une recherche exhaustive de toutes les rotations et symétries-plans permet de trouver 18 isométries que l'on peut décrire directement. Ce dénombrement se fait en utilisant le nombre de sommets, d'arêtes et faces du polyèdre. Restent six isométries à trouver pour obtenir les $24 = 4!$ permutations des quatre sommets. Elles s'obtiennent en composant chacune des six symétries planes avec une rotation.

Idem pour le cube où l'on obtient 48 isométries dont 24 rotations et 24 antidéplacements.


Ce travail permet en particulier de définir des angles de l'espace. Les moins évidents étant les angles de rotation du cube d'axes passant par les sommets diamétralement opposés. Il permet une fois encore de structurer les objets de l'espace, le repérage des isométries n'étant pas toujours immédiat.

Prolongement :

Il consistera à renverser la consigne : partir d'un groupe d'isométries et rechercher une figure plane ou de l'espace qui lui corresponde. Par exemple, trouver une figure correspondant à un groupe d'inva-

riants ayant deux éléments, trois éléments, quatre éléments (groupe de Klein et groupe cyclique), huit éléments. On aura là une autre façon de structurer les objets du plan et de l'espace.

D'où le tableau à compléter :

Groupe à	Dans le plan	Dans l'espace
2 éléments	?	?
3 éléments	?	?
4 éléments (groupe de Klein)	?	?
4 éléments (groupe cyclique)	?	?
X éléments	<input type="checkbox"/> Le carré	??
Y éléments (le groupe du matelas)	??	

et inversement, pour les quadrilatères, les hexaèdres, quels sont les différents groupes de symétrie ?

On sera ici conduit à dresser la liste des différents types de quadrilatères, d'hexaèdres en fonction de leurs "symétries", c'est-à-dire des isométries qui les laissent invariants.

On travaille ici sur les représentations de classes d'objets et sur les actions sur ces classes d'objets. (Il y a sept types d'hexaèdres - cf. dossier PLOT "polyèdres dans l'espace" éd. 87).

ACTIVITES DE DECOUPE ET PROBLEMES-

CHOCS!

Une activité que Charles Pérol a su développer dans de nombreux pays
(cf. les fascicules "filicoupeurs" de l'Irem de Clermont-Ferrand).
Ici, de la pollution théorique à l'objet réel !

On montre le fonctionnement du filicoupeur.
On distribue une boule irrégulière de polystyrène par
groupe et on demande à chaque groupe :

de construire :

- 1) un tétraèdre régulier
- 2) un tétraèdre dont les 4 faces sont des triangles ni isocèles ni équilatéraux mais qui sont tous les 4 identiques (on dit scalènes et isométriques),
- 3) l'objet constitué d'un tétraèdre régulier et de son symétrique par rapport au centre de gravité.

Chacune de ces constructions présentent des problèmes qui vont mettre en jeu la capacité des formés à utiliser l'outil technologique et à trouver des solutions mettant en relation les propriétés, les régularités de l'objet et les possibilités de l'outil.

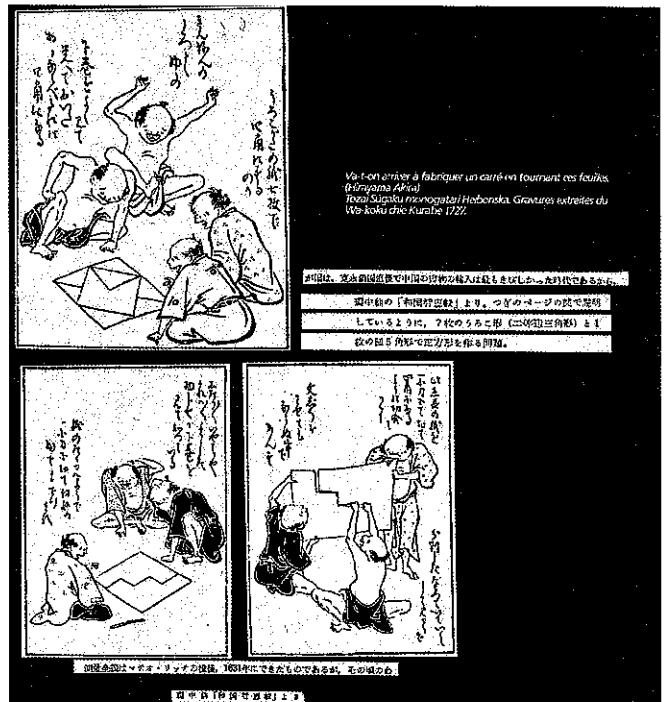
La résolution du problème pourra aller jusqu'à nécessiter des calculs trigonométriques si les formés peuvent les mettre en œuvre.

Là encore chacun verra le saut qu'il y a entre la solution sur papier et la solution découpée.

de couper

- un tétraèdre régulier en 2 parties isométriques sans passer par un plan de symétrie ! ■

- un cube ou une pomme en 2 parties isométriques sans passer par un plan de symétrie,
- idem avec... 3 parties isométriques !! etc.



MATHS EN CROIX

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
I									■
II			■	■					
III					■	■			
IV			■	■					■
V			■						
VI			■			■			
VII	■		■						
VIII					■				

DEFINITIONS

Horizontalement

- I - Type d'équation différentielle.
- II - Élément naturel - Non acquis.
- III - De droite à gauche : peut qualifier un mathématicien à l'âge respectable - Au centre du sinus.
- IV - Démonstratif - Type de connexité.
- V - Communes à Hahn et à Hardy - Parallèles... en architecture.
- VI - Voyelles de Bolyai - Conjonction logique - De droite à gauche : permet de définir une relation.
- VII - Préparera peut-être un examen.
- VIII - Tel un plan par une droite, par exemple - A la forme d'une lettre.

Verticalement

1. S'est préoccupé d'existence et d'unicité d'équations différentielles.
2. Qualifie certaines équations différentielles.
3. Unités - Préposition.
4. Vigueur, mathématique ou non.
5. Type d'équations différentielles.
6. Unité de temps - Lettre double de Serret - Pronom.
7. Problèmes qui se posent pour les solutions d'équations différentielles.
8. Éléments de produits tensoriels.
9. Appris - Base à réordonner.

R. LABROUSSE - Limoges

ASSEMBLAGES DANS L'ESPACE

Michel BLANC - Nice

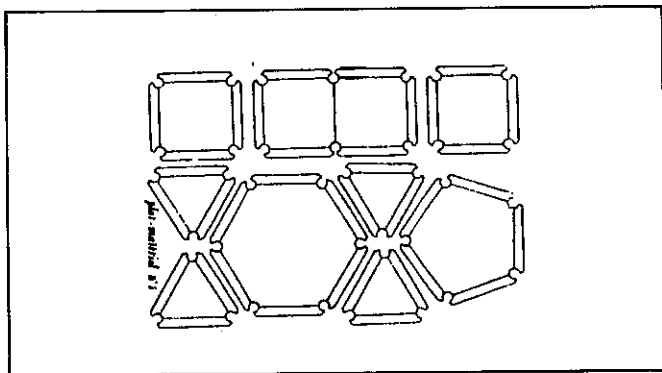
L'auteur propose à des élèves du C.E. de :
Assembler des formes planes (polygones) pour constituer des solides.
Se rendre compte de conditions portant sur les formes planes permettant la construction (problèmes liés aux angles et aux longueurs).
Assembler plusieurs solides pour en construire un autre.

Matériel

Le matériel que nous utiliserons se compose de polygones réguliers : triangle équilatéral, carré, pentagone et hexagone réguliers. Ce matériel est disponible dans le commerce dans un matériau plastique ou en carton, les assemblages se font à l'aide d'élastiques qui maintiennent accolées les languettes dont sont munis les polygones.

On peut se procurer le matériel en carton en s'adressant à APMEP d'Orléans-Tours (voir bon de commande page 48). La pochette de 20 feuilles comportant chacune les polygones ci-contre ; il faut compter une pochette pour 5 à 6 enfants.

Il faut également prévoir une réserve de bracelets élastiques pour l'assemblage.



Activités

1. Découverte du matériel

Les enfants sont par groupes de 4 ; chaque groupe reçoit une quinzaine de feuilles du matériel, dégage les polygones de leur support et les classe dans des boîtes ; celles-ci constitueront la réserve de matériel pour toute l'équipe.

Il s'agit maintenant de se familiariser avec le mode d'assemblage ; pour cela chaque équipe est invitée à réaliser plusieurs productions simples et familières aux enfants : cube, maison avec un toit à 2 ou à 4 pentes, éventuellement une pyramide à base carrée.

2. Construction de solides selon des critères géométriques

Activité 1

Chaque équipe de 4 enfants doit construire les cinq solides dont le maître a écrit la composition au tableau :

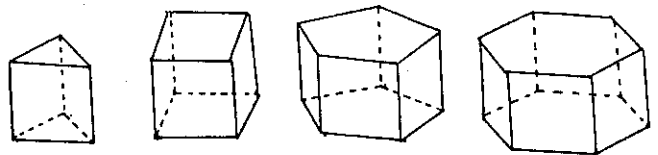
- solide 1 : 4 triangles
- solide 2 : 1 pentagone et 5 triangles
- solide 3 : 2 hexagones et 3 « double-carrés »
- solide 4 : 3 « double-carrés »
- solide 5 : 1 hexagone et 6 triangles

Il s'agit donc de construire respectivement un tétraèdre régulier, une pyramide à base pentagonale, un prisme droit à base hexagonale, un cube ; le cinquième solide est totalement aplati puisque les six triangles équilatéraux recouvrent exactement l'hexagone régulier.

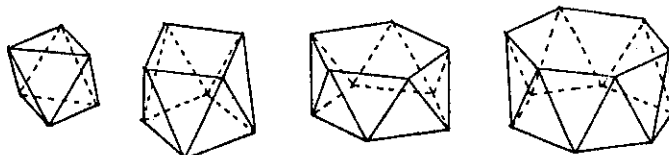
La mise en commun permet de dégager que cet assemblage n'est pas un solide et de commencer à réaliser que certaines conditions doivent être respectées pour aboutir à un solide.

Activité 2

Il s'agit de construire des solides appartenant tous à une même famille comme les pyramides, les prismes, les antiprismes (solides analogues aux prismes mais dont la ceinture latérale est constituée par des triangles placés alternativement tête-bêche), les polyèdres réguliers (solides dont toutes les faces sont identiques à un même polygone régulier disposées de manière identique en chaque sommet), etc.



prismes



antiprismes

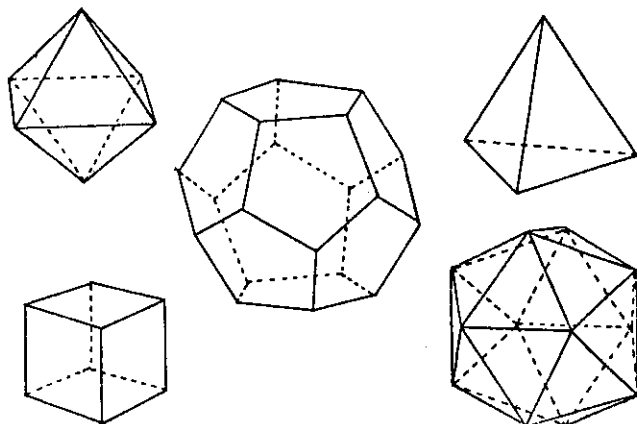
Pour cette activité, chaque groupe d'enfants reprend le solide n° 3 (prisme à base hexagonale) construit dans l'activité 1. Le maître fera constater la constitution du solide sous forme d'une ceinture de carrés entourant deux polygones identiques. La question est alors posée d'essayer de construire d'autres solides du même genre ; une mise en commun préalable permet de recenser les idées des enfants sur ce qu'il est possible de faire varier : les polygones constituant les deux bases ou les polygones constituant la ceinture.

Une première étape consiste à changer de polygone de base ; chaque équipe est invitée à construire les trois solides possibles compte tenu du matériel.

La question peut être posée d'essayer de fabriquer les polygones de bases ayant plus de six côtés ; au niveau d'un CE2 cette construction peut être au départ relativement empirique, une ceinture ayant été constituée avec 7 ou 8 carrés les enfants la posent sur une feuille de papier blanc et par tâtonnement essayent de lui donner une configuration régulière, il ne reste plus alors qu'à pointer les sommets sur le papier puis à tracer et à découper un gabarit ; les productions des différentes équipes seront comparées par superposition, par pliage pour déterminer celles qui sont les plus adéquates (ce type de validation est suffisant pour un CE2).

La deuxième étape consiste à changer de polygone de ceinture et donc à rechercher un autre assemblage de polygones identiques fournissant une bande à bords parallèles comme c'est le cas avec les carrés ; parmi les polygones disponibles seuls les triangles équilatéraux le permettent. Le problème est donc posé d'abord de chercher si on peut réaliser une bande à bords parallèles avec les triangles, avec les pentagones, avec les hexagones, puis de déterminer le nombre de triangles nécessaires pour une base pentagonale, carrée, hexagonale, triangulaire. Les enfants constateront que ce nombre est le double du nombre de côtés du polygone de base ou encore égal à la somme du nombre de côtés et du nombre de sommets de ce même polygone ; la seconde interprétation est davantage liée au mode de construction des antiprismes à partir d'une ceinture alors que la première est plus liée à une dissociation de la ceinture en deux parties : l'une attachée au polygone supérieur, l'autre au polygone inférieur ; cette deuxième interprétation sera reprise ultérieurement car elle permet aussi des constructions de polygones comme le dodécaèdre (12 faces pentagonales régulières) ou le cube.

Un premier retour peut être fait sur les solides de l'activité 1, retrouve-t-on parmi ces solides des prismes ou des antiprismes ? Le cube (solide 4) a donc été construit selon deux conceptions. Un deuxième retour peut conduire à s'intéresser à d'autres propriétés communes à certains solides de l'activité 1. Le cube est constitué uniquement de carrés, le tétraèdre uniquement de triangles. Ils appartiennent à la famille des polyèdres réguliers, appelés également solides de Platon.



les cinq solides de Platon

Activité 3

Il s'agit de rechercher différentes façons de construire un cube à l'aide du matériel. Entre 6 carrés et 3 « double-carrés » toutes les combinaisons sont possibles. Parmi les différentes possibilités on recherchera celles qui permettent de décomposer le cube en deux assemblages identiques ; ceux-ci comportent nécessairement 3 carrés chacun, de ce fait il n'y a que deux possibilités :



On peut noter que ces deux décompositions correspondent à deux façons de tenir le cube : soit avec deux doigts reposant sur deux sommets diagonalement opposés, soit avec deux doigts de chaque main enserrant chacune un couple de faces opposées.

Parmi les solides déjà rencontrés et construits, en existe-t-il qui soit décomposable de façon similaire ? Le tétraèdre est décomposable en deux couples de deux triangles reliés par un côté ; le prisme à base hexagonale est décomposable de deux façons alors que cela n'est évidemment pas possible pour les prismes comportant un nombre impair de faces latérales. Tous les antiprismes sont facilement décomposables en deux parties identiques en laissant attachés à chaque base les triangles qui lui sont reliés par un côté.

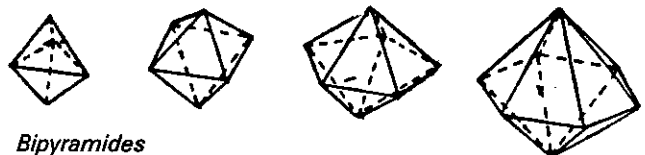
En prolongement de cette activité on peut construire le dodécaèdre à partir de deux « coques » constituées par cinq pentagones ceinturant un autre pentagone. La construction de la première coque sera guidée par le maître.

Activité 4

Elle consiste à construire de nouveaux solides en assemblant d'autres solides déjà construits.

De cette manière on peut obtenir des solides complexes, en particulier non convexes, et on favorise ainsi l'analyse ultérieure de solides complexes comme composés de solides simples.

Chaque équipe construit en grand nombre des pyramides à base triangulaire, carrée, pentagonale, des cubes, des prismes et antiprismes, un dodécaèdre. Une première étape consiste à rechercher des solides composés à l'aide de deux autres solides d'abord identiques puis différents ; dans le premier cas ce sont les pyramides qui fournissent les solides les plus intéressants car constitués, en fait, uniquement par des triangles équilatéraux. Une fois le solide envisagé on pourra supprimer les deux bases de la pyramide qui sont superposées, on obtient une bipyramide. Une deuxième étape consiste à recouvrir par des pyramides identiques toutes les faces d'un solide régulier comme le cube ou de dodécaèdre, ou bien les deux bases d'un prisme ou d'un antiprisme.



Bipyramides

Dans les deux cas on pourra rechercher si parmi les solides construits figurent des polyèdres réguliers : on en trouvera deux : l'octaèdre (8 triangles équilatéraux) obtenu à partir de deux pyramides à base carrée et l'icosaèdre (20 triangles équilatéraux) obtenu à partir d'un antiprisme et de deux pyramides à base pentagonale.

Une troisième étape consiste à ne plus limiter le nombre de solides à assembler et à laisser les enfants donner libre cours à leur imagination pour constituer des solides tout à fait fantastiques ! ■

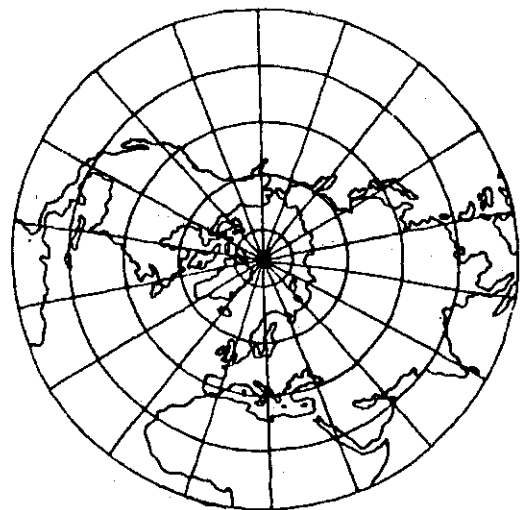
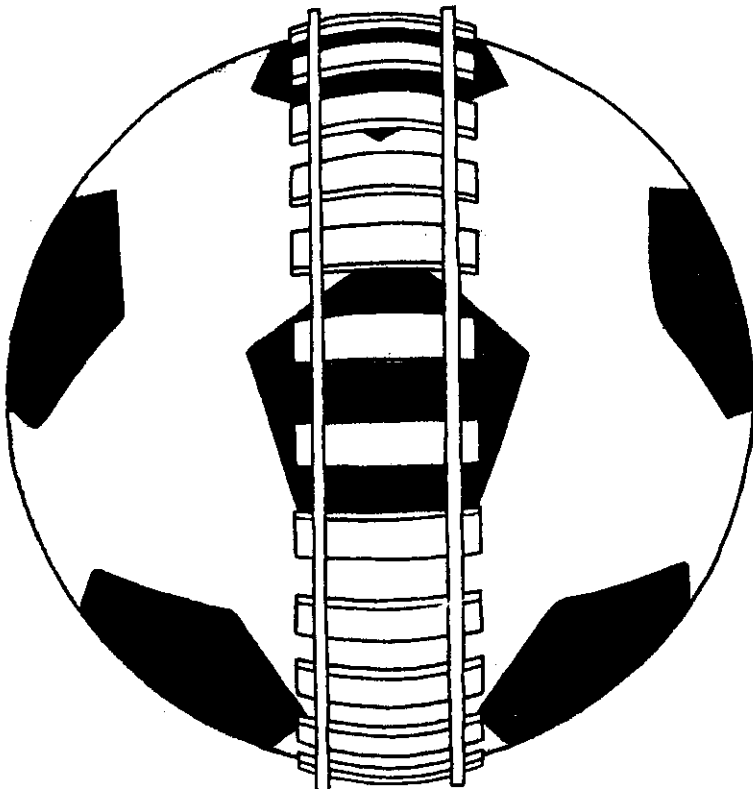
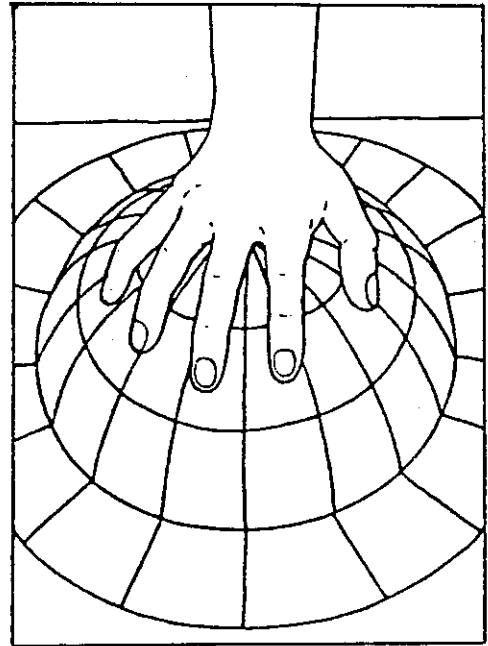
GEOMETRIE DE LA SPHERE

TOUT DEPEND DE LA HAUTEUR A LAQUELLE ON SE PLACE

Les axiomes d'Euclide et propriétés de la géométrie euclidienne sont, en partie, remis en cause sur la sphère.

Il n'est pour s'en convaincre que d'essayer d'aplatir une peau d'orange.

De nombreuses activités peuvent être proposées pour remettre en cause les savoirs de la géométrie euclidienne de la feuille de papier. En voici quelques-unes.



D'abord la NOTION DE DISTANCE

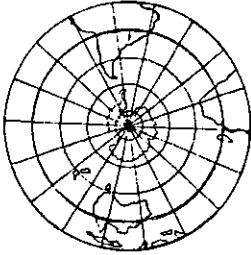
Observez un globe terrestre : repérez Paris, Montréal.
Quelle est la courbe de plus petite distance reliant Paris à Montréal ?

Toute courbe de plus courte distance joignant deux points a, comme support, une géodésique qui, pour la sphère, est un GRAND CERCLE.

Ainsi un triangle sphérique a pour côtés des arcs de grands cercles. Qu'est-ce que deux "droites" parallèles sur une sphère ?

Problème-choc

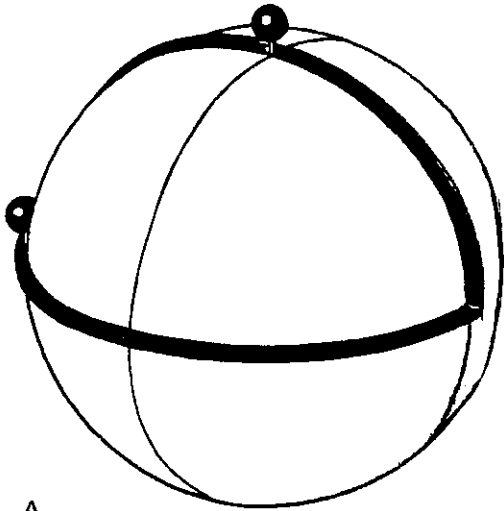
Un ours part du pôle et parcourt x kilomètres droit devant lui, il tourne de 90° à droite et parcourt à nouveau x km droit devant lui, tourne encore de 90° à droite parcourt encore x km droit devant lui et se retrouve... à son point de départ ! L'ours est-il blanc ou brun ?



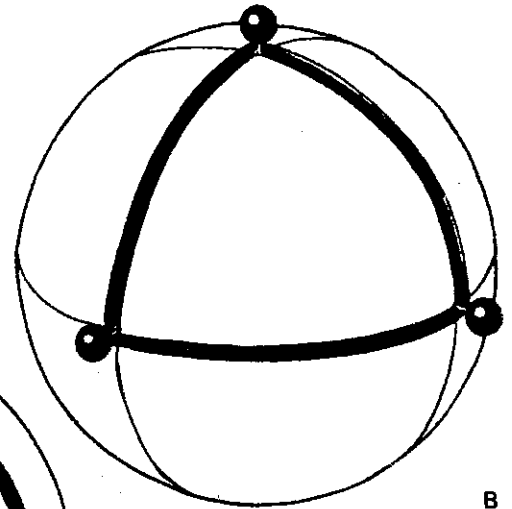
Combien y a-t-il de points de départ possible ?

Vous trouverez trois familles de points :

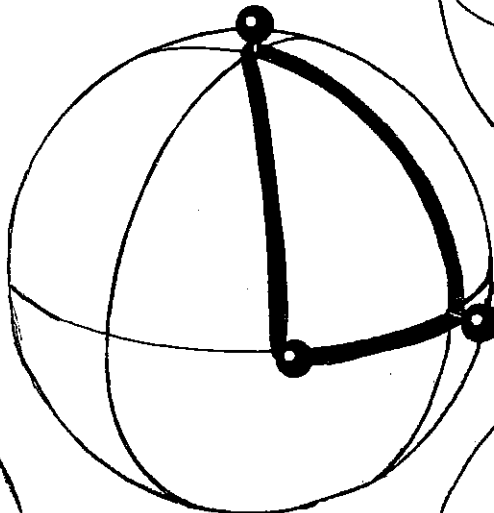
- Ceux qui réalisent effectivement un triangle sphérique ayant 3... angles droits.
- Ceux qui sont à une distance de x km d'un parallèle faisant lui-même x km.
- Ceux qui sont à une distance de x km d'un parallèle faisant x/n km, n entier.



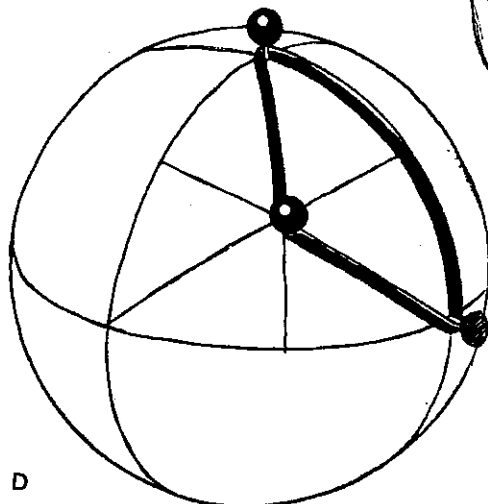
A



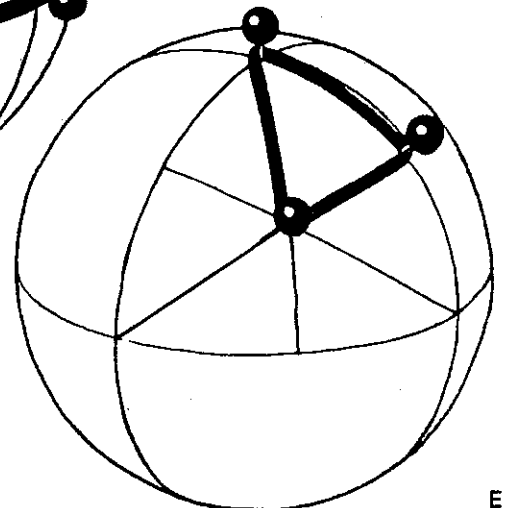
B



C



D



E

"Activité choc :"

Angles et aires de triangles sur une sphère

Matériel :

- On distribue des sphères en plastique (boules de pétanque vides) ou en polystyrène.
- Des élastiques qui matérialiseront les "droites".
- Des punaises à têtes coniques ou sphériques qui seront les points.

1^{re} activité :

Une droite partage un plan en deux régions. Il en est de même d'une "droite" (grand cercle) sur une sphère. Multipliez les droites. Quel est le nombre maximum de régions qu'elles déterminent ? (On verra apparaître deux suites différentes).

2^e activité :

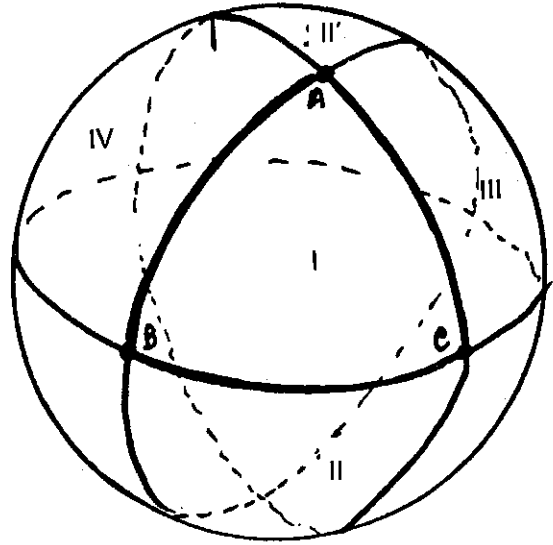
Tracez un triangle équilatéral ayant 3 angles droits. Peut-on recouvrir la sphère avec de tels triangles ? Combien en faut-il ?

Composez la somme des angles et l'aire d'autres triangles sphériques pouvant recouvrir la sphère par reproduction (On remarquera que $(\sum \alpha - \pi) \times n = 4\pi R^2$, n étant le nombre de triangles et R le rayon de la sphère).

Une démonstration générale peut être donnée reliant l'aire du triangle et la somme des angles (mesurés en radian) : $a = \sum \alpha - \pi$. (la sphère ayant pour aire 1, l'unité).

Nombre de triangles isométriques	2	4	8	16	24	48	...
α, β, γ							
$\Sigma\alpha$							
$\Sigma\alpha - \pi$							
Cas général							

• la courbure du plan est nulle, comme tout ce qui peut être aplati sans plissage ni déchirure (ainsi les surfaces réglées développables) ;



Pour la sphère d'aire l'unité, les angles étant mesurés en radian :

$$\text{aire (I + II)} = 2 \hat{A}$$

$$\text{aire (I + III)} = 2 \hat{B}$$

$$\text{aire (I + IV)} = 2 \hat{C}$$

$$\text{aire (3I + II + III + IV)} = 2(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C})$$

par symétrie $II = II'$ donc

$$I + II + III + IV = I + II' + III + IV = 2\pi (4\pi/2)$$

d'où

$$\text{aire (2I)} + 2\pi = 2(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C})$$

donc

$$\text{aire (ABC)} = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi$$

Problème de courbure

Bibliographie :

• Mosaïque Mathématique. Article de Berger sur la courbure (voir bon de commande).

• J. P. Petit : le géométricon : B.D. de chez Belin.

- La différence entre le plan et la sphère est due aux courbures différentes des deux surfaces :

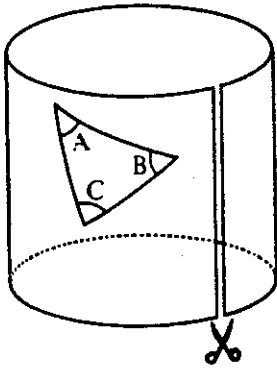
• la courbure de la sphère est positive.

La courbure se définit en tout point d'une surface, s'il existe un voisinage du point où tout triangle contenant le point vérifie :

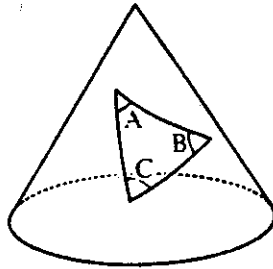
$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi = 0$, La courbure en ce point est nulle, elle est positive si cette expression est positive, et négative si $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi < 0$. ■

Trouvez le signe de la courbure en tout point :

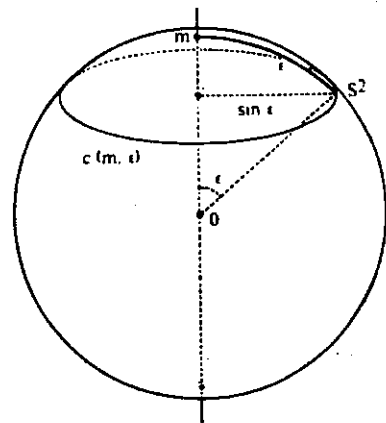
d'un cylindre



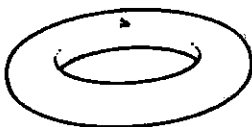
d'un cône



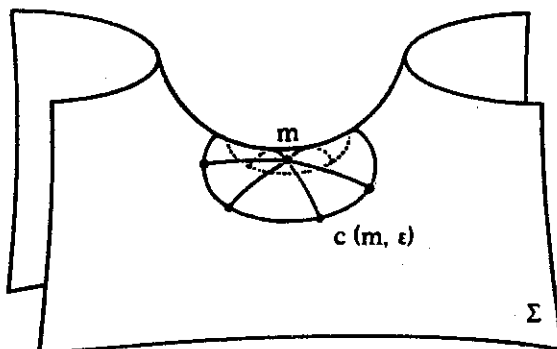
d'une calotte sphérique, à l'extérieur, à l'intérieur !

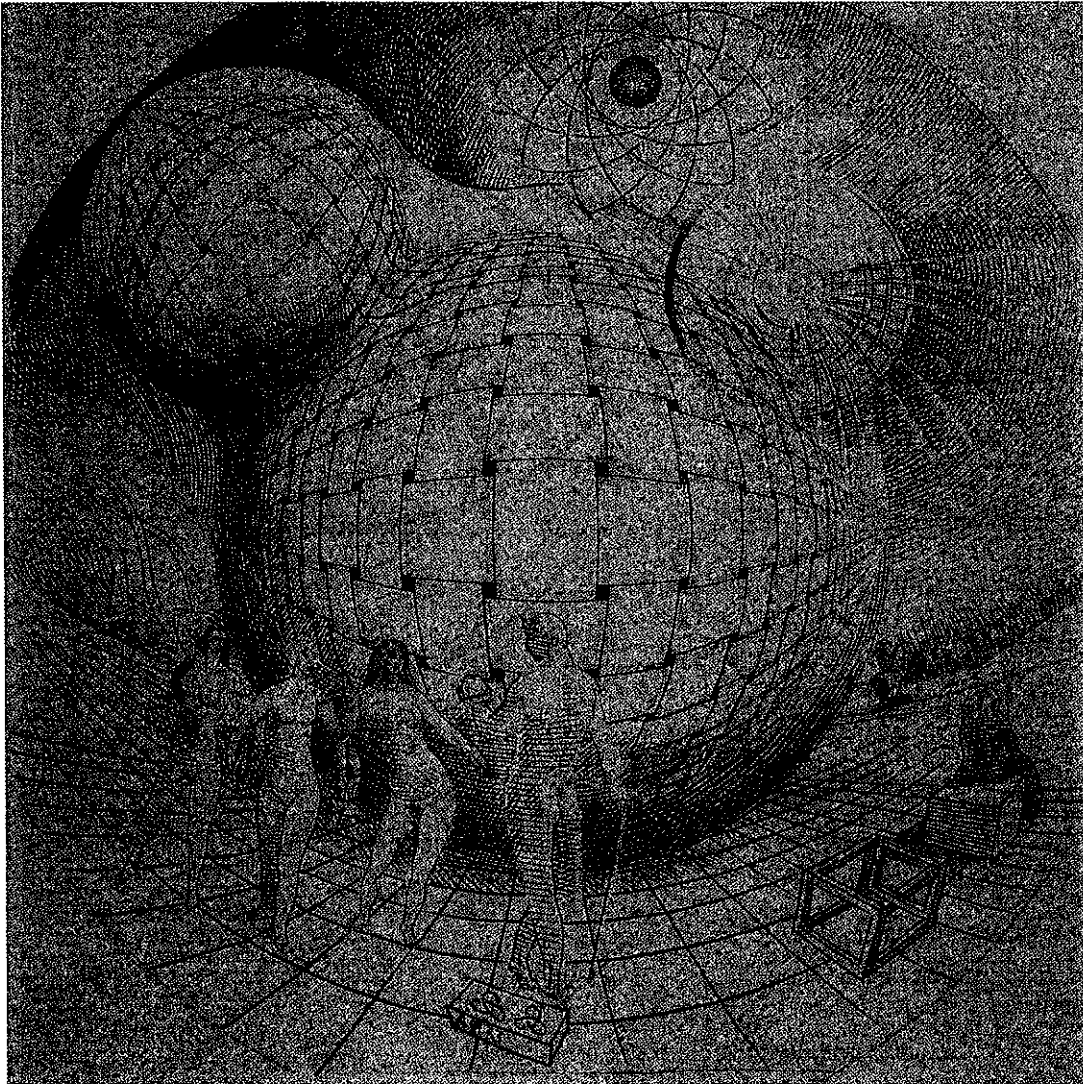


d'un tore

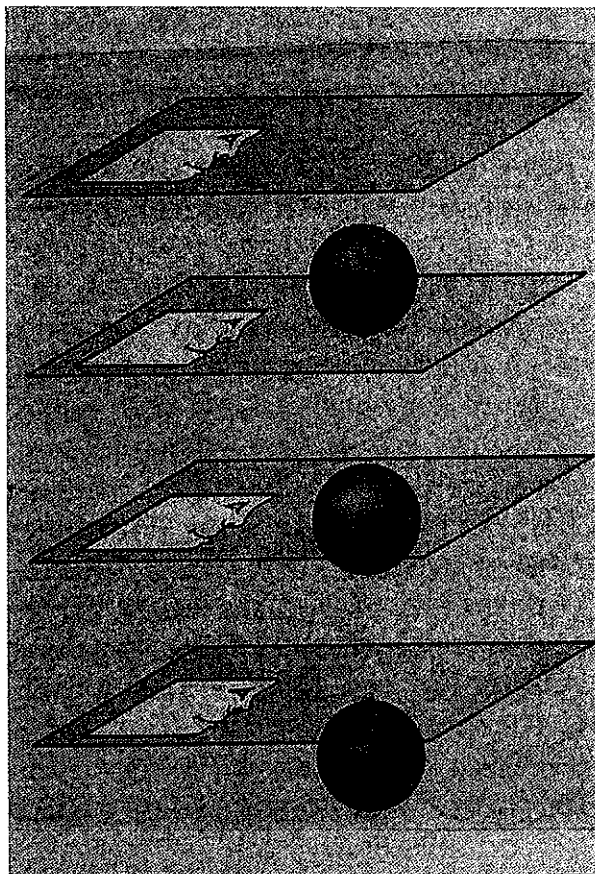


d'une selle de cheval, ou col entre deux montagnes

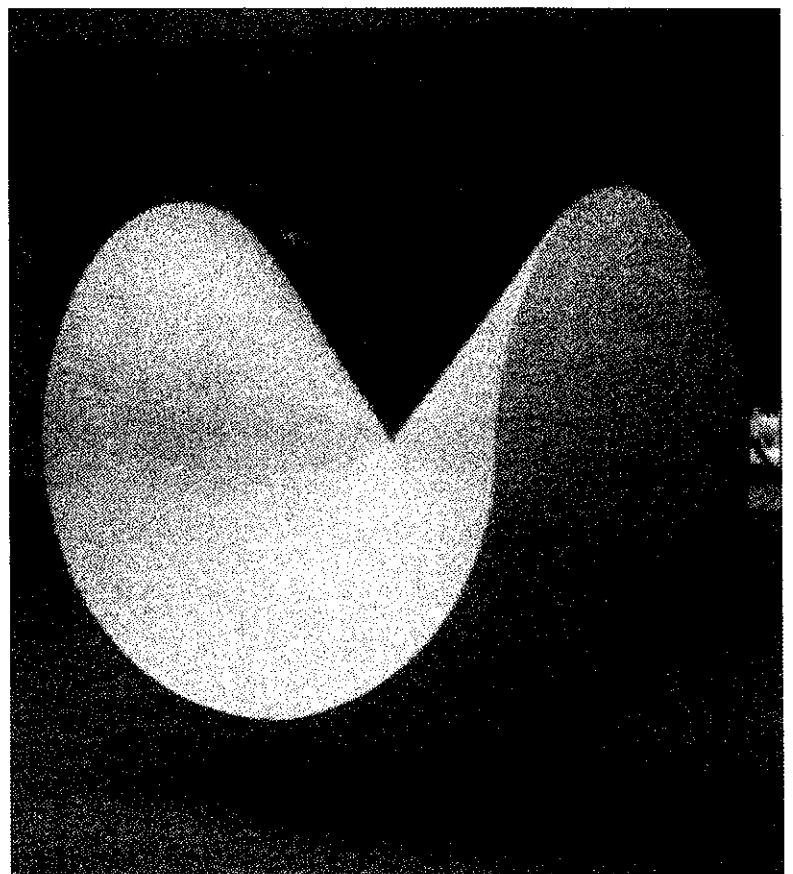




Sphère - Albert Flocon



*Passage d'une sphère
dans un monde de dimension 2*

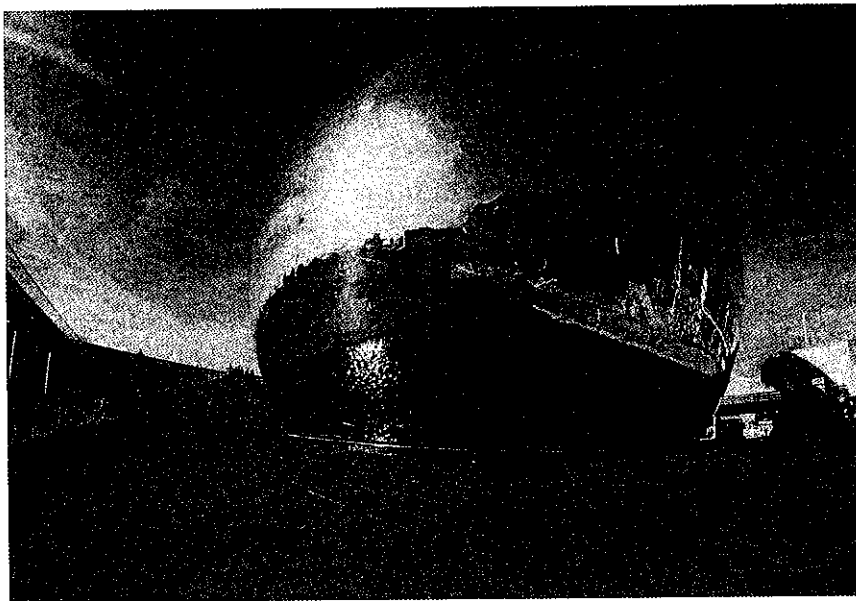


*Découpe d'une sphère en 2 parties symétriques
A. Volton - 1968*

FAITES VOTRE MINI-GEODE

Raoul RABA - AndréSy

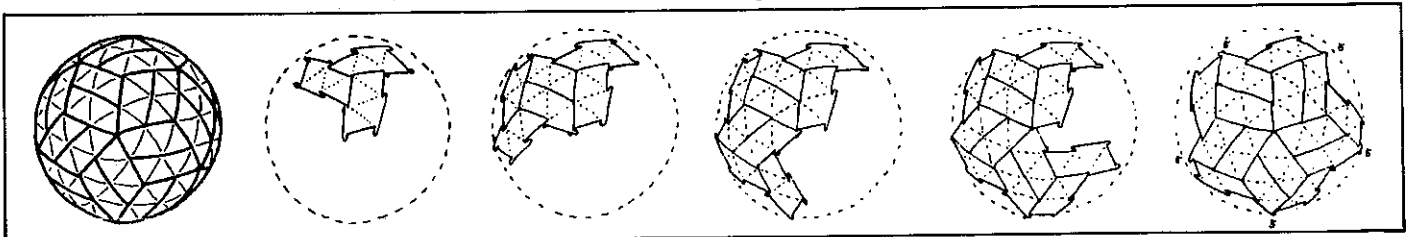
- Construisez vous-même la GEODE de la Cité des Sciences et de l'Industrie de la Villette*
- *Voici des éléments qui vont vous permettre de réaliser une sphère géodésique.*
 - *Une MINI GEODE conçue selon le même principe que la GEODE de la Villette, et qui vous permettra de mieux comprendre comment la courbure d'une sphère peut être obtenue à partir de triangles... plans.*



- La MINI GEODE est composée de 240 triangles groupés par 4 sur une plaque.
- Nous avons donc 60 plaques qui sont en fait les pièces d'un puzzle sphérique.
- Le montage se réalise sans colle, ni aucun moyen de fixation annexe.

- Il se fait uniquement par accrochage, grâce à la découpe du contour des éléments.
- La logique de ces accrochages vous conduira à effectuer une procédure mathématique et à comprendre, par le biais d'une activité manuelle, les groupes de transformations qui correspondent à ce pavage géodésique de la sphère.

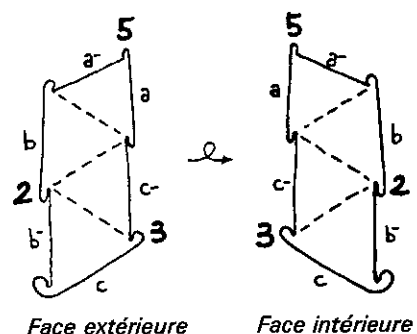
La MINI GEODE et le film du montage des premiers éléments.



Montage de la MINI GEODE

Attention : il faut toujours que les éléments à accrocher montrent la même face et que l'accrochage soit fait du côté de cette face.

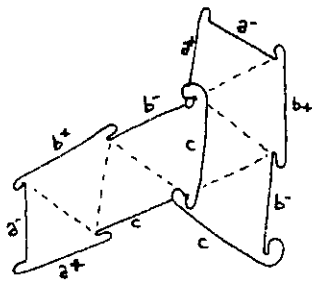
Ici, nous allons toujours faire l'accrochage du côté de la face intérieure et nous allons respecter deux autres règles impératives.



Première règle

On accrochera toujours :

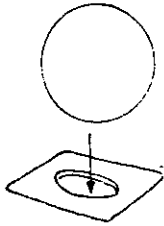
un bord a+ avec un bord a-,
un bord b+ avec un bord b-,
un bord c+ avec un bord c-,



Deuxième règle

On groupera toujours :

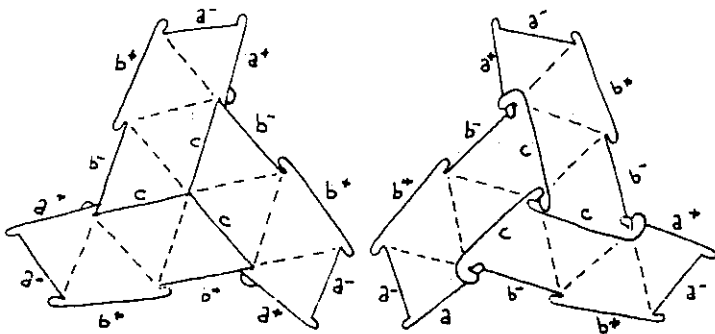
- 3 éléments accrochés ensemble par leurs bords c, autour de l'encoche 3,
- 2 éléments accrochés ensemble par leurs bords b, autour de l'encoche 2,
- 5 éléments accrochés ensemble par leurs bords a, autour de l'encoche 5.



L'emballage est un socle dans le creux duquel vous placerez votre MINI GEODE terminée.

Première tranche des travaux

Montez vingt groupes de trois éléments (triplet)



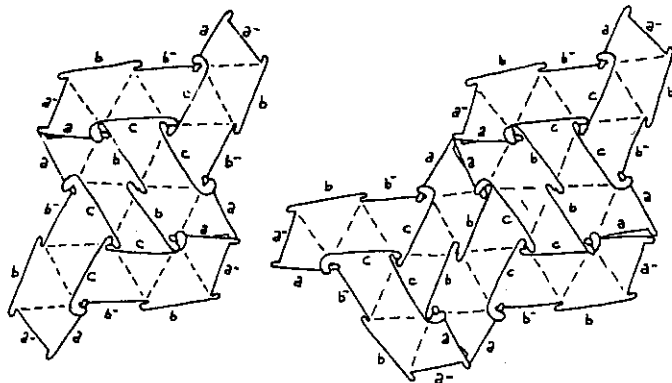
face extérieure

face intérieure

IMPORTANT : au fur et à mesure du montage, il faut bien faire en sorte que la courbure se referme vers l'intérieur.

Deuxième tranche des travaux

Accrochez les triplets les uns aux autres.



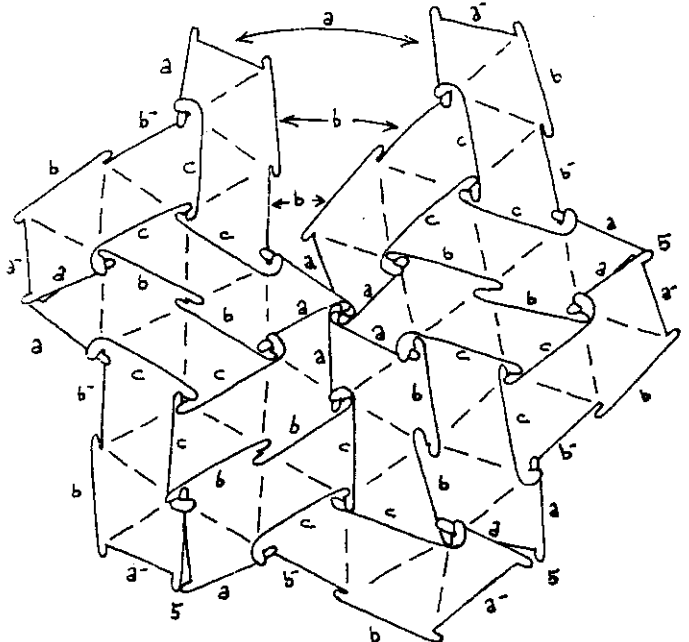
Deux triplets accrochés
(face intérieure)

Trois triplets accrochés
(face intérieure)

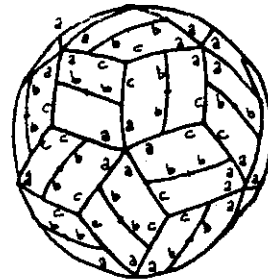
On referme une première calotte pentagonale. Sur le pourtour de cette calotte, il y a des bords a, qui sont déjà groupés par deux; nous allons les compléter pour faire

5, en utilisant nos triplets selon nos règles. Et de la même façon, nous continuerons jusqu'à épuisement des 20 triplets. La MINI GEODE sera alors terminée.

N.B. Pour réaliser facilement l'accrochage, il faut cintrer les éléments au moment de les engager dans les encoches, en opposant les courbures bien entendu. Pour le dernier élément, couper carrément la dernière languette à engager dans un groupe de 5.



Accrochage cinq triplets (face intérieure).



Vue d'ensemble de la MINI GEODE terminée.

Les éléments sont représentés sans leurs divisions en triangles. On voit mieux ainsi comment ils sont positionnés.

Il y a douze accrochages groupant 5 éléments par les bords a, autour d'un point.

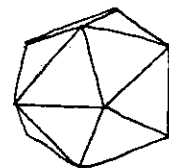
Il y a vingt accrochages groupant 3 éléments par les bords c, autour d'un point.

Il y a trente accrochages groupant 2 éléments par les bords b, autour d'un point.

Le polyèdre régulier utilisé a douze sommets d'ordre 5, vingt faces triangulaires et trente arêtes. Oui! C'est l'icosaèdre.

S'il était en caoutchouc et qu'on puisse le gonfler comme un ballon, ce ballon nous ferait penser à la GEODE. Peut-être bien à cause de cette formule magique :

Douze fois cinq
Vingt fois trois
Trente fois deux



Au fait combien nous a-t-il fallu d'éléments pour construire la MINI GEODE ?

**Si vous désirez ce matériel en kit
le commander au journal (40 F)**



ETRANGE GEODE

Récemment, à la Soirée de Rentrée du Groupe de Paris, j'écoutais les explications lumineuses du camarade CHAMAYOU sur cette géode qu'il engendra, lorsque je remarquais, à côté de moi, un « petit bonhomme vert » qui faisait tout son possible pour passer inaperçu (contrairement d'ailleurs au camarade CHAMAYOU qui, lui, préfère la couleur rouge pour arriver au même résultat).

Je réussis néanmoins à coincer mon petit bonhomme vert (dans un coin, of course, car comment voulez-vous coincer quelqu'un autrement que dans un coin ?).

Il m'avoua que son métier était l'espionnage industriel et qu'il venait de débarquer d'un OVNI. Sa mission était de rapporter sur la géode tous renseignements qui permettraient d'en construire une réplique sur la planète 453B6 où il habitait présentement.

Il me confia son admiration pour cette réalisation du génie centralien, et il ajouta que, pour s'occuper, il avait compté le nombre de plaques triangulaires qui constituaient la peau de l'édifice Chamayen et qu'il en avait trouvé 6 480.

Je lui fis remarquer que ce renseignement me paraissait insuffisant pour reconstituer la géode.

Il me regarda avec le mépris qu'on réserve aux sous-développés intellectuels et consentit à me fournir un renseignement complémentaire : les nœuds d'assemblage des barres étaient uniquement des nœuds à six barres ou à cinq barres.

« Ce qui devrait suffire, me dit-il, si toutefois vous n'êtes pas le dernier des crétins, pour répondre aux questions suivantes :

1. Combien y a-t-il de nœuds à cinq directions ?
2. Combien y a-t-il de nœuds à six directions ?
3. Combien y a-t-il de barres de jonction entre nœuds ? ».

Devant la complexité du problème (une seule donnée pour trois inconnues), je déclarai forfait.

Quel piston astucieux viendra à mon secours ? ■

Léonhardt EULER

P.c.c. : Charles DUBIN

Extrait du journal des Arts et Métiers
Arts et Manufactures - N° 383 - Janvier 1987

PLATON ET LA GEODE

Comment construire la Géode ? Comment construire une sphère de 36 mètres de diamètre qui puisse résister à des vents de 70 kilomètres/heure, à des variations de températures importantes...

L'idée la plus simple consisterait à envisager, dans l'espace, un grand nombre de points à la même distance du centre et formant un solide à faces toutes égales et à côtés tous égaux.

Malheureusement, on sait depuis 2 000 ans au moins (depuis Platon !) que ce n'est pas possible. Les seuls solides qui répondent à cette définition sont les 5 solides platoniciens : le cube, le tétraèdre, le dodécaèdre, l'octaèdre et l'icosaèdre.

L'architecte américain BUCKMINSTER FULLER a cependant trouvé, vers 1940, une solution architecturale pour construire une telle sphère ; c'est cette solution qui a été reprise et améliorée ici.

On considère l'icosaèdre formé de 20 faces égales à un même triangle équilatéral ; on divise chaque face en 100 triangles égaux.

Sur cette immense toile d'araignée on applique une structure secondaire constituée de "triangles" pleins et bombés. Pour ce faire, les 2 000 triangles plats obtenus après la division de l'icosaèdre sont projetés, sommet après sommet, afin de réaliser une sphère

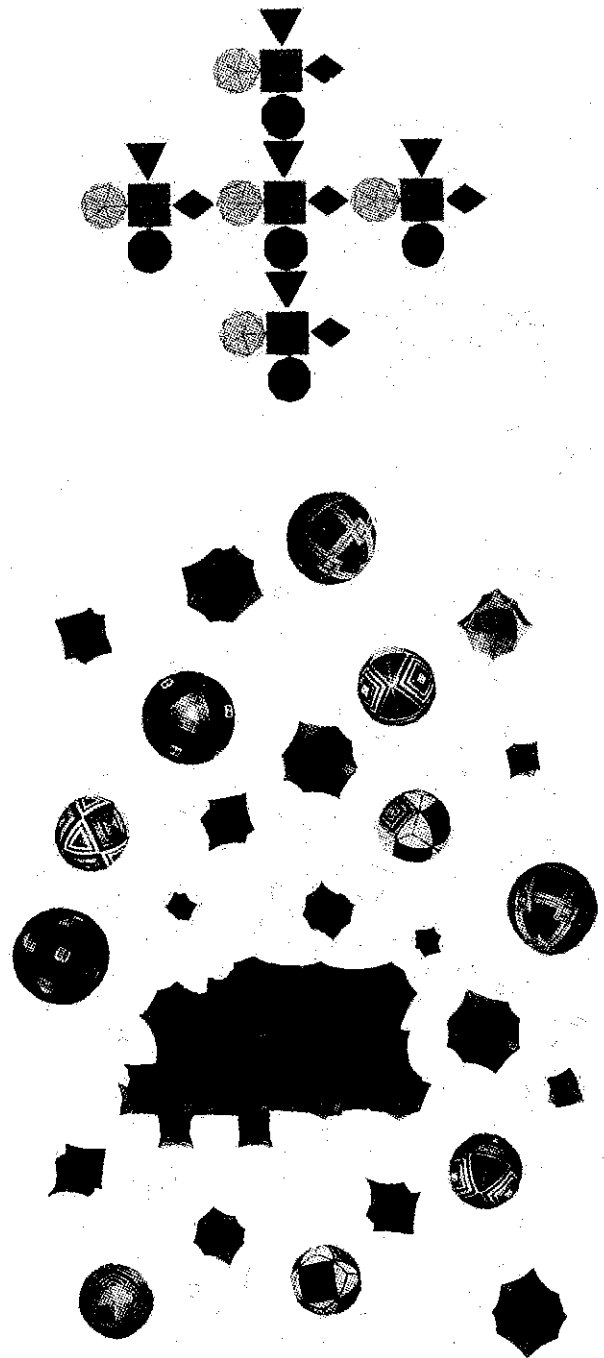
Il suffit alors, pour obtenir la sphère définitive, d'appliquer ces triangles de tôle pleins et bombés sur la structure primaire.

Les triangles de tôle de la peau extérieure (structure secondaire : quelques millimètres d'épaisseur, un mètre de côté environ) sont courbés par emboutissage (comme une carrosserie de voiture).

Notons enfin que cette construction d'un gigantesque mécano (appelé maillage) est aussi utilisée dans d'autres techniques d'aujourd'hui (calcul par éléments finis).

Dans les années 1889 l'ingénieur EIFFEL travaillait déjà en collaboration avec un spécialiste de géométrie, Monsieur BRICART. Superbe mariage de la science, de la technique et de l'architecture, souhaitons alors à la Géode le succès de la Tour Eiffel.

Jean-Michel KANTOR
Paris VII.



SOLUTION DU PROBLEME DE LA GEODE

Ce n'est pas par hasard que nous avons attribué ce problème, à titre posthume, à Léonhardt EULER, car c'est un théorème de ce célèbre géomètre qui va nous mettre sur la voie :

« Dans un polyèdre convexe le nombre de faces augmenté du nombre de sommets est égal au nombre d'arêtes augmenté de 2. »

Ici les faces du polyèdre sont les plaques triangulaires au nombre de T :

- les sommets du polyèdre sont les nœuds N de jonction au nombre de N,
- les arêtes sont les barres B de jonction entre N.

$$\text{Donc : } N + T = B + 2.$$

D'autre part l'inventaire des barres considérées comme appartenant chacune à deux triangles différents nous donne la relation :

$$2 B = 3 T$$

De même l'inventaire des barres appartenant aux nœuds à cinq ou à six directions nous donne la relation :

$$5 N_5 - 6 N_6 = 2 B$$

avec évidemment la relation

$$N_5 + N_6 = N$$

Et en éliminant N_6 on trouve cette étonnante propriété qui dit que, quel que soit le nombre de N_6 (nœuds à 6 directions) :

$$N_5 = 12$$

D'autre part la loi $2B = 3T$ nous donne :

$$B = 9\ 720$$

et par conséquent

$$N_6 = B + 2 - 12 - T = 3\ 230.$$

PLUT MATHINGES

ORLEANS 87!

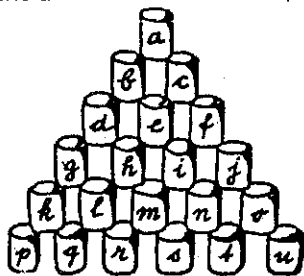
Voici les 15 exercices proposés
cette année au Rallye "classe contre classe" du Loiret.

3° - SECONDE

LE CHAMBOULE-TOUT (10 points)

Des boîtes sont empilées comme sur le dessin. Un joueur dispose de 6 balles qu'il lance une à une. Par convention, une balle ne peut atteindre qu'une boîte ; il ne tombe alors que la boîte touchée et celles qui ont perdu un de leurs appuis. On ne relève jamais les boîtes tombées.

Le joueur a gagné s'il parvient ainsi à faire tomber toutes les boîtes.



Nathalie et Olivier jouent au chamboule-tout.

- 1) Olivier dit qu'au premier lancer, il a fait tomber 11 boîtes. Nathalie prétend que c'est impossible. Qui a raison ?
- 2) Nathalie a fait tomber 9 boîtes au premier lancer. Peut-elle gagner ?
- 3) Quelles boîtes un joueur doit-il viser pour espérer gagner ?

"NE FAITEZ PAS DES NŒUDS" AVEC LA VITESSE ! (5 points)

Un bateau à moteur est vendu pour filer à la vitesse maximale de 12 nœuds.

Il parcourt un trajet aller, puis le trajet retour, moteur à fond, sur un cours d'eau rapide et met deux fois plus de temps à remonter qu'à descendre.

Quelle est, exprimée en nœuds, la vitesse du courant ?

LA TENTATION DU 18° POINT (10 points)

1) A l'aide de la calculatrice, trouver une valeur approchée avec trois décimales du nombre suivant :

$$L = \sqrt{2 \cdot \frac{1}{8} \cdot (-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \sqrt{68 + 12\sqrt{17} + 2(-1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}})}$$

2) Sur un cercle de rayon 10 cm, placer un point A_0 puis, en se déplaçant toujours dans le même sens, les points $A_1, A_2, \dots, A_{16}, A_{17}$, de telle sorte que :

$$A_0A_1 = A_1A_2 \dots A_{15}A_{16} \quad A_{16}A_{17} = 10 L.$$

Tracer la ligne brisée : $A_0A_1A_2 \dots A_{16}A_{17}$

PLIS ET RE-PLIS (15 points)

Sur une feuille de papier rectangulaire, non carrée, marquez une face "recto". Ce sera l'intérieur du premier pli et le côté de lecture du résultat.

Chaque opération dite de "double-pli" consiste à plier cette feuille en quatre suivant ses axes de symétrie.

Sans déplier, recommencer l'opération de "double-pli" ... et ainsi de suite.

Au bout de la deuxième opération dépliez complètement. Vous observez sur le recto un quadrillage rectangulaire dont les segments joignant deux nœuds successifs sont marqués soit par un pli en creux, soit par un pli en crête.

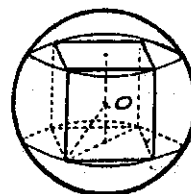
Quel est le nombre de segments en creux ?

Si on pouvait pratiquer successivement plusieurs opérations de "double-pli", calculez le nombre de segments en creux obtenus sur le recto (totalement déplié). Donnez le résultat pour 5, 6 et 8 opérations.

L'UN DANS L'AUTRE (5 points)

Quel est le rapport du volume d'une sphère au volume d'un cube dont les sommets sont situés sur cette sphère ?

(On admet que le centre O du cube est aussi celui de la sphère).



QUAND SOUSTRAIRE, C'EST MULTIPLIER (10 points)

Voici deux égalités :

$$\frac{3}{5} - \frac{3}{8} = \frac{3}{5} \times \frac{3}{8} ; \quad \frac{7}{2} - \frac{7}{9} = \frac{7}{2} \times \frac{7}{9}$$

que vous pouvez vérifier.

Chacune d'elles fait intervenir deux fractions irréductibles ayant même numérateur. Ecrire toutes les égalités analogues avec des fractions irréductibles du type $\frac{p}{q}$.

(p et q entiers tels que $1 \leq p \leq 9$ et $2 \leq q \leq 9$). Justifier.

SI VOUS N'AVEZ PAS DE REGLE, AYEZ DES IDEES ! (5 points)

En utilisant uniquement le compas, construire le symétrique d'un point M par rapport à un point O.

Décrire la construction et laisser tous les tracés visibles sur la feuille-réponse.

LA CROIX ET LES CROISSANTS (10 points)

1) La figure 3 sera obtenue en superposant les figures 1 et 2 ; la réaliser sur la feuille-réponse dans un carré de 12 cm de côté.

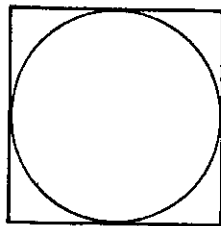


Figure 1

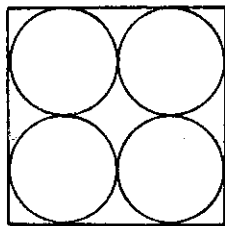


Figure 2

2) Noircir la partie du plan intérieure au grand cercle et extérieure aux petits.

Hachurer la partie extérieure au grand cercle et intérieure aux petits.

3) Comparer l'aire de la partie noircie et celle de la partie hachurée. Justifier la réponse.

LES "1", LES "2" ET LES ... (5 points)

On donne $A = 111\ 111\ 111\ 111 - 222\ 222$

Calculez la racine carrée de A.

Justifier le résultat.

SEPT ! MAIS A QUEL PRIX ? (5 points)

Un distributeur de bonbons contient 12 bonbons rouges, 11 verts, 10 bleus, 3 jaunes et 4 blancs. Quand on introduit une pièce de 50 centimes, il tombe au hasard un bonbon.

Quelle somme dois-je avoir à ma disposition pour être sûr d'obtenir 7 bonbons de la même couleur ?

"IDEFIX" (15 points)

L'unité choisie est le cm.

1) Soit un carré EFGH de côté 10.

Soit x tel que $0 < x < 7$.

Sur les côtés [EF], [FG], [GH], [HE], on construit les points M, N, P, Q tels que :

$EM = x$; $FN = x + 1$; $GP = x + 2$; $HQ = x + 3$.

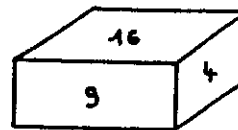
Soit I le milieu de [MP] et D le milieu de [QN]. Calculer ID.

2) Que devient la longueur ID pour un carré de côté a ($a > 3$) quelconque sachant que $0 < x < a - 3$?

"L'AIR CARRE" (5 points)

Les aires exprimées en cm^2 de chacune des faces adjacentes d'un parallélépipède rectangle sont : 4 ; 9 ; 16.

Quel est, exprimé en cm^3 , le volume de ce parallélépipède rectangle ?



DE CERCLE EN CERCLE... (5 points)

Soient deux cercles concentriques C_1 et C_2 de rayons respectifs r_1 et r_2 ($r_1 < r_2$). On construit une corde [AB] du cercle C_2 tangente au cercle C_1 .

Comparer l'aire du cercle de diamètre [AB] et l'aire de la couronne limitée par C_1 et C_2 . Justifier la réponse.

"QUE SONT LES MULOTS DEVENUS ?" 5 points

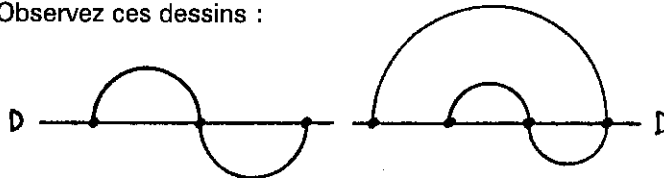
Une vague de froid a sévi durant 33 jours, isolant dès le premier jour, une famille de 440 mulots dans un grenier (on considèrera que le nombre de mulots vivants est constant).

Gourmands, ils épuisent les réserves en 21 jours et meurent.

Quel effectif maximum aurait permis la survie ?

LES SERPENTINS (15 points)

Observez ces dessins :



Serpentin à 3 points

Serpentin à 4 points

Pour construire un serpentin à 5 points :

- Marquez 5 points régulièrement espacés sur une droite horizontale D.

- Tracez une ligne qui, sans se recouper, relie ces 5 points. Elle est constituée de 4 demi-cercles situés alternativement au-dessus et en-dessous de la droite D.

Mais ATTENTION, respectez les 3 règles suivantes :

- Chaque demi-cercle relie 2 des points marqués.

- Le serpentin commence au point le plus à gauche, par un demi-cercle situé au-dessus de la droite D et se termine en un autre point.

- Le serpentin rencontre une et une seule fois chaque point marqué et son tracé peut être suivi sans lever le crayon.

1) Construisez tous les serpentin à 5 points.

La distance de 2 points consécutifs étant égale à 1 cm, calculez la longueur de chacun de ces serpentin.

2) Vous seriez capable, en respectant les mêmes conventions, de construire des serpentin à 9 points.

Évaluez la longueur du plus long serpentin à 9 points sachant que la distance de 2 points consécutifs est de 1 cm. Justifiez votre réponse. ■

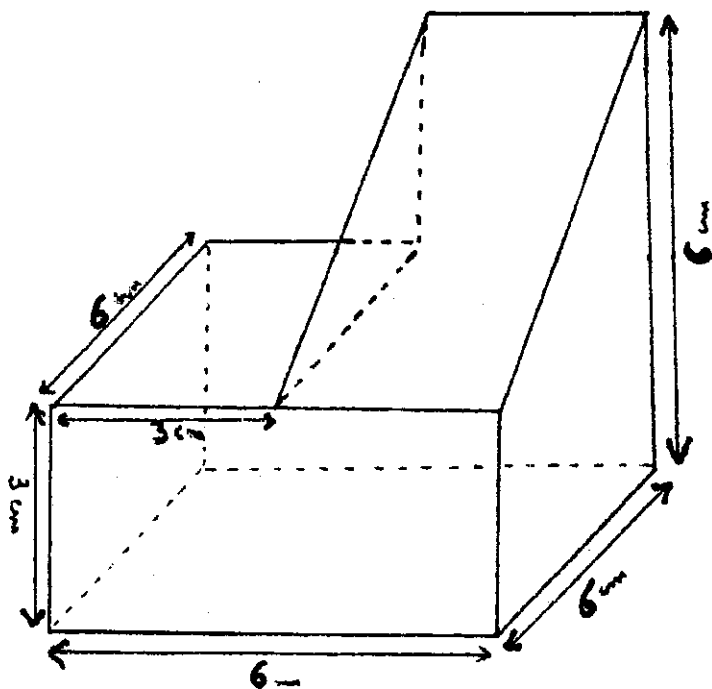
COTE D'IVOIRE 87!

*Les mathématiques en Côte d'Ivoire ont connu en 1987 une année faste :
en février remise des prix aux lauréats du concours 86
par le Président de la République Monsieur HOUPOUET BOIGNY ;
en avril, Symposium inter africain sur "Mathématique et informatique
dans l'enseignement". Entre temps, nouveau concours de mathématiques
et en juillet séjour en France pour une vingtaine de lauréats.
De quoi susciter un engouement accru pour cette épreuve.
Voici quelques sujets proposés en sélection.*



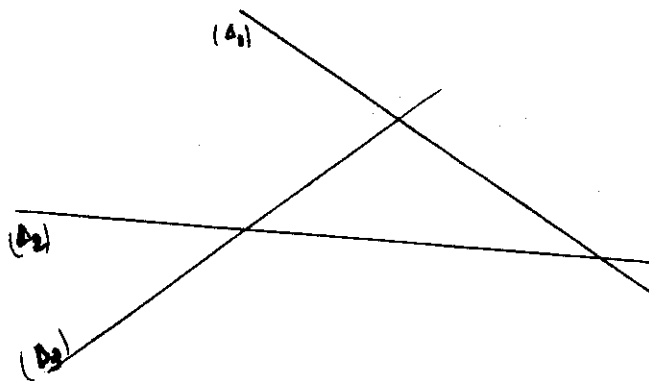
6^e - 5^e

- On écrit la suite des nombres entiers de 1 à 1987. Combien de fois écrit-on le chiffre 5 ?
- Trois amis achètent pour un bon prix un lot de 21 tonneaux d'huile de palme. Parmi les 21 tonneaux, il y en a 7 qui sont pleins d'huile, 7 qui sont à moitié pleins et 7 qui sont vides. Comment peuvent-ils se partager ces 21 tonneaux de façon que chacun ait 7 tonneaux et la même quantité d'huile de palme ?
- Voici un solide découpé dans un cube. Dessine ce que tu vois quand tu regardes le dessus de ce solide, puis le côté gauche.



4^e - 3^e

- 1) Dessine un carré et place tous ses axes de symétrie.
2) On se donne trois droites (Δ_1) , (Δ_2) et (Δ_3) . Donne un programme de construction d'un carré ABCD tel que A et C soient sur (Δ_1) , B sur (Δ_2) et D sur (Δ_3) .



- On écrit sans séparation la suite des nombres entiers à partir de 1 :
12345678910111213141516...
Le premier chiffre est 1 ; le quinzième est 2.
Quel est le 1987^e chiffre ? Explique ton raisonnement.
(le même exercice était proposé en 1^{re} et 11^e).
- Cent élèves, qui sont tous de taille différente, sont disposés en carré : 10 colonnes de 10, 10 rangées de 10. Dans chaque colonne, on fait lever la main au plus grand élève de la colonne, puis, parmi ces 10 élèves qui ont levé la main, on choisit le plus petit qu'on appelle A. Dans chaque rangée, on fait lever la main à l'élève le plus petit de la rangée, puis on choisit parmi ces 10 élèves qui ont levé la main le plus grand qu'on appelle B. Qui est le plus grand de A ou de B ?

Seconde

- On considère une quadrilatère ABCD.

1) D'un point M du segment [AD] on mène la parallèle à la diagonale (BD) ; elle coupe la droite (AB) en N. Par N, on mène la parallèle à la diagonale (AC) ; elle coupe la droite (BC) en P. Par P, on mène la parallèle à la diagonale (BD) ; elle coupe la droite (DC) en Q.

Montrez que MNPQ est un parallélogramme.

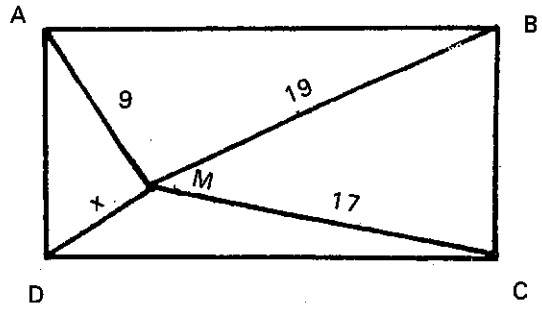
2) Comment faut-il choisir le point M pour que MNPQ soit un losange ? Donnez un programme de construction du point M dans ce cas.

- On rappelle que les coordonnées du milieu d'un bipoint (M,M') où M a pour coordonnées (x,y) et M'(x',y') sont $(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2})$.

On considère cinq points A, B, C, D et E dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs.

Montrez que l'on peut toujours trouver, parmi ces cinq points, deux points dont le milieu a aussi des coordonnées entières.

- ABCD est un rectangle. On a mesuré les distances de M à A, B et C. Quelle est la distance de M à D ?



Première et Terminale

- Soient quatre points A, B, C et D situés sur un même cercle. On désigne par M, N, P et Q les milieux respectifs des bipoints (A,B), (B,C), (C,D) et (D,A) et par (m), (n), (p) et (q) les droites respectivement :

- passant par M et perpendiculaire à (CD),
- passant par N et perpendiculaire à (DA),
- passant par P et perpendiculaire à (AB),
- passant par Q et perpendiculaire à (BC),

Montrez que les quatre droites (m), (n), (p) et (q) sont concourantes.

On pourra remarquer que MNPQ est un parallélogramme et considérer le centre K de ce parallélogramme. ■

Le numéro 5 de "PARADROME"
est consacré
aux OLYMPIADES de MATHÉMATIQUES
de l'île de France 87
(énoncés, indications, solutions, commentaires...)

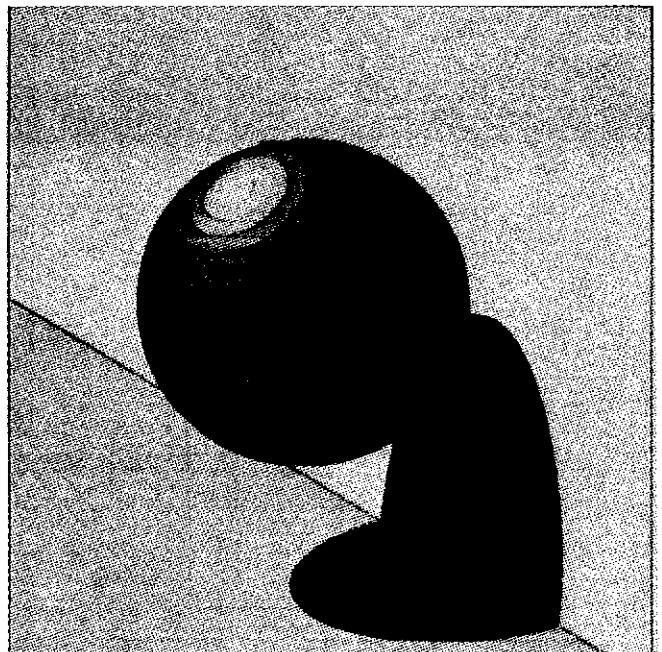
Pour se le procurer, écrire à :

A.L.T.M.

5, allée F. Chopin 95100 ARGENTEUIL
joindre 13,50F en chèque bancaire ou postal à l'ordre de
ALTM CCP n° 23568 60 K PARIS

MATHS EN CROIX SOLUTION

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
I	C	L	A	I	R	A	U	T	
II	A	I	R		I	N	N	E	S
III	U	N	E	H	C		I	N	U
IV	C	E	S		A	R	C	S	
V	H	A		S	T	R	I	E	S
VI	Y	I		E	T		T	U	B
VII		R	E	V	I	S	E	R	A
VIII	M	E	N	E		E	S	S	E

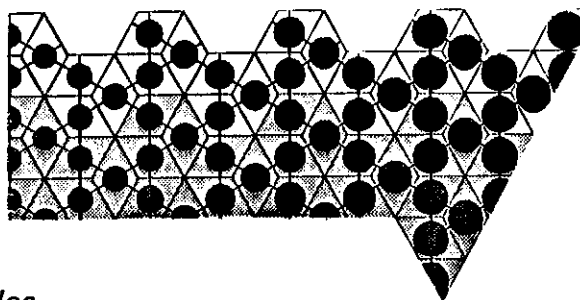


PERCEPTION SPATIALE DE POLYEDRES

Groupe de Recherche en Topologie Structurale - Montréal

Fin juin, début juillet se tient en France un congrès international intitulé "Computer-aided geometry reasoning". Du 22 au 26 juin à Sophia Antipolis, du 29 juin au 3 juillet à La Villette à Paris (pour tout renseignement s'adresser à Henry Crapo - Bt 24 - INRIA - BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex).

En avant-première voici un texte présenté par une équipe québécoise bien connue dans les IREM (D. Dion, R. Pallascio et V. Papillon) extrait du bulletin de l'AMQ d'Octobre 1985. Ils proposent cinq étapes dans la construction de la perception spatiale chez l'enfant : visualisation, structuration, transfiguration, détermination et classification.



Introduction

Les polyèdres constituent des modèles d'organisation spatiale dont les propriétés géométriques sont bien définies. Les connaissances que nous en avons ont permis à notre groupe de recherche de voir les polyèdres, en tant qu'objets, comme des figures de base dans l'étude du développement de la *perception spatiale*.

Nous pensons que les diverses actions menant à une perception développée se font en cinq étapes: la *visualisation*, la *structuration*, la *transfiguration*, la *détermination* et la *classification*. Chacune de ces étapes inclut des actions qui vont de l'opération mentale jusqu'à l'application; par exemple, de la reconnaissance des objets à la réalisation de ceux-ci. Le niveau de difficulté dans les tâches à accomplir augmente en passant d'une étape à l'autre et ce développement suppose, à chaque étape, une maîtrise des actions précédentes.

En vue d'un entraînement éventuel, nous avons expérimenté le contenu et le déroulement de ces étapes. Un test comprenant plusieurs activités, effectuées avec de véritables solides, a été présenté à 40 élèves de secondaire V (14-18 ans).

Le texte illustré qui suit est divisé en fonction des cinq étapes. Chaque partie contient, en tête, une définition de l'étape, puis une description des activités qui s'y rattachent, accompagnées de commentaires sur les résultats obtenus après l'expérimentation. Les dernières lignes sont consacrées à des observations à propos des activités et des modèles que nous avons utilisés.

DÉFINITION DES ÉTAPES, DESCRIPTIONS ET RÉSULTATS DES ACTIVITÉS

1^{re} étape:

VISUALISATION

a. Définition

Après avoir observé un objet, sa «visualisation» consiste à pouvoir en mémoriser suffisamment d'images partielles, pour pouvoir reconnaître des objets semblables à celui-ci, c'est-à-dire à isométrie ou homothétie près, parmi un ensemble d'objets de complexité topologique équivalente.

b. Activités

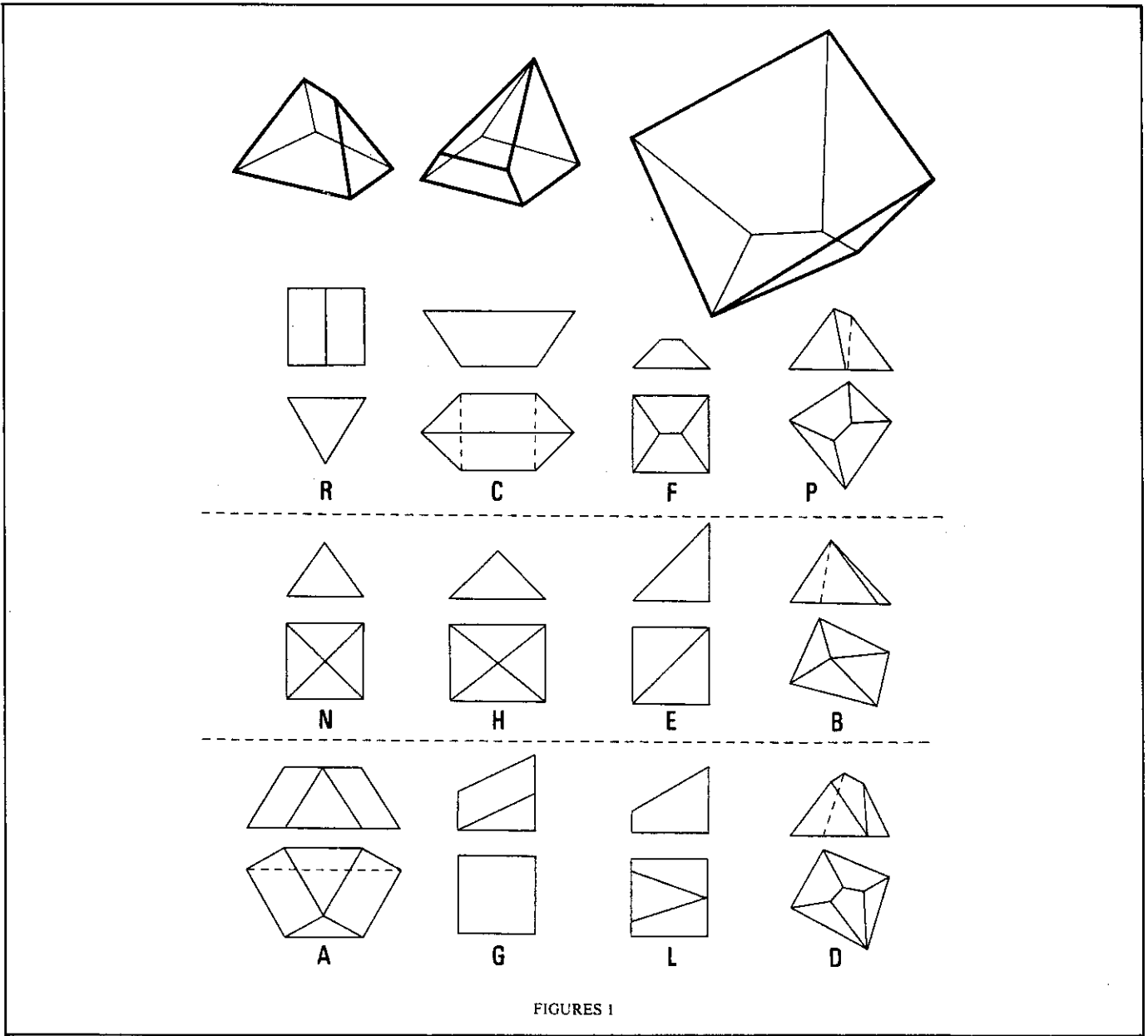
Nous avons retenu quatre activités de visualisation. Les trois premières portent sur la reconnaissance de polyèdres semblables. Pour ce faire, nous avons utilisé du matériel qui avait déjà servi pour des expérimentations comparables auprès de jeunes élèves. Il s'agit d'un ensemble de douze polyèdres, aux faces ajourées, divisés en trois familles de structures topologiques distinctes, comme le montrent leurs projections des figures 1, se rattachant au prisme triangulaire (R), à la pyramide carrée (N) et à un hexaèdre (A). (Les lettres sont des identifications tout à fait arbitraires).

Deux activités se font à partir d'une exploration *tactile* de petits polyèdres, figures 1.1 et 1.2, pouvant être manipulés aisément. On passe au sujet un tronc de pyramide, figure 1.1, qui est une reproduction du modèle P de la famille du prisme triangulaire, mais il le reçoit sous la table de manière à ce qu'il puisse le manipuler un certain temps, en tous sens, sans jamais le voir. On présente ensuite le groupe des douze polyèdres afin qu'il identifie lequel est semblable à celui qu'il a eu entre les mains.

L'expérience est répétée avec un modèle un peu plus complexe, le L, figure 1.2, augmentant ainsi la difficulté de mémoriser au toucher les différentes parties de ce polyèdre.

Pour la troisième activité, l'exploration est *visuelle*, mais utilisant cette fois un très gros polyèdre, figure 1.3, d'environ un mètre cube, qu'il faut contourner pour voir toutes ses faces. Après un temps d'observation, le sujet doit reconnaître son modèle semblable, le D, figures 1.

Enfin, la quatrième activité consiste à reconstituer une composition formée d'un groupe de quatre polyèdres, figures 1.4 a, b, c, d. Ces derniers sont tous faits à partir d'un prisme triangulaire auquel est ajouté séparément: un tétraèdre (a), une pyramide carrée (b) ou deux (d) et un autre prisme (c). Ils sont disposés en une rangée compacte, selon le plan des figures 1.4. Le sujet doit mémoriser non pas, comme précédemment, une série d'images partielles d'un polyèdre mais plutôt la position de chaque polyèdre dans la composition. Après quelques minutes d'observation, ils sont mélangés, puis la tâche du sujet est de les replacer exactement comme ils étaient assemblés.



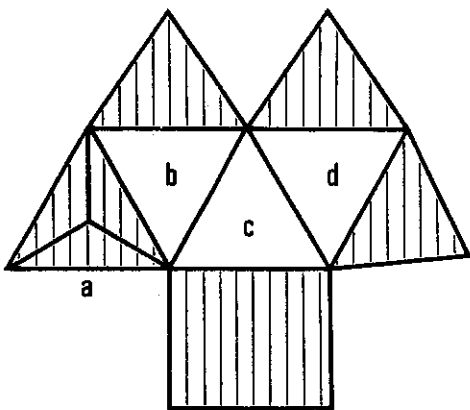
FIGURES 1

Résultats

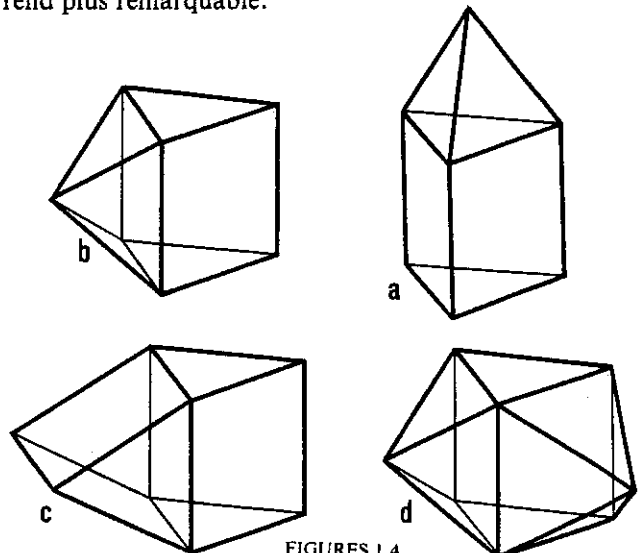
Les résultats des premières activités ont été meilleurs avec l'exploration tactile des polyèdres P et L que pour la reconnaissance visuelle du polyèdre D, où seulement près de la moitié des sujets ont pu le reconnaître. Par ailleurs, il est très étonnant de voir que le P et le L ont été confondus, le plus souvent, avec le modèle D, dont

sept fois il a été choisi à la place du L pour bonne réponse. Notons cependant qu'ils sont de la même famille, figures 1.

Dans la juxtaposition des quatre prismes, le modèle a, figures 1.4, a été beaucoup plus souvent remis dans sa bonne position que les trois autres. Ce prisme, chapeauté d'un tétraèdre, dépasse les autres en hauteur et ceci le rend plus remarquable.



PLAN D'ASSEMBLAGE



FIGURES 1.4

2^e étape:

STRUCTURATION

a. Définition

Après avoir «visualisé» un objet, sa «structuration» consiste à pouvoir reconnaître des objets qui lui sont topologiquement équivalents jusqu'à pouvoir le reconstituer à partir de quelques-uns de ses éléments de base, c'est-à-dire des sommets, arêtes, faces ou des combinaisons de polyèdres.

b. Activités

La structuration comportait deux activités semblables; la seconde ne venant qu'accroître les difficultés de la première. Le sujet doit maintenant, en plus d'observer et manipuler, construire lui-même des polyèdres. À cette fin, le matériel requis à sa disposition sont des triangles, carrés et pentagones réguliers qui s'assemblent à l'aide de rubans élastiques. La tâche à accomplir est de réaliser, avec des faces régulières, un polyèdre dont la structure topologique sera équivalente à celle d'un polyèdre dissymétrique donné.

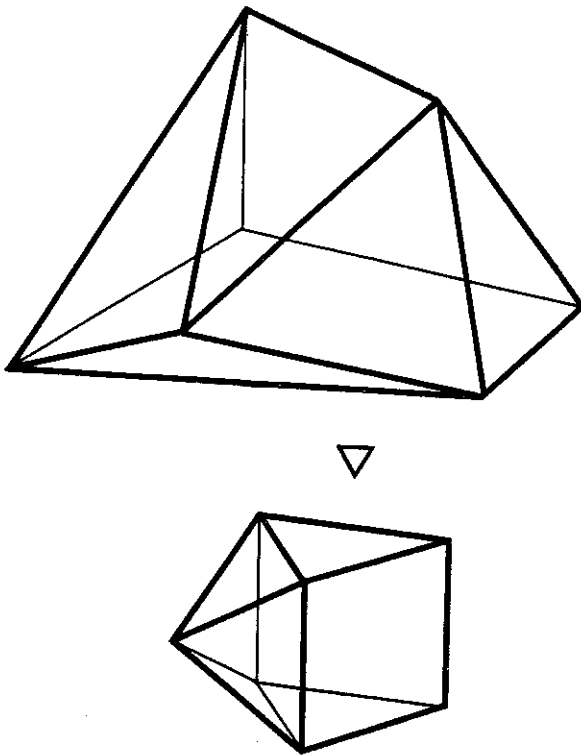


Figure 2.1

Le sujet reçoit pour débiter un tronc de pyramide triangulaire pyramidé sur l'une de ses faces, figure 2.1. Il choisit et agence ensuite les bons polygones pour former une reproduction régulière du modèle. Le tronc de pyramide devient alors un prisme triangulaire régulier et sur l'une de ses faces carrées, pointe une pyramide régulière, figure 2.1 à droite.

Nous reprenons la même activité mais avec un tronc de pyramide pentagonale pyramidé également sur une face quadrilatérale, figure 2.2.

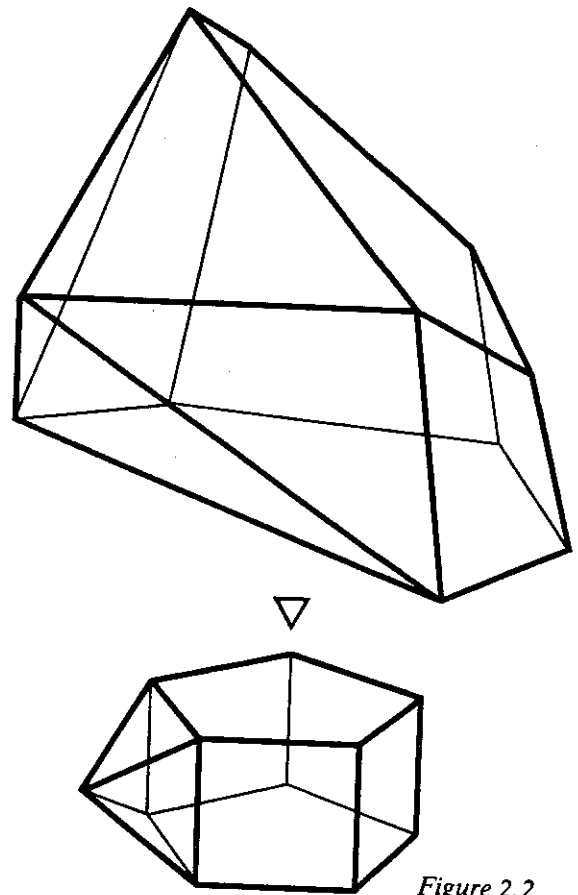


Figure 2.2

c. Résultats

Le taux de réussite de la seconde activité, comparativement à la première (7 bonnes solutions contre 17), confirme le rapport de complexité entre les deux modèles, figures 2.1 et 2.2. Parmi ceux qui ont réussi le prisme pentagonal pyramidé, il s'en est trouvé trois qui n'avaient pas fait le premier polyèdre, figure 2.1. Ce sont pourtant des figures proches l'une de l'autre, mais en ajoutant des faces pentagonales, le sujet cherche à assembler trois faces différentes plutôt que simplement des triangles et des carrés, et le nombre de faces est bien entendu plus élevé.

3^e étape:

TRANSFIGURATION

a. Définition

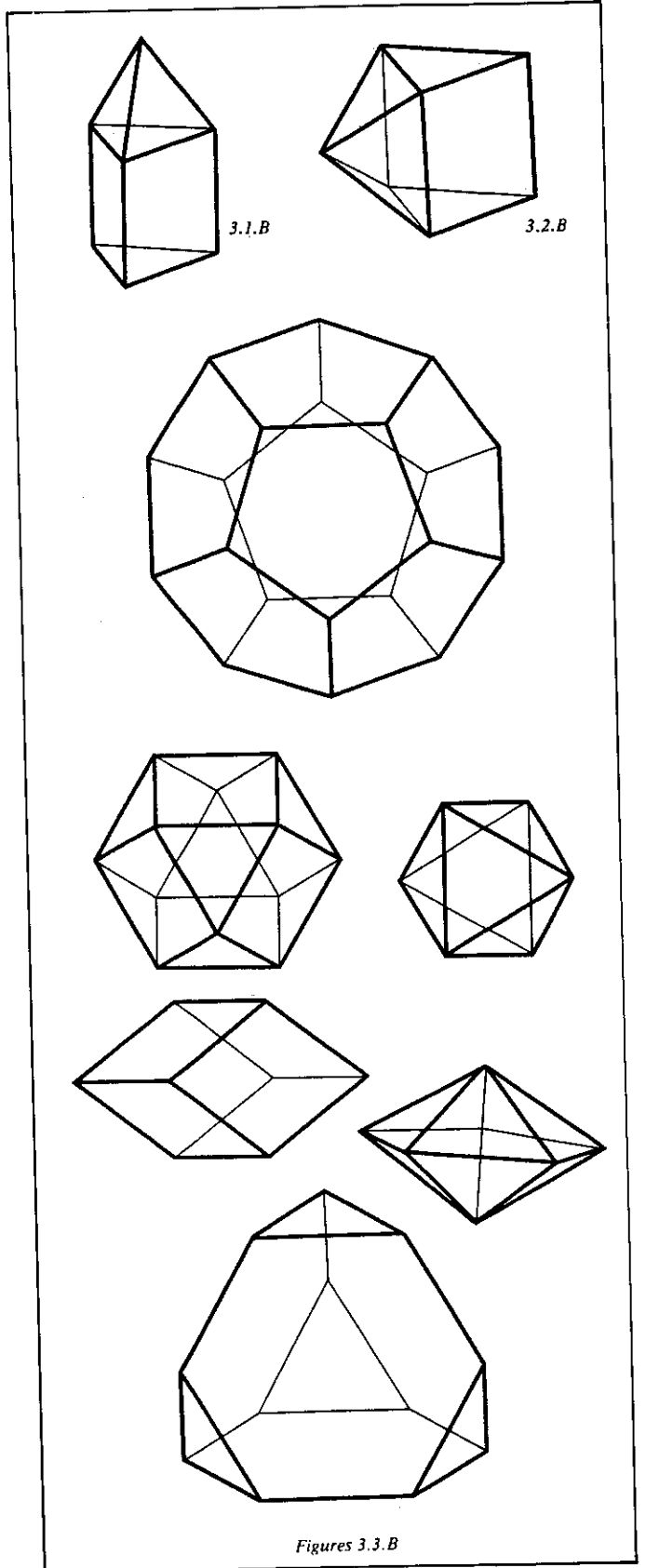
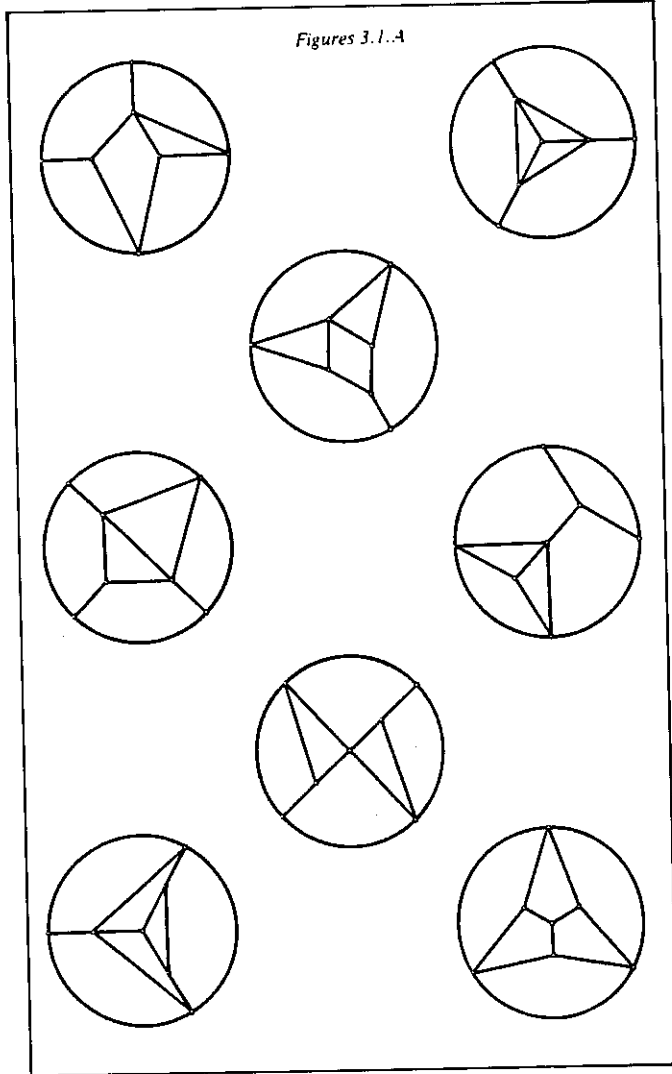
Pouvant «structurer» un objet, sa «transfiguration» consiste à pouvoir reconnaître sa description dans un autre médium, jusqu'à pouvoir le décrire dans ce médium; par exemple passer d'une description littéraire en termes de propriétés topologiques d'un objet vers la reconnaissance d'un objet topologiquement équivalent, ou d'un modèle physique vers la reconnaissance de sa représentation en mode projectif ou vice versa.

b. Activités

La transfiguration a été partagée en trois activités. Les deux premières sont orientées sur le passage de la représentation graphique au solide. Les dessins que nous employons sont des graphes, figures 3.1.A et 3.2.A. Cette forme de représentation topologique a été choisie parce qu'elle est réellement une figure plane, en ce sens qu'elle ne fait pas appel à l'effet de profondeur rencontré dans les projections des polyèdres; pour être comprise, elle exige plutôt une *analyse des incidences* des sommets et arêtes entre eux. Pour cette raison, les

huit graphes, figures 3.1.A, sont tracés volontairement avec des courbes, diminuant ainsi la vue en perspective des polyèdres. Ceci est expliqué au sujet, avant d'entreprendre les activités. Par la suite, nous débutons en lui remettant un prisme triangulaire pyramidé d'un tétraèdre, figure 3.1.B, et les huit graphes, tels qu'ils apparaissent en 3.1.A. La question est d'identifier lesquels, parmi ces graphes, représentent le polyèdre. Il y en a trois; nous invitons le lecteur à les découvrir.

La troisième transfiguration part d'une description linguistique pour reconnaître des polyèdres. Cette description est représentée sous forme de définitions, écrites, d'un polyèdre régulier et d'un semi-régulier, figure 3.3.A. Deux polyèdres, figures 3.3.B, sont réguliers: le dodécaèdre et l'octaèdre, deux sont semi-réguliers: le cuboctaèdre et le tétraèdre tronqué et deux ne sont pas définis, que nous appelons «autres»: un rhomboèdre et une pyramide pentagonale. Le sujet lit les définitions, après quoi nous lui montrons un à un les six polyèdres pour lesquels il doit mentionner la catégorie.



Dans la seconde activité, au lieu de reconnaître, comme dans la première, les représentations d'un polyèdre, il s'agit inversement de construire le polyèdre d'après sa représentation graphique. Nous présentons au sujet le graphe, figure 3.2.A, et nous lui demandons de construire avec des polygones réguliers, préparés en conséquence, le polyèdre correspondant. La solution est de nouveau un prisme triangulaire mais pyramidé sur une des faces carrées, figure 3.2.B.

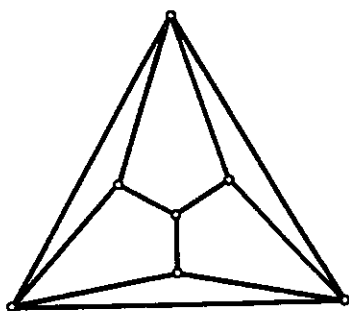


Figure 3.2.A

c. Résultats

Dans la première activité, seul le graphe en haut à droite des figures 3.1.A, a été bien des fois spontanément identifié, car il est le plus près d'une vue en perspective du polyèdre. Ce groupe des huit graphes est très confondant. Ils sont tous composés de trois faces quadrilatérales et de quatre triangulaires, aussi ils ont tous, trois sommets de quatre arêtes et quatre sommets de trois arêtes incidentes. Ce n'est donc pas en comptant ces éléments que l'on aura les solutions mais en observant leurs agencements. À ce propos, mis à part les trois que l'on recherche, il y a trois autres graphes qui sont également isomorphes, c'est-à-dire qui représentent un même polyèdre.

Le polyèdre, figure 3.2.B, de l'activité suivante est le même modèle qu'il fallait réaliser en structuration, figure 2.1, où il a été doublement plus réussi. On peut conclure qu'il est plus difficile de construire un polyèdre d'après son graphe que d'après un équivalent.

À la dernière activité, les deux polyèdres réguliers ont été qualifiés correctement par presque tous les sujets. Par contre, les deux dits «autres»: le rhomboèdre et la bipyramide ont été pris pour des réguliers par la plupart des sujets. Cela est sans doute dû au fait qu'ils n'ont qu'un type de faces. Enfin, les semi-réguliers sont reconnus chaque fois qu'ils sont classés dans une mauvaise catégorie.

Définitions

a. Polyèdre régulier

Un polyèdre régulier est un polyèdre dont tous les angles peuvent coïncider parfaitement par superposition et dont toutes les faces sont des polygones réguliers pouvant coïncider parfaitement par superposition.

b. Polyèdre semi-régulier

Un polyèdre semi-régulier est un polyèdre dont tous les angles polyèdres peuvent coïncider parfaitement par superposition, dont toutes les faces sont des polygones réguliers, mais dont au moins 2 faces ne coïncident pas.

Figure 3.3.A

4^e étape:

DÉTERMINATION

a. Définition

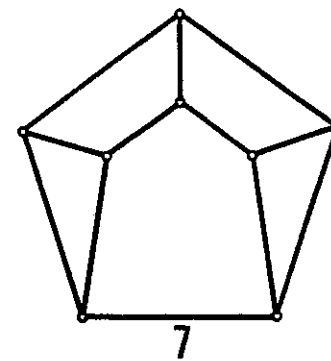
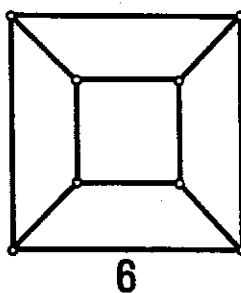
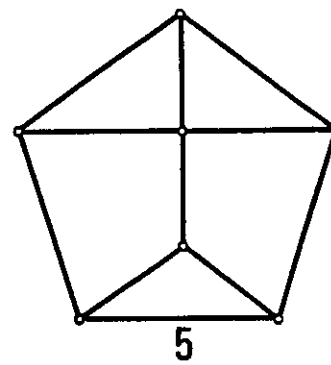
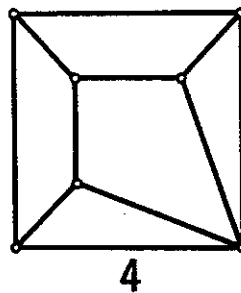
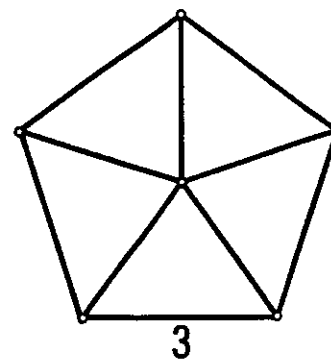
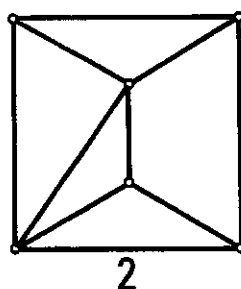
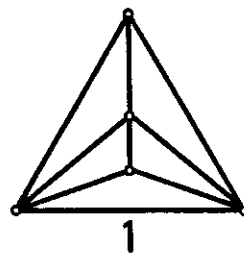
Pouvant «transfigurer» un objet, sa «détermination» consiste à pouvoir reconnaître sa faisabilité à partir d'une description incluant des contraintes métriques, jusqu'à pouvoir sélectionner d'autres conditions métriques équivalentes.

b. Activités

Pour toutes les activités à venir, le matériel utilisé est le polystyrène que l'on taille à l'aide d'un fil chauffant. Les pièces ne dépassent pas cent vingt-cinq (125) centimètres cubes et sont faciles à découper. Cependant, les difficultés se poseront, pour le sujet, dans le choix des points sur la pièce, par lesquels passera le fil pour obtenir les plans de coupe désirés. C'est en vue de tester cette façon de faire que nous avons préparé une activité.

Pour celle-ci, nous avons sélectionné sept graphes, figures 4.1.A, représentant tous un hexaèdre différent, établis dans un ordre croissant de leurs sommets et leurs arêtes. On peut les obtenir, et ce sont les seuls, après

avoir exécuté deux troncatures sur un tétraèdre, mais sans faire passer le plan de coupe par une arête dans le sens de sa longueur; car une telle section est superflue, elle redonnerait à nouveau le ou les mêmes polyèdres. Partant de ces données, le sujet doit tronquer, deux fois seulement, un tétraèdre en polystyrène afin de réaliser deux de ses hexaèdres, d'abord le sixième, qui est topologiquement un cube, puis le troisième représentant une pyramide pentagonale. Lorsque l'un ou l'autre de ces polyèdres n'a pas réussi, on constate, en observant les cinq autres graphes, lequel a été fait parmi ceux-ci.



Figures 4.1.A

Le tableau 4.1.B. montre tous les découpages possibles pour produire les sept hexaèdres après deux troncatures. Les trois tétraèdres, tout au haut, sont tronqués une première fois (parties hachurées). Dans un cas, à gauche, la coupe passe par un des sommets du tétraèdre et rencontre la face opposée; il en résulte une pyramide quadrilatérale. Les deux autres troncatures, à droite, sont équivalentes, que l'on tronque simplement un sommet ou une arête par quatre faces, on aura dans les deux cas, un tronc de pyramide triangulaire. Par conséquent, il n'y a que deux polyèdres aux structures différentes après une première troncature.

À l'extrême gauche du tableau, les sept graphes sont reproduits et vis-à-vis de chacun d'eux, figurent en rangées les diverses solutions qu'engendre la deuxième troncature celle-ci étant une coupe soit triangulaire, soit quadrilatérale, ou encore pentagonale, comme le sym-

bolisent les polygones apparaissant au haut de chaque colonne.

A remarquer que les coupes pentagonales effectuées sur la pyramide quadrilatérale pour les graphes 5 et 7 ne sont, en réalité, qu'une seule et même coupe, la pièce résiduelle étant l'un ou l'autre des deux hexaèdres. On compte ainsi vingt-sept chemins pour arriver aux sept hexaèdres, en considérant toutefois que les trois colonnes de droite du tableau, sont doublées par les deux troncs de pyramides triangulaires d'où elles sont issues.

Néanmoins, il existe uniquement une façon de tailler la pyramide pentagonale du graphe 3, recherchée dans la présente activité. Il faut nécessairement avoir fait la pyramide quadrilatérale avant la deuxième troncature. Quant au cube, graphe 6, il dérive aussi bien de la pyramide quadrilatérale que des troncs de pyramides.







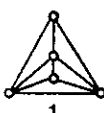
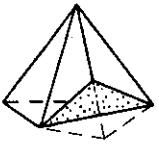
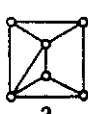
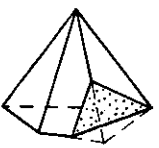
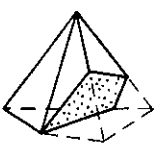
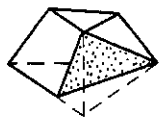
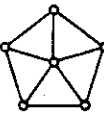
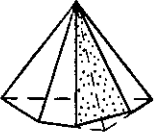
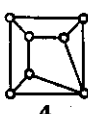
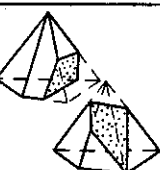
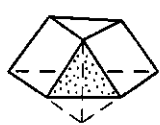
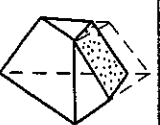
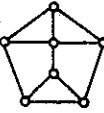
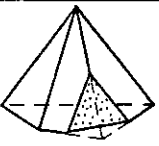
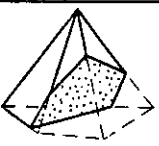
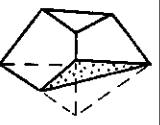
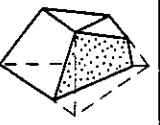
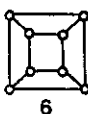
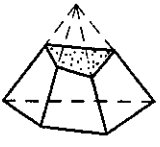
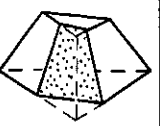
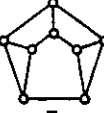

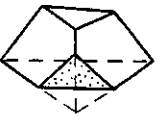
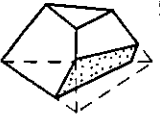
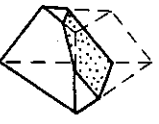
						
 1						
 2						
 3						
 4						
 5						
 6						
 7						

TABLEAU 4.1.B

Une seconde activité porte sur l'égalité de réflexion. En d'autres termes, deux figures égales sont les vues l'une de l'autre dans un miroir. Nous présentons au sujet un tétraèdre dissymétrique, figure 4.2 à gauche, dont trois arêtes incidentes à un sommet ont des longueurs déterminées de trois, quatre et cinq centimètres et ces arêtes forment entre elles trois angles droits. Il doit en faire une reproduction symétrique par réflexion, en coupant dans un cube en polystyrène de cinq centimètres de côté. Un sommet quelconque du cube détermine déjà l'angle solide droit, reste alors à mesurer les longueurs d'arêtes homologues situées de part et d'autre d'un plan de réflexion imaginaire, figure 4.2 à droite.

c. Résultats

La moitié des sujets ont bien réalisé le cube et la pyramide pentagonale dans l'activité sur les hexaèdres. À la place de ces deux solides, on a découpé le plus souvent, par erreur, l'hexaèdre du graphe 7. Ceci est explicable pour deux raisons. C'est le modèle qui offre le plus grand choix de tronçures diverses, mais surtout, c'est celui qui s'obtient par les deux tronçures qui requièrent le moins de particularités. En fait, il suffit de tronquer deux sommets quelconques du tétraèdre, en autant que les plans de coupe ne s'entrecroisent pas. On reconnaîtra le deuxième polyèdre de la rangée du graphe 7, au bas du tableau 4.1.B.

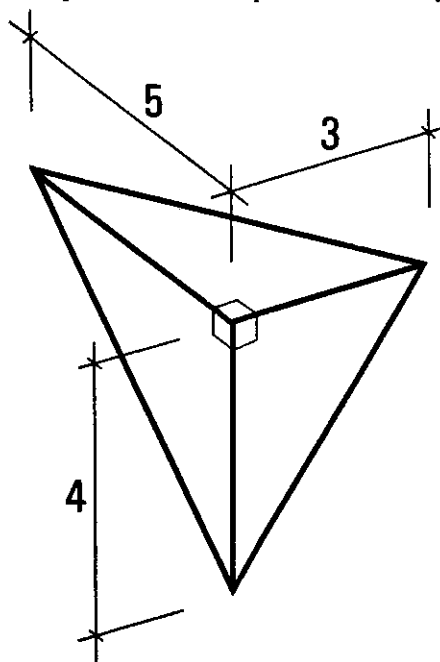
La coupe des tétraèdres symétriques, figure 4.2, a connu légèrement moins de succès. Des élèves n'ont pas fait le lien entre les angles droits du cube et celui du tétraèdre, ou ils n'ont pas su éviter de refaire exactement le même tétraèdre, symétrique par congruence.

5^e étape:

CLASSIFICATION

a. Définition

Pouvant «déterminer» des objets, leur «classification» consiste à pouvoir les reconnaître en classes d'objets équivalents, selon des propriétés projectives, affines ou métriques, jusqu'à pouvoir inventorier toutes les classes d'équivalence correspondant à une typologie.



PLAN DE
RÉFLEXION

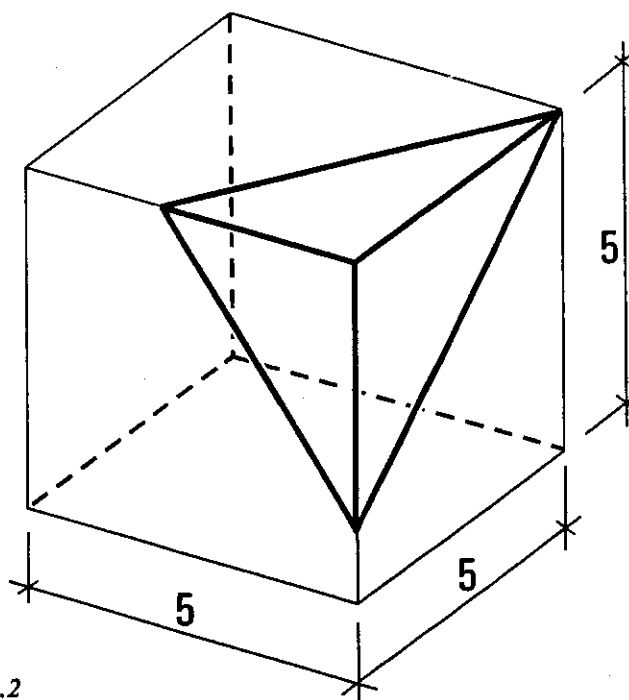


Figure 4.2

b. Activité

Pour ne pas engager le sujet dans des tâches de classification trop avancées, il a été préférable de s'en tenir à une seule activité. Celle-ci comportait tout de même deux parties étroitement reliées: faire l'inventaire de toutes les paires différentes de polyèdres que l'on obtient en sectionnant une fois des tétraèdres et dessiner un graphe de chacune des pièces ainsi découpées.

Le sujet dispose de quelques tétraèdres en polystyrène qu'il taille séparément d'une seule coupe, en essayant de ne pas se répéter. De cette manière, il peut découvrir quatre possibilités, figures 5 a, b, c et d: trois sections sont triangulaires, a, b et c, et une est quadrilatérale, d. Si on se réfère au haut du tableau 4.1.B, on constate que les trois premières tronçatures du tétraèdre sont les mêmes que nous cherchions, la quatrième étant celle qui passera le long d'une arête, figure 5 c. À côté de ces sections, figures 5, sont illustrés les couples de nouveaux polyèdres qui en sont dérivés, suivis de leurs graphes correspondants. Le sujet avait le choix, pour les troncs de pyramides et la pyramide quadrilatérale, de tracer l'un ou l'autre des graphes isomorphes.

c. Résultats

Les deux tronçatures séparant un tétraèdre d'un tronc, figure 5 a, puis deux tétraèdres, figure 5 c, ont été produites par presque tous les sujets; tandis qu'environ la moitié d'entre eux seulement ont vu les deux autres, figures 5 b et d. Ces dernières exigent plus de discernement dans le choix des points de coupe, en comparaison notamment avec la simple tronçature d'un sommet, figure 5 a, qui est presque spontanée.

OBSERVATIONS

Dans un premier temps, nous avions imaginé autant d'activités qu'il en fallait pour en répartir quelques-unes dans les cinq étapes. Mais une pré-expérimentation a vite démontré que certaines d'entre elles devaient être modifiées ou mises de côté, compte tenu du niveau de connaissances de nos élèves. Voyons deux exemples.

Une activité en *détermination* présentait pour les sujets une difficulté technique due à un manque d'apprentissage. Il s'agissait de compléter le tracé exact d'un

développement-plan, déjà amorcé, d'une pyramide quadrilatérale, dont la base et un des côtés sont donnés, figure 6. Les instruments mis à leur disposition étaient un compas, une règle graduée et un crayon. L'emploi du compas pour reporter des longueurs ou déterminer des perpendiculaires est malheureusement si peu connu des élèves qu'aucun d'eux n'a su l'utiliser pour construire une solution.

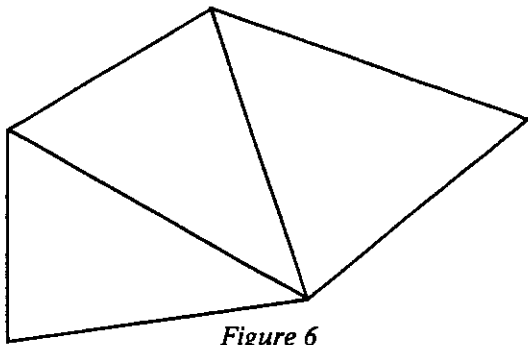


Figure 6

Pour une autre activité, semblable à la deuxième que nous avons décrite en *transfiguration*, plus haut, le graphe donné est apparu trop complexe. C'était celui d'un prisme pentagonal pyramidé sur deux de ses faces latérales, figure 7. Cette figure est composée d'un plus grand nombre d'éléments que le modèle choisi pour le test (figure 3.2.A). C'est aussi l'image dissymétrique d'un solide qui possède une symétrie bilatérale et son arrangement rend difficile toute tentative d'une vue en perspective.

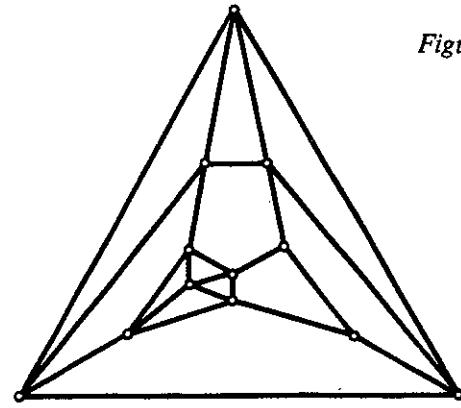
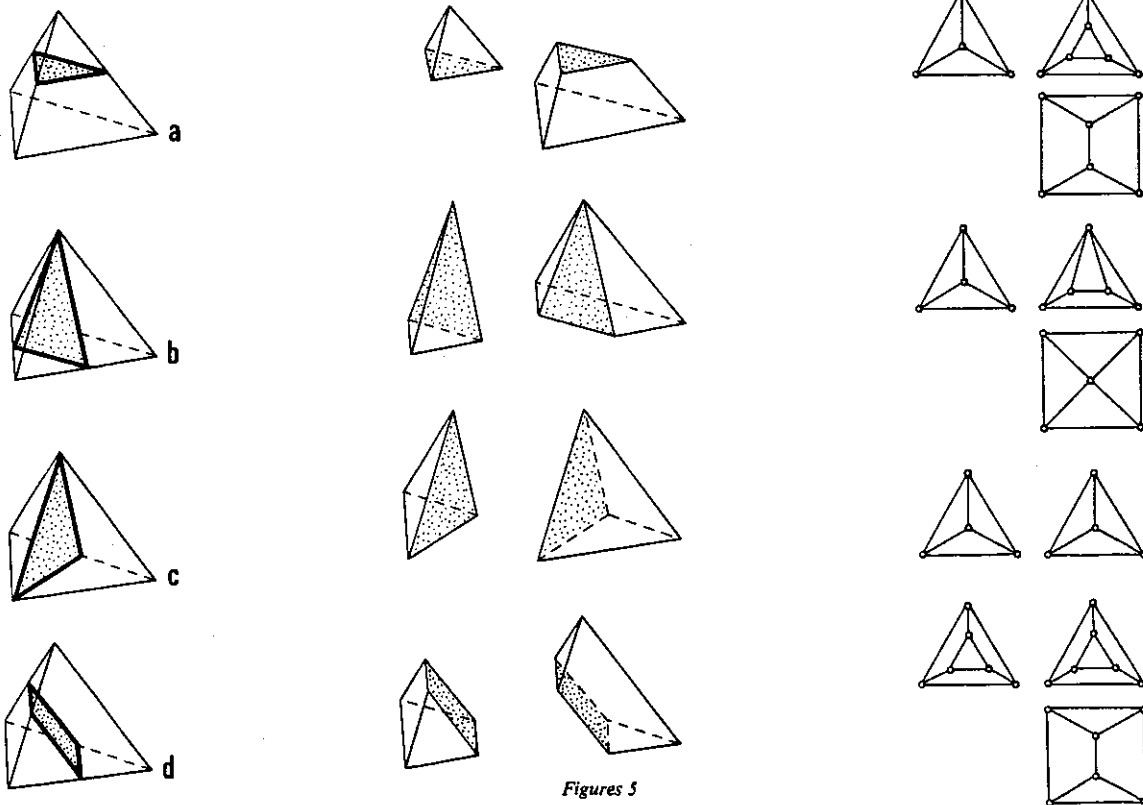


Figure 7

Dans toutes nos activités, de la visualisation à la classification, nous avons essayé, en combinant prismes et pyramides, de nous rapprocher de volumes simples et familiers. Avec les corps ronds, ces polyèdres, qui constituaient des figures de base primitives, ont été étudiés et enseignés en géométrie élémentaire depuis fort longtemps. Cependant, nous sommes peu ou pas habitués à les distinguer dans notre environnement, tels que définis par leurs propriétés géométriques. Symétriques, on les retrouve camouflés dans le schéma de divers bâtiments, d'objets ou d'emballages; mais leurs versions dissymétriques (voir figures 2.1 et 2.2) sont pratiquement inexistantes. En effet, il faut chercher longuement avant de trouver un objet quelconque, irrégulier, dont la structure est topologiquement symétrique. Même en se limitant à des objets polyédriques convexes, proches des formes que nous rencontrons, le degré d'abstraction des formes géométriques demeure élevé par rapport aux objets usuels. ■



Figures 5

Références

- BARACS, Janos, *TOPOLOGIE STRUCTURALE*, École d'Architecture, Université de Montréal, Notes de cours, 1968 ss.
- BARACS, J., DION, D., PALLASCIO, R. et PAPILLON, V., *VERS UNE DÉFINITION OPÉRATOIRE DE LA PERCEPTION SPATIALE*, in Bulletin de l'AMQ, vol. 23, no 4, 1983.
- DION, Dominique, *VISUALISATION, STRUCTURATION ET TRANSFIGURATION*, Rapport de recherche (AME 6804), Faculté de l'Aménagement, Université de Montréal, 1984.

A-PL-OT-STROPHE

IL FAUT LE LIRE : JE L'AI FAIT ET JE LE DIS

Michel CLINARD

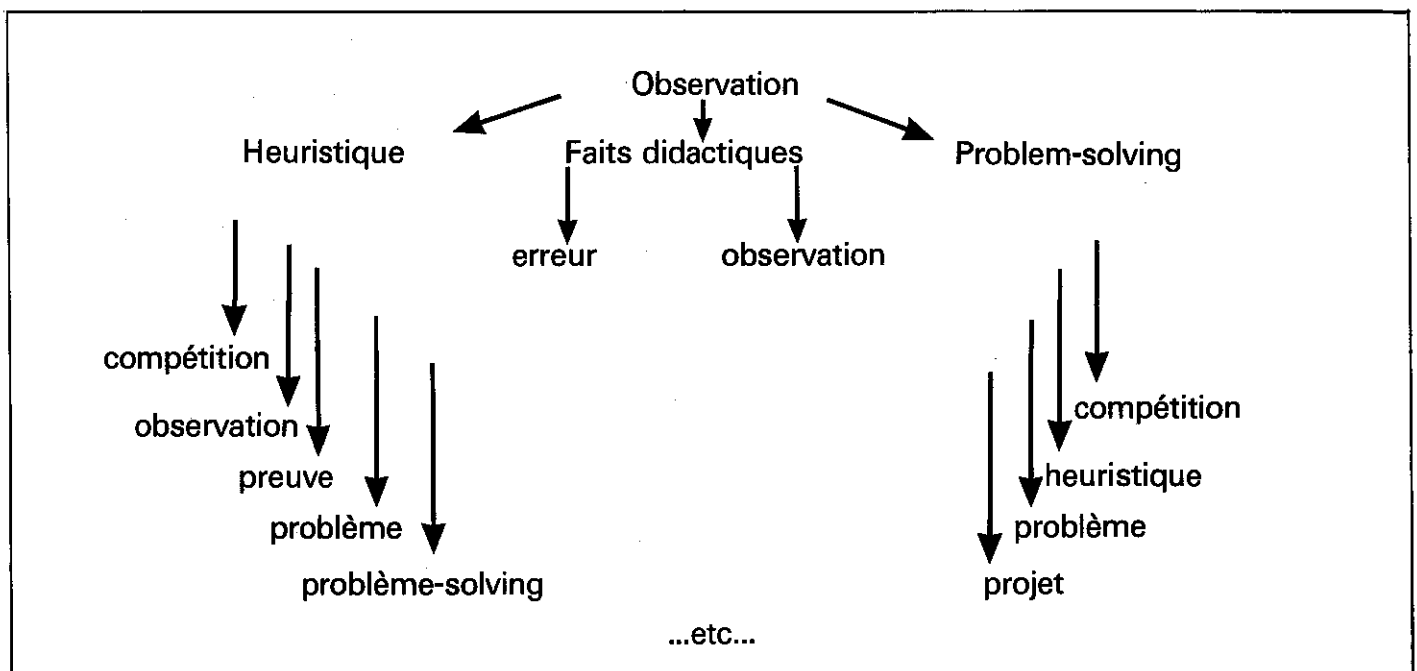


Le plaisir de la découverte

Ce gros livre de 577 pages n'est pas sans rappeler le beau roman de Georges PEREC : "La vie mode d'emploi" construit comme un puzzle avec un énorme index renvoyant aux situations de la vie. Comme chez PEREC, la lecture des index est un régal, on y retrouve des sujets qui ont intéressé, qui préoccupent ou qui ouvrent des horizons nouveaux :

*d'abord l'index des noms propres, Guy Brousseau vainqueur au hit parade avec 15 citations, puis Euler (13) et Polya (12), un tiercé qu'on peut rapprocher des contenus **didactique -mathématique- problème** qui caractérisent et résument cet ouvrage ;

**l'index des sujets abordés (organisés à la manière d'un dictionnaire raisonné) entraîne dans une démarche de recherche proche des romans "à votre façon" qui fleurissent actuellement ; le lecteur devient un acteur qui organise ses algorithmes de lecture à partir de quelques tests de choix, ainsi le mot OBSERVATION renvoie vers d'autres mots-clés, qui eux-mêmes renvoient...



Voici une manière dynamique de découvrir les différentes notions de didactique et de comprendre leurs relations. "Didactique, mode d'emploi", un titre qui aurait pu convenir pour ce livre de travail car le lecteur ayant pris connaissance d'une notion illustrée par une situation particulière doit pouvoir la décontextualiser pour la recontextualiser dans le cadre de ses préoccupations, de ses expériences, de ses projets de leçons etc... (cf : La transposition didactique, Yves Chevallard, Edition La pensée sauvage).

Enfin remarquons que l'étude, en terme de théorie des graphes, des liens entre les différents articles n'est pas abordée, ce qui amène deux réflexions : *ce livre **outil** d'étude aurait pu devenir **objet** d'étude, un moyen d'introduire les travaux de Régine Douady : dialectique outil-objet (travaux non cités dans la bibliographie).

**ce livre n'est pas autoréférent, en particulier le mot RECURSIVITE n'apparaît pas dans la longue table des notions abordées : 25 pages allant de "absence de signe ou de symbole" à "effet Weber".

Titre : Contenu du livre

Trois grandes parties :

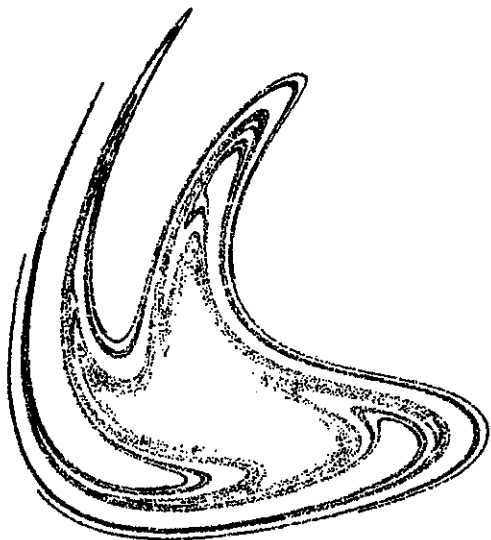
La première et la plus longue sous le titre "corpus" regroupe de nombreuses notions, témoignages, informations, comptes-rendus de recherche. Ces références sont de plusieurs ordres :

mathématique : regards nouveaux sur des notions anciennes (fractions continues, géométrie...), ouvertures vers de nouveaux objets mathématiques (fractals, analyse non-standard...)

enseignement général : évolution, travail autonome, logiciel, pédagogie par objectif...

didactique : situation d'apprentissage, transposition, contrat, observation...

En fait les catégories ne peuvent être aussi tranchées car d'après Guy Brousseau : "La didactique des mathématiques étudie les activités qui ont pour objet l'enseignement dans ce qu'elles ont de spécifiques aux mathématiques".



CONCRETISATIONS
DE LA MATHÉMATIQUE

Le champ didactique se doit aussi de prendre en compte en plus de notions mathématiques : les sciences de l'éducation, l'épistémologie, la psychologie, la sociologie, la linguistique,...

La seconde partie "outils" est fondamentale pour la bibliographie.

En revanche, les tests et grilles d'analyse des pratiques ne peuvent être considérés comme des outils mais seulement comme des exemples instructifs, de plus aucun moyen d'analyse des données recueillies n'est évoqué. On peut renvoyer à la lecture des travaux de Guy Brousseau : **questions de méthodologie**, observation des activités didactiques - analyse factorielle des correspondances (Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques - Thèse de doctorat - Bordeaux I - 1987).

La troisième partie est plus théorique.

En s'appuyant sur des concepts généraux (obstacles épistémologiques de Bachelard, constructivisme de Piaget) et sur les grandes notions didactiques de base (contrat-transposition - situation...), est définie une démarche originale sous le nom de **didactique-action** :

elle repose sur une action directe -individuelle ou en groupe- des enseignants dans **leurs** classes : recherches, situations nouvelles, observations reposant fortement sur le problème (thème longuement développé dans l'ouvrage :

situation-problème ; problème-solving ; problème ouvert... de nombreux exemples pratiques sont donnés).

Si "la didactique-action ne s'oppose pas à une recherche plus scientifique en didactique" (p. 521) - ce qui est sans doute vrai pour les contenus, les finalités, les références-on peut voir une opposition plus nette entre ceux qui sont nommés chercheurs professionnels (il faut sans doute lire les universitaires) et les praticiens (les instituteurs, les professeurs de collège et lycée).

En fait ce livre pose l'éternel problème théorie/pratique :

- construire un modèle théorique reproductible et sûr après s'être assuré de la pertinence des questions posées/versus/, être efficace dans les classes du moment, en particulier en réfléchissant sur des questions d'enseignement qui se posent avec les élèves.
- démarches conceptuelles et structurées prenant en compte des analyses à priori/versus/, confiance en l'expérience laissant souvent place aux conceptions implicites des enseignants.

Rappelons que la théorie doit expliquer la réalité ; elle précède les dispositifs expérimentaux, et la rigueur de son élaboration permet d'échapper aux comptes-rendus anecdotiques de faits de classe et aux discours d'opinions peu constructifs ("Ils ne savent plus calculer !!!" yeux au ciel - mains à la hauteur des épaules - bras - demi-pliés - soupirs : le travail didactique peut alors commencer : conception d'une thèse explicative qu'il faut confronter à la réalité par la mise en place d'expériences).

Quelques opinions en guise de conclusion

Pour ou contre la didactique-action

Les défenseurs de la didactique-action ont choisi d'agir à partir des problèmes de la classe et s'en expliquent fort bien.

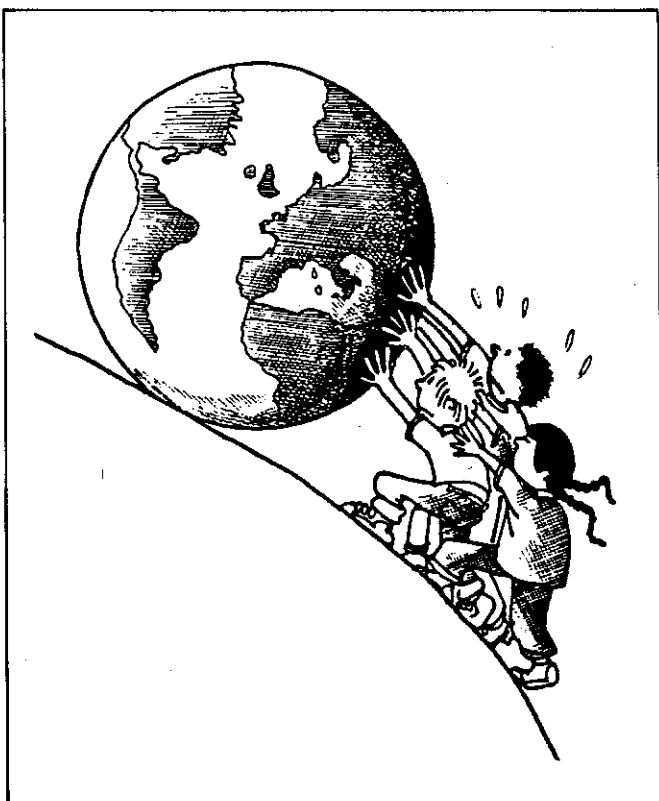
D'un point de vue didactique certaines pratiques peuvent toutefois amener quelques réserves : proposer un problème-ouvert "pour voir" n'est par forcément pertinent ; sans doute va-t-on observer des comportements intéressants liés à la situation nouvelle, motivante et dynamisante (au moins pour le professeur), les élèves auront vraisemblablement agi, mais la didactique ne se ramène pas seulement à l'action : auront-ils eu un contrôle sur leurs démarches, une formulation, une validation à mettre en place, auront-ils réellement appris quelque chose ?

L'enseignant aura-t-il réellement construit une leçon, une situation d'apprentissage ? (Il est là pour cela).

Didactique-action n'est qu'un aspect des choses, d'autres pratiques didactiques sont possibles pour les enseignants :

*partir de travaux théoriques et les adapter dans sa classe : par exemple la construction de situations fondamentales au sens de Brousseau, conduisant à une notion ou un concept mathématiques nouveaux et reposant sur les démarches d'action, de formulation ou de validation des élèves et qui se concluent par une phase d'institutionnalisation du professeur ;

**faire de sa classe un champ d'expérimentation pour une théorie en cours d'élaboration (gestion de la mémoire de la classe, itération, rôle de la formulation algébrique sont des exemples de thèmes abordés par des praticiens-chercheurs ; en général plus praticiens que chercheurs si on tient compte des conditions de travail des professeurs du second degré !).



Le choix du sous-titre "le dire et le faire" : ce "et" ambigu, plus implicatif que copulatif semble contenir une critique des discours didactiques théoriques, il conduit aussi à proposer l'exercice suivant : Trouver des situations où **le dire C'EST le faire** "Déclarer la guerre" est une réponse, existe-t-il d'autres exemples ?

Un autre sous-titre pourrait être "la pratique du problème : un outil et un objet d'enseignement".

Il apparaît mieux rendre compte des situations proposées, tout en conservant le faire et le dire.

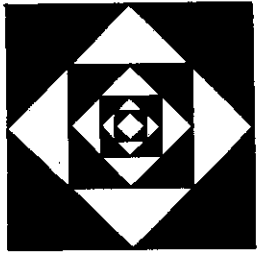
Quel que soit le sous-titre : un très beau livre à mettre entre toutes les mains et à consulter régulièrement, référence de base de votre CDI, source d'idées riches d'enseignement, point de départ de situations de classes et une bonne introduction à la didactique.

PS : Même si le savoir n'a pas de prix, il peut parfois s'acheter pour 400 F environ. ■

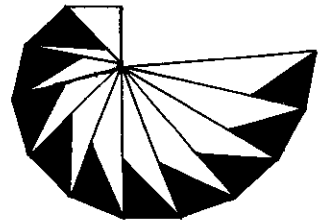
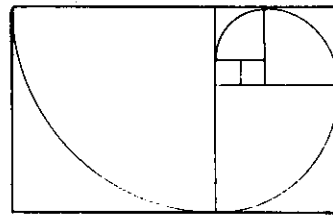
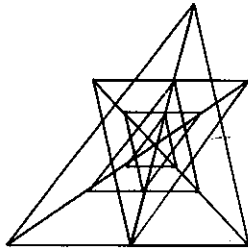
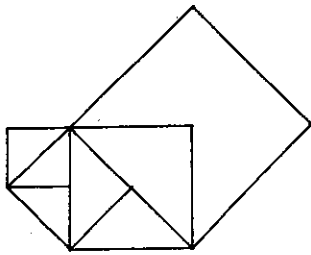
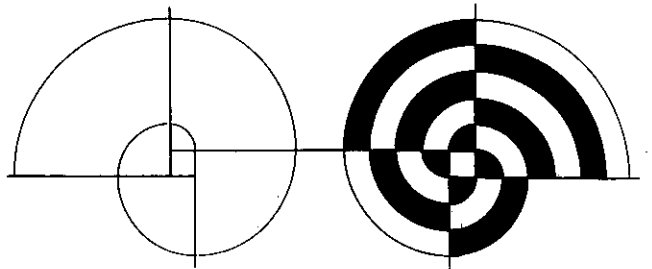
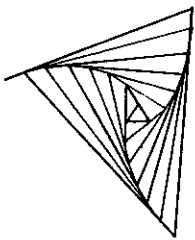
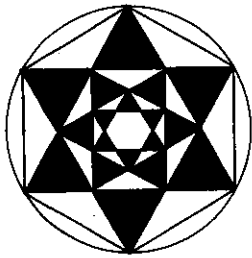
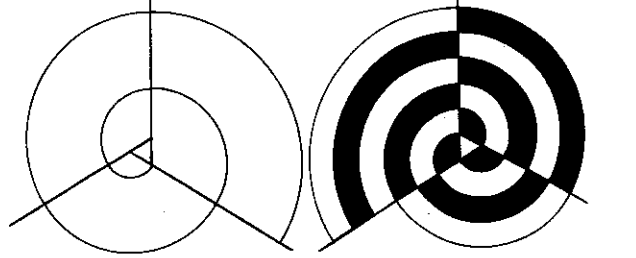
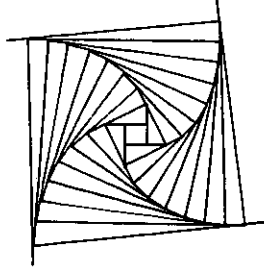
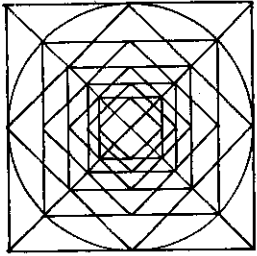
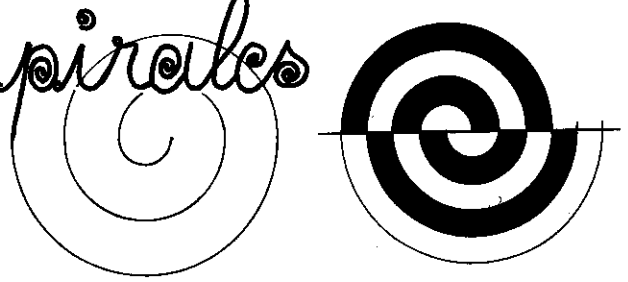
Extrait du livre pages 520-521 (ci-dessous) et, au verso, pages 223, 224 et 312, 313

Pour fixer les idées, nous livrons ici quelques éléments permettant de comparer la recherche didactique de type traditionnel et la didactique-action. Il ne s'agit bien sûr que d'un schéma ; dans la réalité, rien n'est jamais aussi tranché. Ce tableau fournit des points de repère extrêmes qui ne sont pas des valeurs mais des caractéristiques de pratiques sociales différentes.

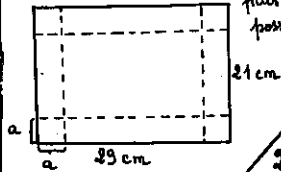
	Recherche traditionnelle	Didactique-action
Au départ	Une question pertinente pour la communauté scientifique.	Une question que se pose un praticien dans sa classe.
Terrain	Des élèves (ou des enfants) en situation de classe (ou de laboratoire).	Les élèves du praticien dans sa classe.
Recherche d'objectivité	Dans une implication le moins grande possible des chercheurs.	Dans la prise de conscience de sa propre implication dans l'action.
Méthode	Expérimentale sur des aspects pointus.	Clinique sur des aspects globaux
Les acteurs	Deux populations hiérarchisées : - des chercheurs payés pour cela ; - des praticiens qui fourniront un terrain et une collaboration.	Une population de praticiens-chercheurs.
Attitude vis-à-vis du savoir	Le savoir didactique est central, un but en soi. C'est le point de départ sur lequel on s'appuie et le point d'arrivée qu'il s'agit d'augmenter.	Le praticien, par son action, cherche à augmenter son savoir didactique. Il utilise les travaux des autres comme moyens, parmi d'autres, de faire progresser son interrogation.
Attitude vis-à-vis du temps	Deux temps avec une chronologie revendiquée : maintenant = comprendre ; plus tard = agir.	Un temps dialectique : le praticien tente simultanément d'agir et (pour) comprendre.
Moyens	Didacticiels* ou situations* didactiques produits par des ingénieurs didacticiens.	Situations didactiques produites par les praticiens.
Productions attendues	Rapports - Thèses - Articles pour revues spécialisées. Situations didactiques.	Situations et moyens didactiques. Fabrication d'outils didactiques immédiatement utilisables.
Effets attendus	. Appropriation par le chercheur des compétences* d'autres chercheurs. . Amélioration de son statut de chercheur, de sa carrière. . Apparition de nouvelles questions, de nouvelles hypothèses.	. Développement de ses compétences. . Amélioration des conditions d'enseignement. . Enonciation des conclusions opératoires. . Modifications de la situation sur laquelle porte la recherche.



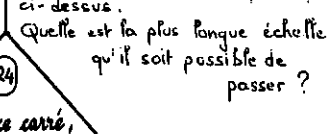
Continue... spirales



22 Avec une feuille de 24 x 29 cm, trouver a pour que le volume de la boîte formée soit le plus grand possible.

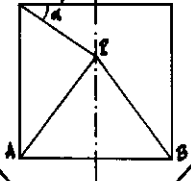


23 On veut faire passer une échelle dans le couloir représenté ci-dessus. Quelle est la plus longue échelle qu'il soit possible de passer ?

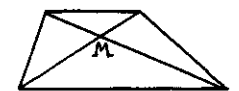


25 Tracer deux cercles extérieurs. Donner l'ensemble des points M du plan, tels que toutes les droites qui passent par ce point M, rencontrent au moins un des cercles.

24 Dans ce carré, trouver l'angle α pour que le triangle IAB soit équilatéral.



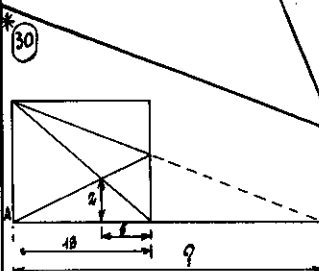
26 Où placer le point M pour que le trapèze soit partagé en quatre triangles de même aire ?



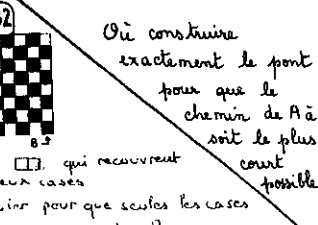
27 Quels sont les nombres entiers qui ont un nombre impair de diviseurs ?

28 Inventer une équation qui admette $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ comme solution et dont les coefficients soient entiers.

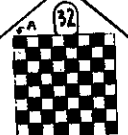
29 Chercher s'il existe un décimal d, tel que $d^5 = 36,875681$.



30 A quelle distance de A, le point M est-il situé ?



31 Où construire exactement le pont pour que le chemin de A à B soit le plus court possible ?

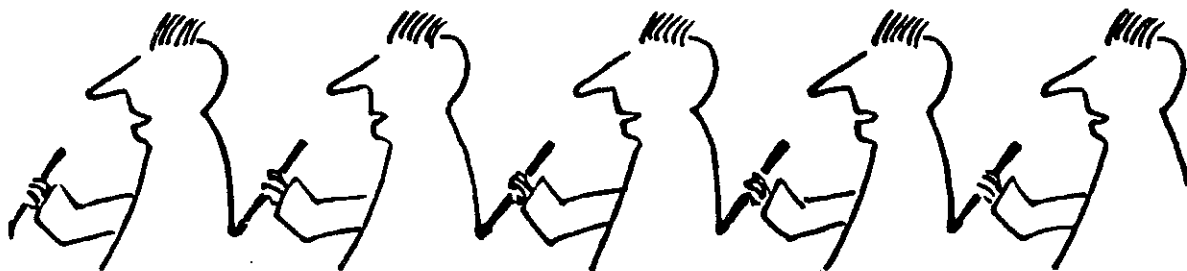


32 On dispose de cartons \square qui recouvrent exactement deux cases. Comment couvrir l'échiquier pour que seules les cases A et B ne soient pas recouvertes ?

AU RYTHME DES ALGORITHMES

- Bonzaï !!! -

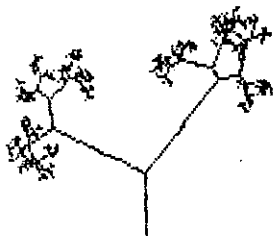
*Cette rubrique pourra bientôt s'appeler (elle-même) le courrier itératif.
En effet les collègues nous envoient leurs copies d'écran accompagnées de petits programmes, le tout étant bienvenu pour agrémenter la cuisine récursive du chef Logo.*



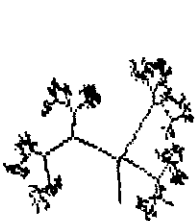
A recursive situation (Hommage à Saul Steinberg)

D'abord quelques bonzaïs (fractalisés et aléatoires - cf. PLOT 37) proposés par Etienne Thépot de Saint Jean de Braye (45).

POUR ARBRE : N : C
SI : N = 0 /STOP/
DONNE MOT "K : N HASARD SOMME 3 ENT : C
DONNE MOT "D : N SOMME 30 HASARD 45
DONNE MOT "G : N SOMME 30 HASARD 45
AV CHOSE MOT "K : N
TD CHOSE MOT "D : N
ARBRE : N - 1 : C / 2
TG SOMME CHOSE MOT "D : N CHOSE MOT "G : N
N
ARBRE : N - 1 : C / 2
TD CHOSE MOT "G : N
RE CHOSE MOT "K : N
FIN



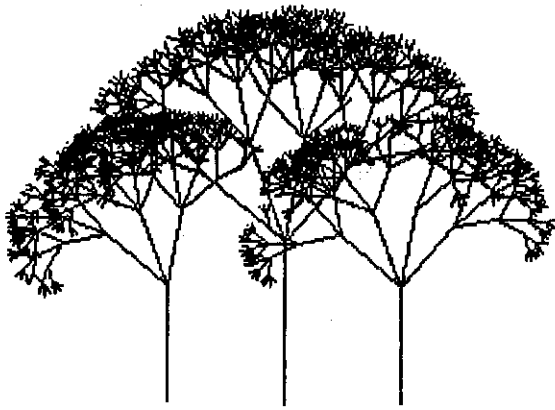
POUR PERSIL
VE ME 1 CT LC RE 65 BC
ARBRE 9 100
COPIE
PERSIL
FIN



LES DANGERS DE LA RECURSIVITE !



Et une forêt de Bonzaïs proposée par **Arlette Lacouture** d'Angoulême (16) qui souhaite d'autres dessins sans solution faisant référence à des procédures récursives à trouver par les lecteurs.



ARBRE 1 50 1000 4 4

ARBRE 1 60 4 4 4

ARBRE 1 50 4 4 1000

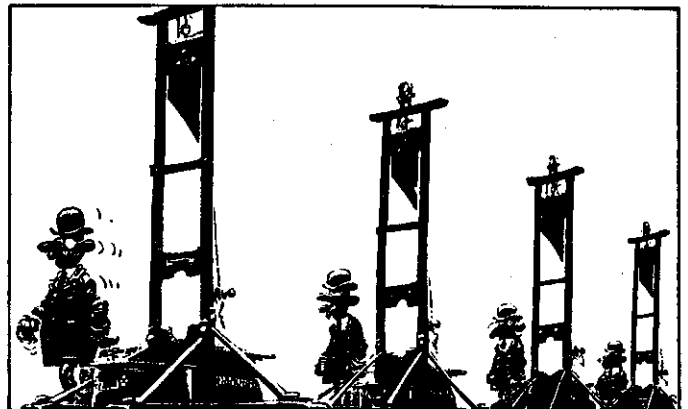
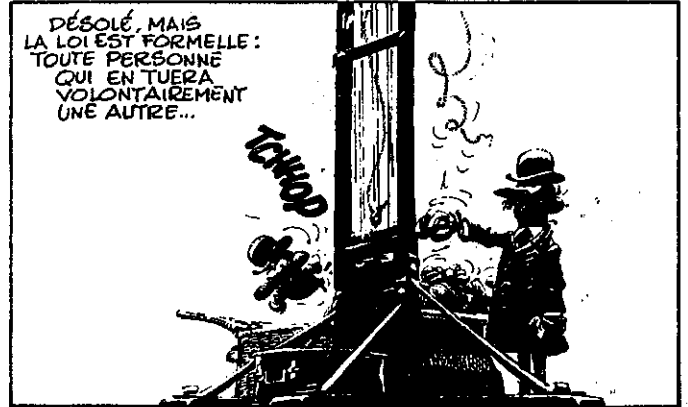
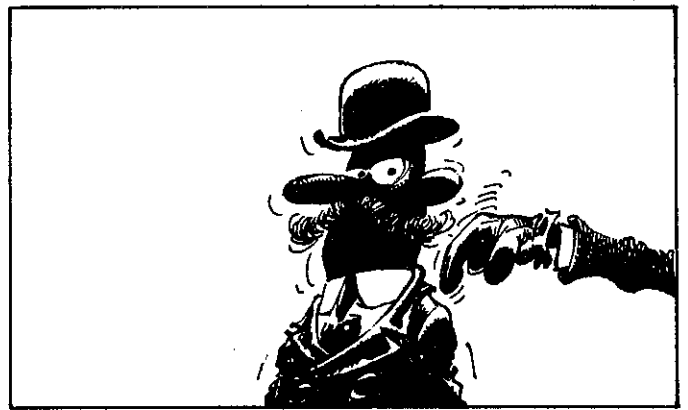
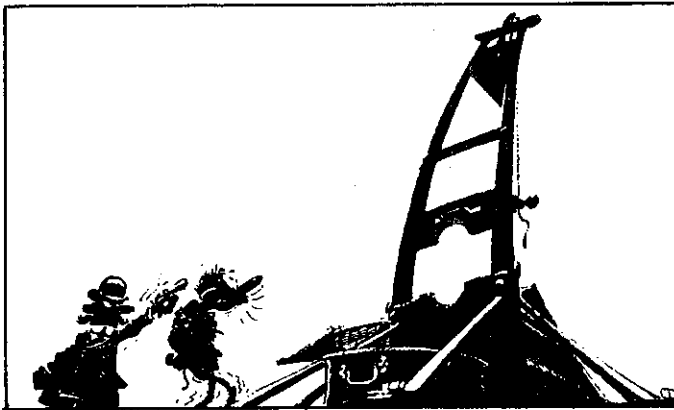
POUR ARBRE 1 : N : L
 SI OU EGAL? : N 0 PLP? : L 4 /STOP/
 AV : L TG 50 ARBRE 1 HASARD 2 : L*.6
 REPETE 3 /TD 30 ARBRE 1 HASARD 2 : L*.6/ TG 40 RE : L
 FIN

POUR UN ARBRE PLUS FOURNI :

POUR ARBRE2 : N : L
 SI OU EGAL? : N 0 PLP? : L 4 /STOP/
 AV : L TG 50 ARBRE2 HASARD 4 : L*.6/ TG 40 RE : L
 REPETE 3 /TD 30 ARBRE2 HASARD 4 : L*.6/ TG 40 RE : L
 FIN

POUR ARBRE : N : L : A : B : C
 SI OU EGAL? : N 0 PLP? : L 4 /STOP/
 AV : L TG 50 ARBRE HASARD : A : L*.6 : A : B : C
 REPETE 2 /TD 30 ARBRE HASARD : B : L*.6 : A : B : C/ TD 30 ARBRE
 HASARD : C : L*.6 : A : B : C
 TG 40 RE : L
 FIN ■

IL NE FAUT PAS CONFONDRE PÂLE CAPITAIN ET PEINE CAPITALE !



Extrait de "Idées Noires (et Récursives)"
 André Franquin - J'ai Lu - 1986

OBJETS 3-D EN MOUVEMENT SUR ECRAN

Pierre VIGNES - Toulon

L'Association EPI, Enseignement Public et Informatique, publie tous les 3 mois un bulletin sur les utilisations pédagogiques de l'Informatique.

Dans le n° 39, voici ce que propose de réaliser P. Vignes avec un Apple IIe, une imprimante Epson RX80 et le langage Basic d'Applesoft.

Alors, à votre tour de faire tourner les tables !

Intentions

Avec un entraînement moyen à la programmation, chacun peut se familiariser avec la pratique du graphisme tridimensionnel mobile, soit pour répondre à des besoins pédagogiques ou de recherche, soit pour se distraire tout simplement.

Dans le premier cas, l'examen des figures successives apparues sur l'écran permet par exemple d'en sélectionner une seule, celle qui visualise un maximum d'information et mérite d'être conservée pour rendre compte d'un objet ou d'un phénomène (graphique à 3 dimensions).

Dans le deuxième cas, en filmant chaque figure achevée à l'aide d'une caméra qui accepte le déclenchement image par image, on réalise une animation curieuse ou amusante.

Les deux exemples choisis se rattachent à la seconde éventualité.

Le logiciel PER7 fait tourner le globe terrestre, vu légèrement incliné de manière à privilégier l'hémisphère Nord, mieux meublé par les continents, et par contre allégé de nombreuses îles telles que la Nouvelle Calédonie (qui pourtant ne se laisse pas oublier par l'actualité). On peut sans difficulté compléter et affiner les tracés au prix d'un allongement substantiel du temps d'exécution.

Le logiciel PER8 fait voltiger une table basse de salon comportant 12 pièces parallélépipédiques dont un plateau carrelé.

Entrée et évolution des données principales

Ces données concernant la position dans l'espace des 182 sommets de 7 polygones (non plans) ou des 96 sommets de 12 polyèdres.

Leur nombre, leur nature, leur unité, varient en cours d'exécution, ainsi que leur forme de stockage (DATA ou tableaux).

Au départ, les données brutes entrent sous forme de DATA. Elles ne sont pas plus nombreuses que strictement nécessaire. Les valeurs (exprimées) et les unités (sous-entendues) sont celles des mesures expérimentales.

A la fin, les données sortent d'un tableau. Il s'agit de deux des 3 côtes tridimensionnelles de chaque point : positions en hauteur et en largeur par rapport au centre de l'écran ; la troisième dimension n'intervient plus dans l'affichage alors qu'elle a été prise en compte à part entière lors des opérations intermédiaires. L'unité est l'interligne, égale à l'intercolonne sur l'écran qui est orthonormé (une correction s'impose sur imprimante où les cotes en largeur sont multipliées par 0.83).

• Exemple PER7 :

- lignes 10 à 23 : latitude et longitude en degrés (planisphère)

- ligne 45 : latitude et longitude en radians

- ligne 70 : hauteur, largeur, profondeur nouvelles en unité trigonométrique (entre +1 et -1)

- ligne 145 : hauteur, largeur nouvelles en interlignes (valeur ci-dessus multipliée par 90)

• Exemple PER8 :

- lignes 20 à 27 : pour un huitième des points seulement (sommets 1) hauteur, largeur, profondeur en cm, ainsi que longueur des trois arêtes contiguës en cm

- ligne 80 : pour tous les points, hauteur, largeur, profondeur initiales en interlignes (valeur en cm multipliée par 1.45)

- lignes 282 et 285 : pour tous les points, hauteur, largeur nouvelles en interlignes.

Rotations combinées et changements de cotes tridimensionnelles

Dans le cas de figure le plus complet, trois rotations virtuellement simultanées se produisent à des vitesses différentes dans 3 plans perpendiculaires entre eux et dont l'intersection coïncide avec le centre de l'écran. Combinées, elles réalisent un mouvement original dont témoignent les animations filmées. En réalité, parce que c'est la démarche la plus commode sinon la seule, les 3 rotations se succèdent discrètement entre deux affichages de figures achevées :

- rotation dans le plan horizontal ("tourbillon") ; le vecteur hauteur est inchangé, tandis que les vecteurs largeur et profondeur varient en sens inverse (pour la valeur absolue)

- rotation dans le plan sagittal ("tangage") ; le vecteur largeur ne change pas, tandis que les vecteurs hauteur et profondeur varient en sens inverse (id)

- rotation dans le plan frontal ("roulis") ; le vecteur profondeur est inchangé, tandis que les vecteurs hauteur et largeur varient en sens inverse (id).

A trois reprises au cours des calculs, un angle est connu au titre d'arc-tangente. Mais, alors que deux valeurs angulaires comprises entre 0 et 2π correspondent à une tangente donnée, l'ordinateur ne retient que celle ayant la plus faible valeur absolue et qui n'est pas forcément la bonne.

Or $E = \text{ATN}(C/D)$ où C et D sont proportionnels à $\text{SIN}(E)$ et $\text{COS}(E)$.

Par conséquent une correction est possible :
 IF $D < 0$ THEN $E = E + 3.1416$

La même correction s'intègre implicitement aux calculs, sans test conditionnel, si l'on écrit directement :
 $E = \text{ATN}(C/D) + 1.5708 = (1 - D/\text{ABS}(D))$

On trouvera cette expression sous des écritures à peine différentes dans PER7 (ligne 70) et PER8 (ligne 205).

Les principales différences des deux logiciels relatives aux rotations sont les suivantes.

• Exemple PER7

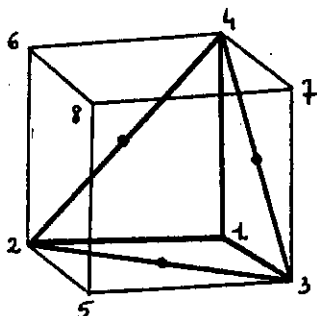
Il y a seulement deux rotations : l'une dans le plan horizontal est progressive (la Terre tourne) ; l'autre dans le plan sagittal est constante (la Terre reste faiblement inclinée vers l'observateur). De ce fait, pour chaque point de la figure, tous les calculs sont condensés (ligne 70) et ils ne nécessitent pas de boucle. Ils comportent cependant 8 expressions trigonométriques dont 2 pour le passage du planisphère au globe et 6 pour la rotation. Et surtout les opérations trigonométriques se renouvellent pour les 182 points de chaque figure, contribuant à ralentir sensiblement l'exécution.

• Exemple PER8

Il y a trois rotations, toutes progressives et à des vitesses différentes. Elles s'inscrivent dans une boucle qui totalise 8 opérations trigonométriques par point (lignes 185 à 225).

Par contre les transformations sont simplifiées et accélérées du fait que les 12 pièces du meuble sont des parallélépipèdes rectangles, de surcroît parallèles entre eux. Les transformations trigonométriques sont opérées sur un **cube témoin** invisible dont toutes les cotes initiales (hauteur, largeur, profondeur) sont unitaires (+1 ou -1). En fait les calculs ne s'imposent que pour 4 sommets du cube, individualisant un **tétraèdre témoin** (lignes 185 à 225). On connaît aussitôt les cotes des barycentres de 3 faces du cube témoin (lignes 270, 272).

Ensuite le calcul des deux cotes utiles, des 8 sommets de chacun des 12 parallélépipèdes consiste en une somme de vecteurs, sans aucune intervention de fonctions trigonométriques (lignes 282 et 285). Cette arithmétique élémentaire qui ne nécessite même pas d'élevation à une puissance ou d'extraction de racine autorise une exécution très rapide.



Graphisme : L'occultation des parties cachées

L'occultation a priori

Elle consiste dans le **non-affichage** de segments superflus chaque fois que des tests simples permettent de les identifier.

• Exemple PER7

Une première nécessité est d'individualiser les continents et les îles. Les 182 points sont déclarés comme un ensemble simple non subdivisé en sous-ensembles. Ils sont reliés de proche en proche, deux à deux, dans le cadre d'une instruction HPLLOT (ligne 145). Mais un test préalable crée le hiatus nécessaire dès l'achèvement de chaque polygone (ligne 140). Il ne s'agit pas d'un test logique, la ligne d'instruction recelant en réalité une mini-banque de données.

Une deuxième nécessité est de masquer la face cachée du globe. C'est ici qu'intervient la cote de profondeur qui pourtant n'est pas utilisée pour le positionnement des points au moment de l'affichage. Si l'une quelconque des deux extrémités d'un segment a une cote de profondeur négative, le segment n'est pas affiché (ligne 135). Il s'agit cette fois d'un test logique. Cette loi du "tout ou rien" pour l'affichage des segments fait disparaître complètement des secteurs côtiers à cheval sur la ligne d'horizon (et qui, d'ailleurs, devraient être courbes et non droits).

Mais les déformations dues à la perspective amènent un écrasement général des tracés au voisinage du cercle qui matérialise l'horizon et l'on conviendra, à l'examen des figures, que l'artefact apparaît très peu.

• Exemple PER8

Chacun des 12 parallélépipèdes, considéré isolément, a typiquement 9 de ses 12 arêtes visibles, ce nombre tombant à 7 ou à 4 dans des situations très particulières qui ne se présentent jamais parfaitement au cours des rotations. Trois arêtes sont cachées à tout instant. Leur sommet commun est caractérisé par le fait qu'il est virtuellement le plus éloigné derrière/l'écran. Lors du calcul des cotes du tétraèdre témoin, celui des 8 sommets du cube témoin qui détient le record de profondeur est reconnu. Son numéro d'ordre est X (lignes 226 à 231). Par la suite, pour chacun des parallélépipèdes, les segments dont l'une des extrémités est le point de rang X sont sautés (ligne 365).

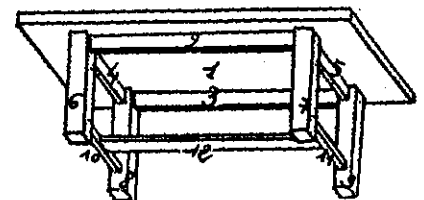
C'est encore le numéro d'ordre X du sommet du cube témoin ayant la plus grande profondeur qui détermine si le carrelage du plateau doit être ou non affiché (ligne 390). En effet si $X = 1, 2, 3$ ou 5 , la table est inclinée vers l'observateur.

L'occultation a posteriori

Cet aspect plus délicat ne concerne que le logiciel PER8 et il est illustré ici pour la position n° 4 (table vue par dessus) et la position n° 14 (table vue par dessous).

Tout d'abord l'**ordre d'apparition des éléments** dépend encore du rang X du sommet du cube témoin ayant la plus forte cote de profondeur. C'est ainsi, pour n'en prendre qu'un seul, que le plateau s'affiche en premier ou en dernier rang. L'ordre d'affichage est préétabli en mémoire (lignes 142 à 160 et ligne 167).

Ensuite l'affichage en clair des arêtes visibles de tout nouvel élément qui apparaît est précédé de l'**affichage en noir** de trois faces contigües du parallélépipède, par balayage des surfaces (lignes 310 à 340).



Ainsi se trouvent gommées des structures déjà affichées en clair et qui ne doivent pas persister en transparence. La situation des 3 faces à noircir dépend encore du rang X du sommet du cube témoin le plus éloigné derrière l'écran. Elle est inscrite en mémoire dans les mêmes DATA et le même tableau Q que l'ordre d'affichage des éléments.

N.B. : La méthode décrite consiste à afficher, apparemment pour rien, des structures graphiques qui sont ensuite effacées, en partie ou en totalité. Dans l'exemple d'affichage décomposé de la figure 4, cinq parallélépipèdes sont entièrement recouverts. Mais l'exécution est plus rapide que s'il fallait procéder au seul affichage des détails définitifs, en mettant en œuvre de longs calculs préalables. Avec d'autres moyens d'affichage (écran non graphique, accès direct à l'imprimante, table traçante), c'est pourtant la contrainte qu'il faudrait accepter.

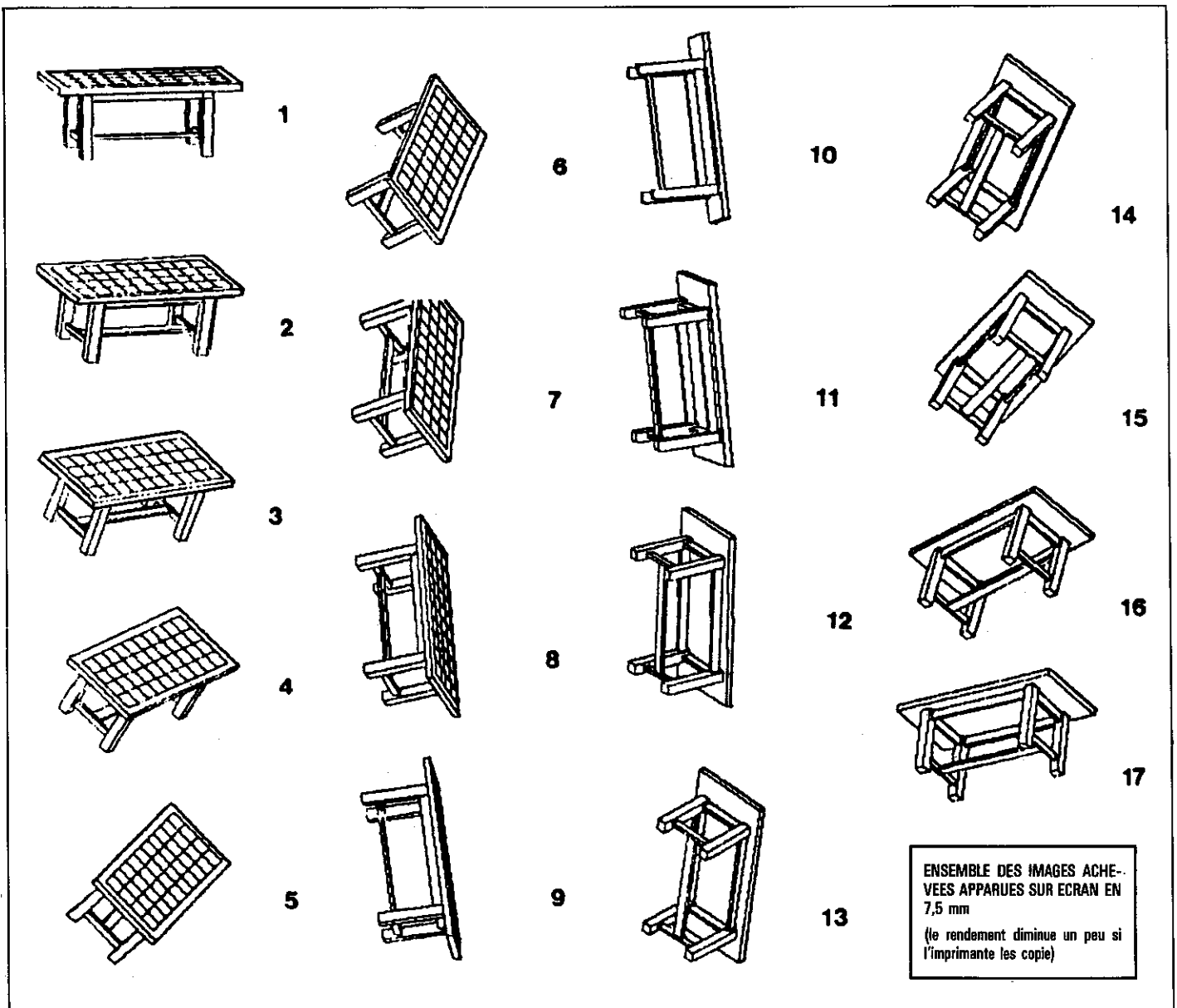
Délais d'exécution

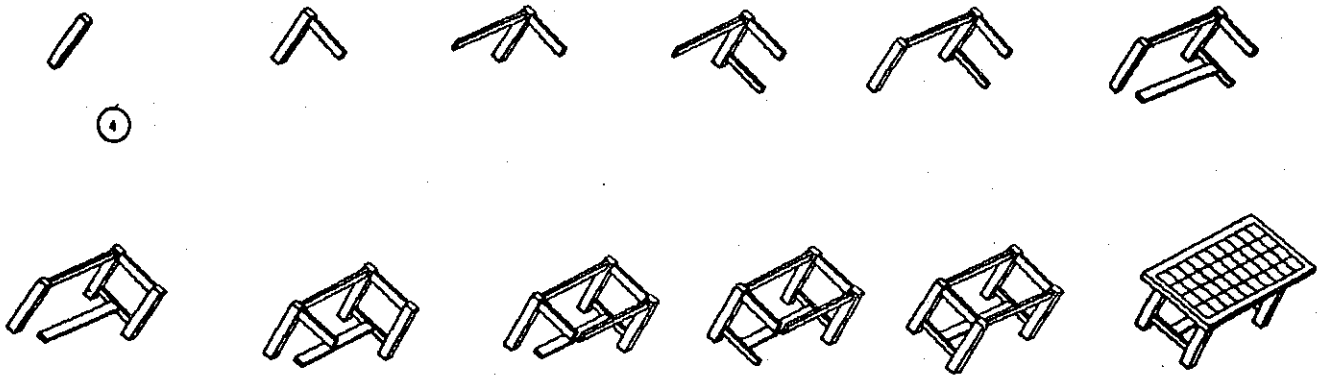
Le logiciel PER7 exécute une nouvelle figure toutes les 135 secondes. Ce délai est assurément excessif. C'est alors qu'il conviendrait de remplacer le langage évolué par le langage assembleur ou par le langage machine. Ce laps de temps de 2 minutes 1/4 s'explique par le nombre d'opérations trigonométriques qui s'élève à $8 \times 182 = 1456!$

Le logiciel PER8, par contre, ne demande que 27 secondes (cinq fois moins) pour réaliser entièrement une figure. Les calculs proprement dits sont rapides du fait qu'il n'y a que $9 \times 4 = 36$ opérations trigonométriques. En fait l'essentiel du temps d'exécution est pris par l'affichage en noir des silhouettes des éléments, avant que leurs arêtes apparaissent en clair. Mais le délai d'une demi-minute environ reste raisonnable, d'autant plus qu'il n'y a pratiquement aucune attente ennuyeuse ; on assiste à la construction de la figure comme sur une notice de montage illustrée de mobilier livré en kit.

Conclusion

Les exemples proposés ne couvrent que des cas limités de graphisme, puisque les solides choisis sont porteurs de lignes réelles qui sont l'objet des transformations. Il est beaucoup moins aisé et rapide de projeter des contours virtuels de surfaces courbes et nues, telle la forme d'une simple poire. Mais, malgré leurs limites, les logiciels décrits démontrent l'opportunité de toujours rechercher des raccourcis logiques qui optimisent les exécutions. A cet égard, l'aspect original du logiciel PER8 réside dans son cube témoin qui, d'une manière économique, n'assume pas moins de cinq fonctions différentes.■





REPRESENTATION EN PERSPECTIVE D'UN OBJET CONSTITUE DE DOUZE ELEMENTS PARALLELEPIPEDQUES ET ANIME D'UN MOUVEMENT COMPLEXE (rotations de vitesses différentes dans trois plans)

```

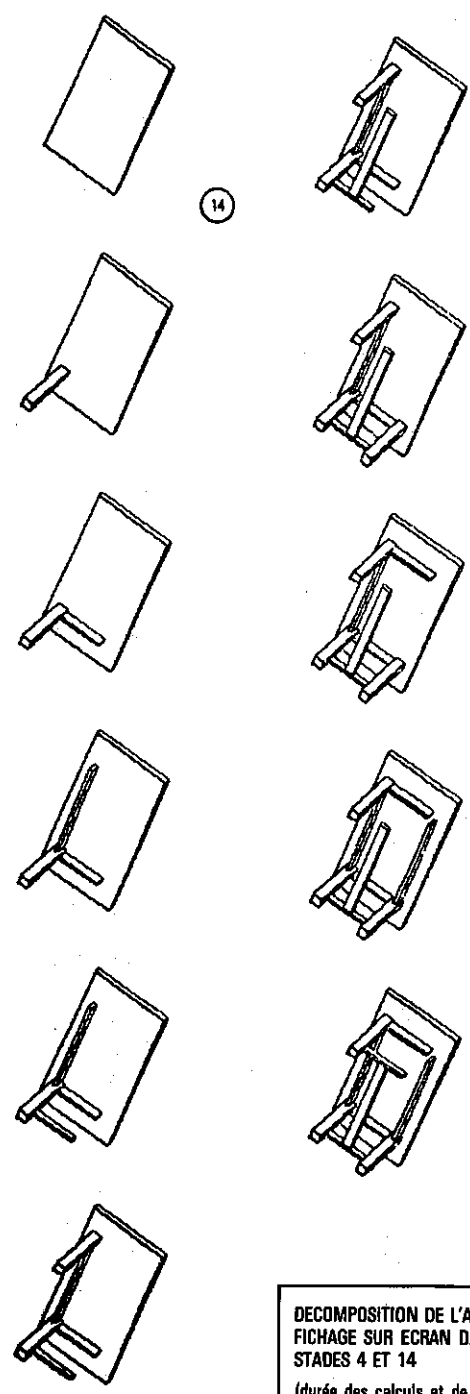
1 REM *PERB Pierre VIGNES MA
  RS BS
2 REM *FIGURATION D'UNE TABLE DE
  BALON
3 DIM T(12,8,3): DIM U(4,3): DIM
  Q(8,16): DIM V(8,2): DIM Y(3
  )
4 REM *DONNEES INITIALES
5 REM *COTES INITIALES DES 4
  SOMMETS DU TETRAEDRE TEMOIN
6 DATA 1,1,1,-1,1,1,1,-1,-1,-1,
  1
7 FOR W = 1 TO 4
8 FOR K = 1 TO 3
9 READ U(W,K)
10 NEXT K
11 NEXT W
12 REM *COTES INITIALES SOMMETS
  1 DES 12 PARALLELEPIPEDES
  (PAR REFERENCE AU CENTRE DE
  L'ECRAN)
13 DATA 55,34,34,-34,38,-34,40,-
  34,40,-36,38,36
14 DATA -18,-12,-12,-12,22,2
  2,22,22,15,15,14
15 DATA 25,-16,18,14,14,-14,-14,
  20,20,14,14,3
16 REM *LONGUEURS DES ARÊTES DES
  12 PARALLELEPIPEDES
17 DATA 110,68,68,2,2,6,6,6,6,2,
  2,72
18 DATA 4,6,6,6,6,40,40,40,4,
  4,2
19 DATA 80,2,2,28,28,6,6,6,6,28,
  28,6
20 FOR K = 1 TO 6
21 FOR Z = 1 TO 12
22 READ U(W,Z)
23 NEXT Z
24 NEXT K
25 REM *COTES INITIALES DES 8
  SOMMETS DES 12 PARALLELEPIPE
  DES
26 FOR Z = 1 TO 12
27 FOR K = 1 TO 3
28 IF K > 1 THEN B = 0
29 IF K = 1 THEN W = 5 OR W = 6 OR
  W = 8 THEN A = 1
30 IF K < 2 THEN W = 7 OR
  W = 8 THEN A = 1
31 IF K < 3 THEN B = 0
32 IF K = 3 OR W = 5 OR W = 7 OR
  W = 8 THEN A = 1
33 T(Z,W,K) = (Q(K,Z) - Q(K + 3,Z)
  ) * A * 1.45
34 NEXT W
35 NEXT K
36 NEXT Z
37 REM *ORDRE AFFICHAGE DES 12
  PARALLELEPIPEDES ET POSITION
  DES 3 FACES DE CHACUN D'EUX
  A NOIR/CLAIR
38 DATA 9,5,3,11,8,12,7,4,2,10,
  6,1,7,6,5,7
39 DATA 8,4,3,10,9,12,6,5,2,11,
  7,1,8,4,3,6
40 DATA 7,5,2,11,6,12,9,4,3,10,
  8,1,8,4,2,8
41 DATA 1,9,5,3,11,8,12,7,4,2,1
  0,6,8,3,2,8
42 DATA 6,4,2,10,7,12,8,5,3,11,
  9,1,7,6,1,7
43 DATA 1,8,4,3,10,9,12,6,5,2,1
  1,7,5,1,7
44 DATA 1,7,5,2,11,6,12,9,4,3,1
  0,8,6,5,1,6
45 DATA 1,6,4,2,10,7,12,8,5,3,1
  1,9,4,3,2,4
46 FOR W = 1 TO 8
47 FOR Z = 1 TO 16
48 READ Q(W,Z)
49 NEXT Z
50 NEXT W

```

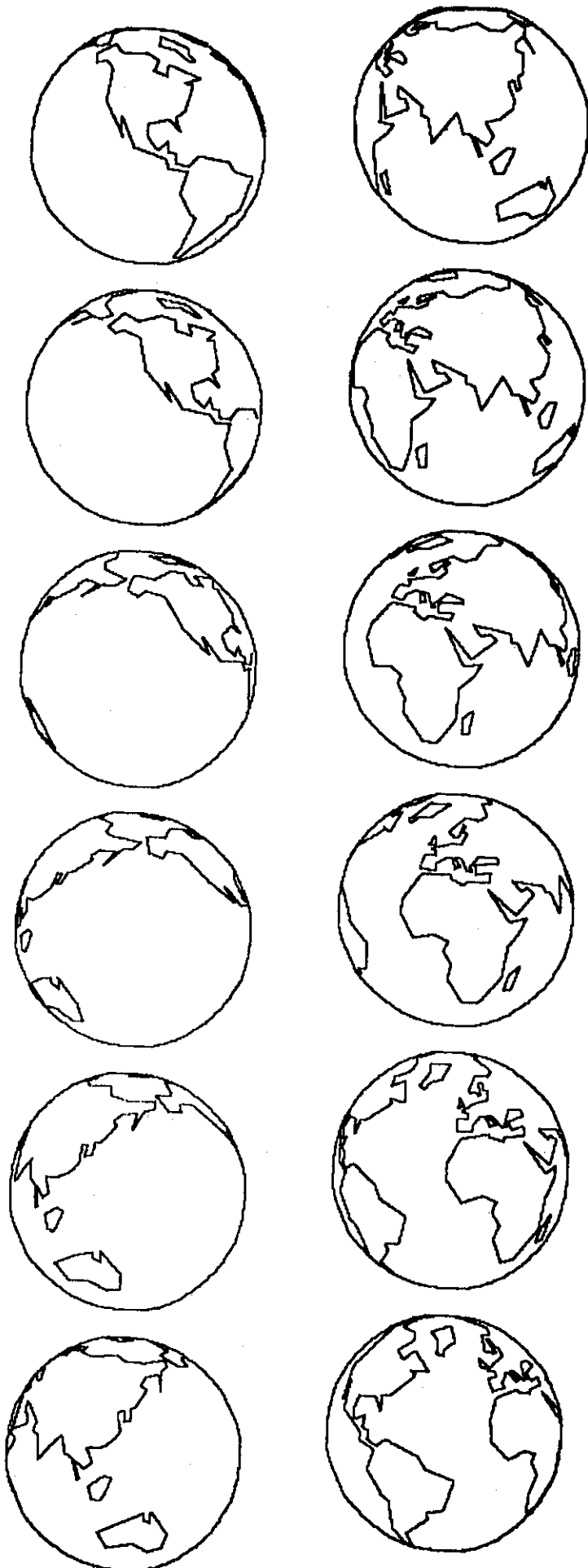
```

160 175 REM *TRANSFORMATIONS
177 Y(1) = -1.11*Y(2) - .13*Y(3) =
  .13
180 FOR R = 1 TO 300:MX = - 1
181 REM *TRANSFORMATIONS DU
  TETRAEDRE TEMOIN
185 FOR K = 1 TO 3
190 L = INT (4 - K / 2):M = INT
  (2.5 - K / 2)
195 FOR N = 1 TO 4
200 C = U(W,L):D = U(W,M):F = BOR
  (C ^ 2 + D ^ 2)
205 E = ATN (C / D) + 1.5708 * (
  1 - D / ABS (D)) + Y(K)
210 U(W,M) = F * COS (E):U(W,L) =
  F * SIN (E)
220 NEXT M
225 NEXT K
226 FOR W = 1 TO 4
227 IF ABS (U(W,3)) < MX THEN 2
  31
228 MX = ABS (U(W,3)):X = W
229 IF U(W,3) < 0 THEN X = 9 - X
231 NEXT W
270 AA = U(4,1) / 2 + U(3,1) / 2:
  BB = U(3,1) / 2 + U(2,1) / 2
  CC = U(2,1) / 2 + U(1,1) /
  2
272 DD = U(4,2) / 2 + U(3,2) / 2:
  EE = U(3,2) / 2 + U(2,2) / 2
  FF = U(2,2) / 2 + U(1,2) /
  2
273 REM *TRANSFORMATIONS DES 12
  PARALLELEPIPEDES
274 HGR2
275 FOR Z = 1 TO 12:O = D(X,Z)
280 FOR W = 1 TO 8
282 V(W,1) = AA * T(O,W,1) + BD *
  T(O,W,2) + CC * T(O,W,3) + 9
  6
285 V(W,2) = DD * T(O,W,1) + EE *
  T(O,W,2) + FF * T(O,W,3) + 9
  6
295 NEXT W
297 REM *GRAPHISME
300 REM *AFFICHAGE EN NOIR
307 IF Z = 1 THEN 350
310 HCOLOR = 4
311 B = 9 - X
312 FOR K = 1 TO 3:A = Q(X,12 +
  K):C = Q(X,13 + K)
317 B = V(C,1) - V(B,1):H = V(C,2)
  - V(B,2)
318 N = ABS (B):M = ABS (H): IF
  N < M THEN N = M
319 IF N < 1 THEN N = 1
320 B = B / N:H = H / N
322 FOR W = 0 TO N
333 HPLDT V(B,1) + B * W,V(B,2) +
  H * W TO V(A,1) + B * W,V(A,1)
  2) + H * W
335 NEXT W
340 NEXT K
345 REM *AFFICHAGE EN CLAIR DES
  ARÊTES
350 HCOLOR = 3:HS = "123546781325
  476814263758"
355 FOR W = 1 TO 12
360 A = VAL ( MID$( HS,W * 2 - 1
  ,1)) : B = VAL ( MID$( HS,W *
  2,1))
365 IF A = X OR B = X THEN 375
370 HPLDT V(A,1),V(A,2) TO V(B,1)
  ,V(B,2)
375 NEXT W
380 REM *AFFICHAGE DU CARRE
390 IF X = 4 OR X = 5 OR X = 1 THEN
  450
395 E = (V(7,1) - V(8,1)) / 11 * F =
  (V(7,2) - V(8,2)) / 11
400 B = (V(6,1) - V(8,1)) / 5 * H =
  (V(6,2) - V(8,2)) / 5
405 A1 = V(6,1) + E / 2 - B / 2: A
  2 = V(6,2) + F / 2 - H / 2
410 B1 = V(8,1) + E / 2 + B / 2: B
  2 = V(8,2) + F / 2 + H / 2
415 C1 = V(7,1) - E / 2 + B / 2: C
  2 = V(7,2) - F / 2 + H / 2
420 FOR W = 0 TO 10
425 HPLDT B1 + E * W,B2 + F * W TO
  A1 + E * W,A2 + F * W
430 NEXT W
435 FOR W = 0 TO 4
440 HPLDT B1 + B * W,B2 + H * W TO
  C1 + B * W,C2 + H * W
445 NEXT W
450 NEXT Z
475 NEXT R

```



DECOMPOSITION DE L'AFFICHAGE SUR ECRAN DES STADES 4 ET 14
(durée des calculs et de la séquence de 12 images: 27 secondes)



```

1 REM **PER7**
5 DIM U(2,182): DIM T(3,182)
10 DATA 52,53,58,52,46,44,49,50,
    54,55,40,62,66,67,58,58,60,6
    0,62,71,68,70,78,72,70
11 DATA 48,63,62,51,61,60,55,53,
    43,42,36,35,41,40,31,26,22,2
    1,14,10,14,5,4,15,16
12 DATA 25,17,9,21,22,26,32,26,2
    7,23,15,30,12,13,7,0,-17,-33
    ,-33,-17,-9,-1,4,7,6
13 DATA 15,23,36,37,35,32,34,33,
    37,37,42,42,45,47,41,39,39,4
    6,46,41,40,46,46,42,39
14 DATA 39,46,2,8,7,-5,-4,2,-16,
    -11,-26,-26,-16,-35,-23,-14,
    -11,-13,-17,-10,-24,-36,-38,
    -31,-35
15 DATA 70,84,84,77,71,62,61,66,
    70,-55,-53,-40,-19,-16,-5,7,
    9,14,19,33,23,39,57,61,57
16 DATA 61,72,68,72,66,59,55,62,
    51,50,48,35,33,26,32,30,23,1
    8,22,16,15,11,9,13,7,1,-5,-2
    2,-24,-28,-42,-55
17 DATA 172,178,174,172,172,180,
    180,176,188,200,206,202,206,
    202,196,192,192,188,186,206,
    222,242,288,306,330
18 DATA 10,360,348,336,342,326,3
    20,324,314,310,310,304,306,3
    02,304,300,294,286,290,286,2
    80,284,282,278,274
19 DATA 270,264,258,254,250,250,
    230,234,238,242,228,214,224,
    234,230,222,220,210,200,192,
    194,190,192,186,174
20 DATA 166,166,174,192,192,200,
    202,216,218,208,208,224,224,
    212,204,206,202,198,194,198,
    194,192,188,182,182-
21 DATA 172,172,288,296,300,294,
    290,288,224,250,228,224,224,
    296,292,308,316,316,320,320,
    330,330,322,312,296
22 DATA 154,158,158,104,128,130,
    138,140,154,114,108,106,110,
    106,100,104,94,92,76,68,70,5
    6,50,36,28
23 DATA 16,20,46,80,96,88,100,10
    6,128,112,118,106,100,102,96
    ,84,84,88,94,94,98,98,104,11
    0,128,132,146,140,132,132,11
    6,114
35 FOR W = 1 TO 2: FOR Z = 1 TO
    182
45 READ U(W,Z): U(W,Z) = U(W,Z) *
    0.0174532
50 NEXT Z: NEXT W
60 FOR R = 1 TO 300: FOR Z = 1 TO
    182
70 A = SIN(U(1,Z)): B = COS(U(
    1,Z)) * SIN(U(2,Z)) * .12 *
    R: E = ATN(A/B) - .35 *
    1.5708 * (1 - B / ABS(B))
    T(1,Z) = SIN(E) * SQRT(A *
    2 + B ^ 2): T(2,Z) = COS(U(
    1,Z)) * COS(U(2,Z)) * .12 *
    R: T(3,Z) = COS(E) * SQRT
    (A ^ 2 + B ^ 2)
100 NEXT Z
105 HGR2: MCOLOR = 3
115 FOR W = 1 TO 64
120 H$PLOT 120 + 90 * SIN(W * 0
    .0982), 96 + 90 * COS(W * 0
    .0982) TO 120 + 90 * SIN((
    W + 1) * 0.0982), 96 + 90 * COS
    ((W + 1) * 0.0982)
125 NEXT W
130 FOR Z = 1 TO 181
135 IF T(3,Z) < 0 OR T(3,Z + 1) <
    0 THEN 150
140 IF Z = 4 OR Z = 102 OR Z = 1
    08 OR Z = 113 OR Z = 125 OR
    Z = 134 THEN 150
145 H$PLOT 120 - 90 * T(2,Z), 96 -
    90 * T(1,Z) TO 120 - 90 * T(
    2,Z + 1), 96 - 90 * T(1,Z + 1
    )
150 NEXT Z: NEXT R

```

ROTATION DU GLOBE TERRESTRE
 (une image sur quatre a été reproduite sur im-
 primante)

MATHS et BD

Les Cités obscures

SCHUITEN

LA FIÈVRE

PEETERS

D'URBICANDE



les romans
(A SUIVRE)

casterman

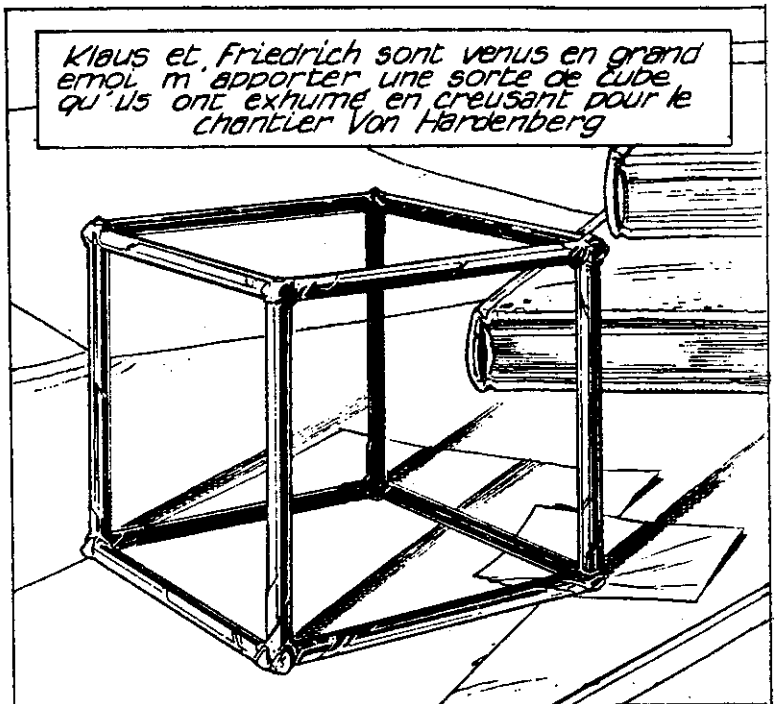
MATH ET BD : DU CUBE A L'OCTAEDRE

Michel CLINARD - Orléans

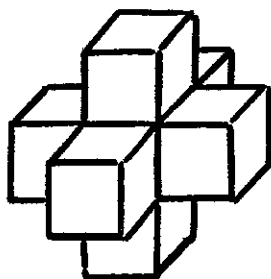
Une lecture mathématique de la BD de Schuiten et Peeters, très belle, très géométrique, très philosophique : la fièvre d'Urbicande.

(Série "les cités obscures" - Roman à suivre -Casterman)

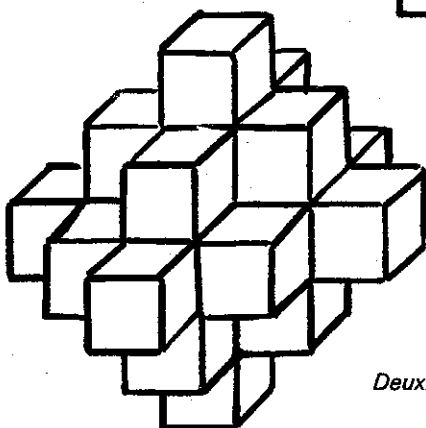
En vérité, je vous le dis, au début de toute chose, il y a le cube. Et ce cube - divin - possède plusieurs propriétés étonnantes : la matière inconnue qui forme ses arêtes, lui permet de s'agrandir et conjointement une auto-reproduction conduit à la création d'un réseau de cubes s'approchant de plus en plus de l'octaèdre.



Cube de départ



Première génération



Deuxième génération

Schuiten et Peeters illustrent par une bande dessinée de qualité les différentes phases de cette croissance sans fin et les conséquences sociales et politiques pour la ville d'Urbicande.



On peut se limiter aux aspects calculatoires que rapporte l'urbatecte Eugène ROBICK (l'étude de ce fameux ROBICK'S CUBE se ramène souvent à des calculs de séries et diffère donc nettement de celle du célèbre et presque homonyme RUBICK'CUBE : clin d'œil des auteurs de la BD et coup d'œil sur les articles de Chauvat-Nury - Plot n°s 16-17-18).

La formule de ROBICK - à trouver dans les illustrations - où Un représente le nombre de cubes du réseau à la génération Gn peut s'écrire d'une manière plus condensée :

$$Un = 2n + 1 + 4 \sum_{i=1}^n i [2n - (2i - 1)]$$

ou

$$Un = \frac{(2n + 1)(2n^2 + 2n - 3)}{3}$$

(on rappelle que $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$)

et $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

voir aussi PLOT n° 27 : la somme des puissances $k^{\text{ième}}$ des n premiers naturels).

D'où vient cette formule ?

Le plus simple consiste peut-être à se placer sur la demi-droite $[Cy)$ (voir fig. 1) et regarder cet "octaèdre-cube". A la génération gn la diagonale $[AC]$ fait apparaître une "barre" de $2n + 1$ cubes, puis tout autour 4 barres de $2n - 1$ cubes, puis 8 barres de $2n - 3$ cubes, etc.

Fig. 1 vue (très simplifiée) d'un octaèdre-cube

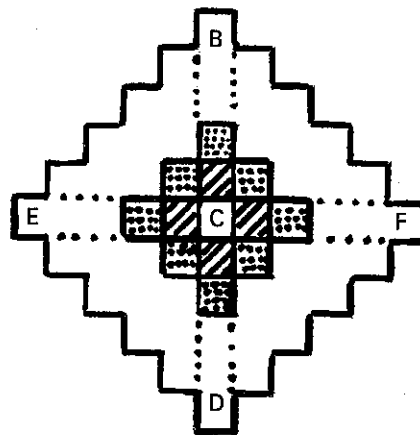
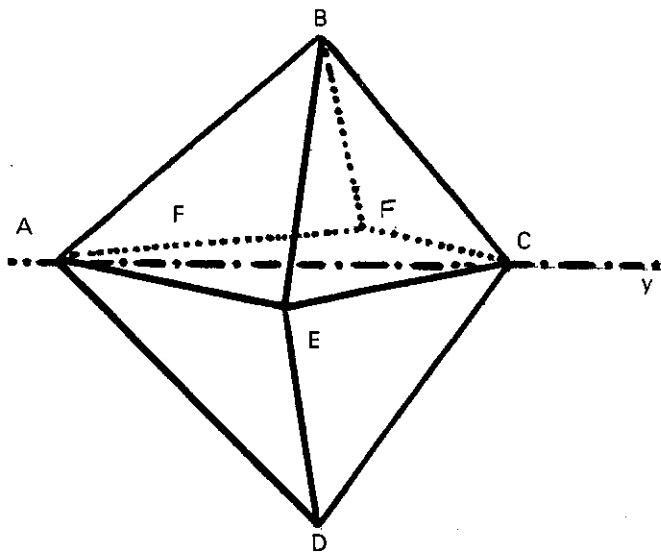


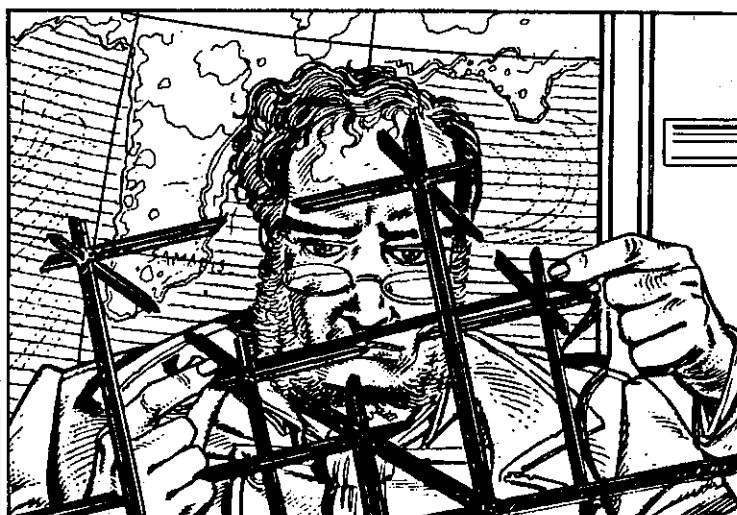
Fig. 2 : vue de l'octaèdre-cube à partir d'un point de $[Cy)$

Chaque nouvelle barre compte deux cubes de moins que les précédentes, par contre pour conserver la régularité de la construction 4 barres de plus sont nécessaires pour entourer le niveau précédent.

On termine avec $4n$ barres d'un cube (carré BFDE). On retrouve la formule et vraisemblablement la méthode de ROBICK.

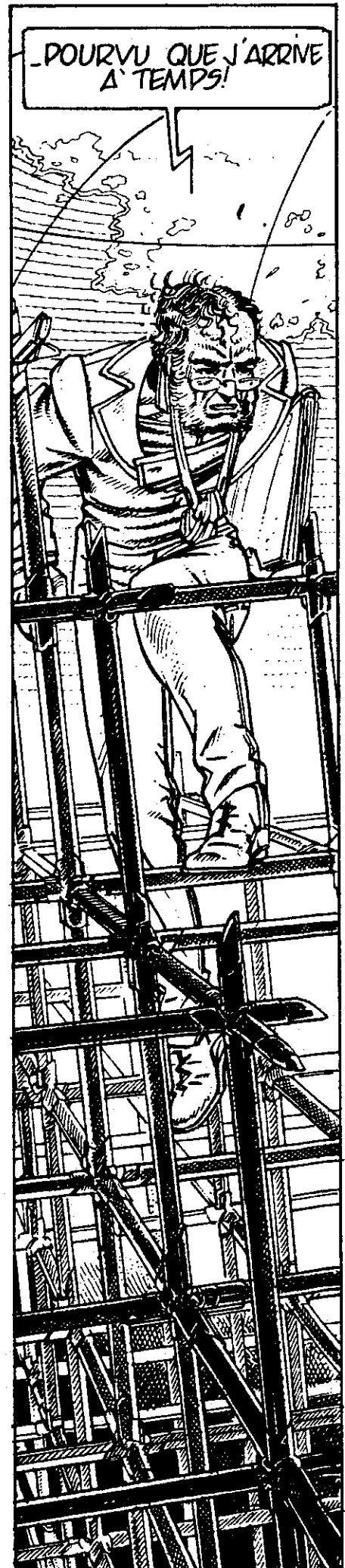
Génération Gn	nombre de cubes Un
0	1
1	7
2	25
3	63
4	139
5	231
6	377
7	575
8	833
9	1 159
10	1 561

JE VOUS LAISSE IMAGINER CE QUE SERONT U20 U30 OU U50... SI LA PROGRESSION SE POURSUIT AU MÊME RYTHME, CHAQUE DES ARÊTES SERA À CE MOMENT LONGUE DE PLUSIEURS METRES.





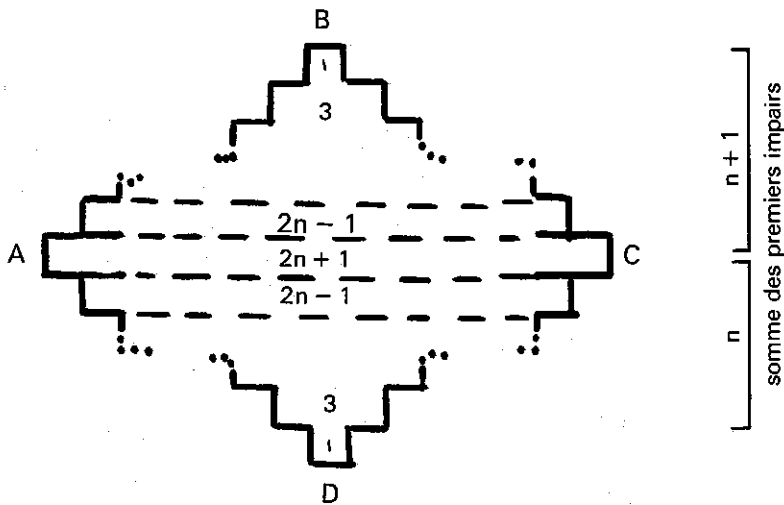
D'abord, j'ai cru à une hallucination tant le réseau s'était développé autour de moi. Il occupait presque l'entièreté de la pièce, m'enfermant dans l'échafaudage qu'il venait de former.



Un autre point de vue des choses

Il consiste à faire des coupes parallèlement au plan ABCD. L'observateur se place cette fois sur la droite (EF).

Pour la première coupe (le carré ABCD lui-même) on compte $n^2 + (n + 1)^2$ cubes.



On rappelle que la somme des n premiers impairs vaut n^2 .

Sur cette coupe vient se "coller" deux nouvelles coupes de $2n - 1$ cubes pour la plus grande longueur, etc.

On obtient :

$$U_n = n^2 + (n + 1)^2 + 2 \sum_{i=0}^{n-1} i^2 + (i + 1)^2.$$

Après un calcul simple, on retrouve l'expression :

$$U_n = \frac{(2n + 1)(2n^2 + 2n + 3)}{3}$$

Notons que si l'on écrit la mesure de la diagonale [AC] formée de $2n + 1$ cubes, alors chaque cube a pour volume

$$\left(\frac{d}{2n + 1}\right)^3$$

et le cube-octaèdre a un volume $V_n = U_n \times \left(\frac{d}{2n + 1}\right)^3$.

Si d est fixé (contrairement à l'histoire) et si l'on ne peut enrayer l'apparition de nouvelles générations de cubes, on obtiendra à la limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \frac{d^3}{6}, \text{ on retrouve le volume de l'octaèdre en fonction}$$

d'une de ses diagonales.

Un dernier point de vue développant une analyse récurrente

Les points de vue précédents s'attachaient à une vue globale de l'octaèdre-cube (OC) de génération n ; on considère maintenant la transformation entre deux OC de générations successives qui rend mieux compte de l'évolution de l'histoire : un OC de génération n s'obtient en prenant un OC de génération $n-1$ que l'on "recouvre" de nouveaux cubes.

Il s'agit de déterminer le nombre de nouveaux cubes de cette enveloppe, pour cela il suffit de voir qu'une coupe de " $2n+1$ cubes de longueur" nécessite $4 \times (n+1)$ cubes pour l'envelopper, en prenant en considération toutes les coupes on trouve pour l'enveloppe complète :

$$\begin{aligned} &4(n+1) && \text{pour la coupe ABCD} \\ &+ \\ &2 \sum_{i=1}^n 4i && \text{pour les autres coupes} \\ &+ \\ &2 && \text{pour fermer l'enveloppe} \\ &&& \text{aux points E et F (voir figure 1)} \end{aligned}$$

Cette méthode est en fait un compromis des deux points de vue précédents. On trouve tout calcul fait :

$$U_n = U_{n-1} + (4n^2 + 8n + 6)$$

ou

$$U_n = U_{n-1} + (4n^2 + 2)$$

Une procédure récursive permet de calculer U_n en "recoquant" simplement la relation :

NBCUBE (naturel N) \rightarrow naturel U_N

Choix $N = 0 \rightarrow 1$

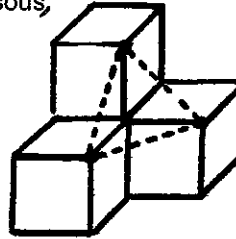
$N \neq 0 \rightarrow$ NBCUBE ($N - 1$) + $4N^2 + 2$

Fin choix
FIN NBCUBE

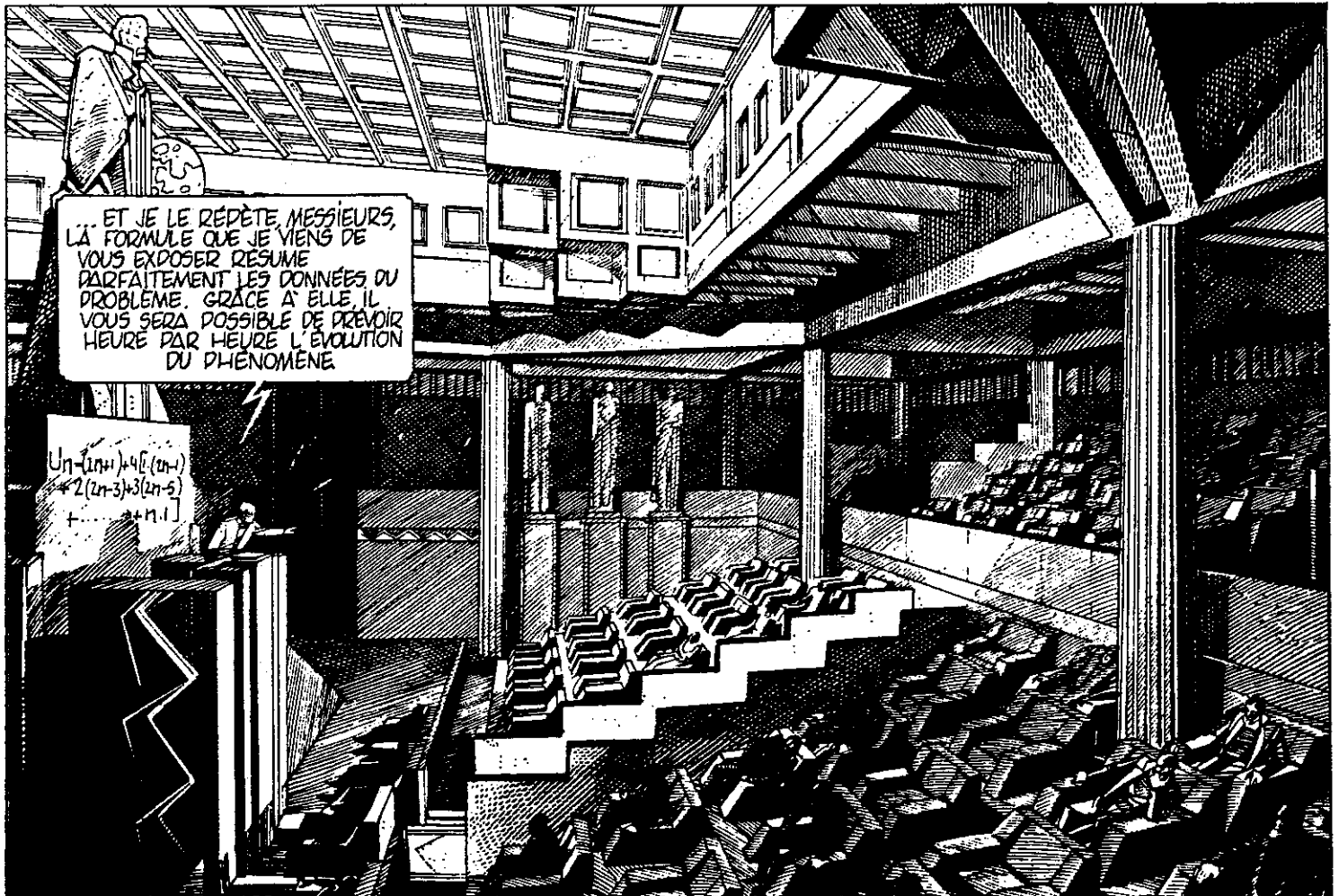
Comme précédemment si on fixe la longueur d de la diagonale $[AC]$ et si on considère les $8n^2$ triangles d'aire

$$(d\sqrt{2})^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{(2n+1)^2}$$

s'appuyant sur les $4n^2 + 2$ cubes de l'enveloppe comme ci-dessous,



on constate que la limite de l'aire de tous ces triangles quand n tend vers l'infini est $d^2\sqrt{3}$, aire de l'octaèdre.



Que faire en classe de tout cela ?

Il semble difficile de structurer ces différents points de vue pour en faire une véritable situation-problème conduisant les élèves à mettre en place un concept mathématique nouveau, toutefois on peut sûrement dépasser le stade anecdotique et trouver de nombreuses ouvertures selon le niveau des classes :

- applications des travaux sur les suites et les séries,
- activités calculatoires pour les jeunes élèves : à partir de la formule proposée par Robick calculer u_1, u_2, u_3, \dots , vérifier que la formule polynomiale $\frac{(2n+1)(2n^2+2n+3)}{3}$ convient et "est plus économique" (si l'on ne sait pas programmer, ou si l'on n'a pas de machine).
- Mise en place d'une démarche expérimentale conduisant à déterminer le nombre de cubes de la génération G_n .

La recherche de la formule U_n est une activité à préparer minutieusement : difficulté pour manipuler une telle forme algébrique ; nécessité de construire une approche séquentielle (les différents points de vue précédents peuvent être

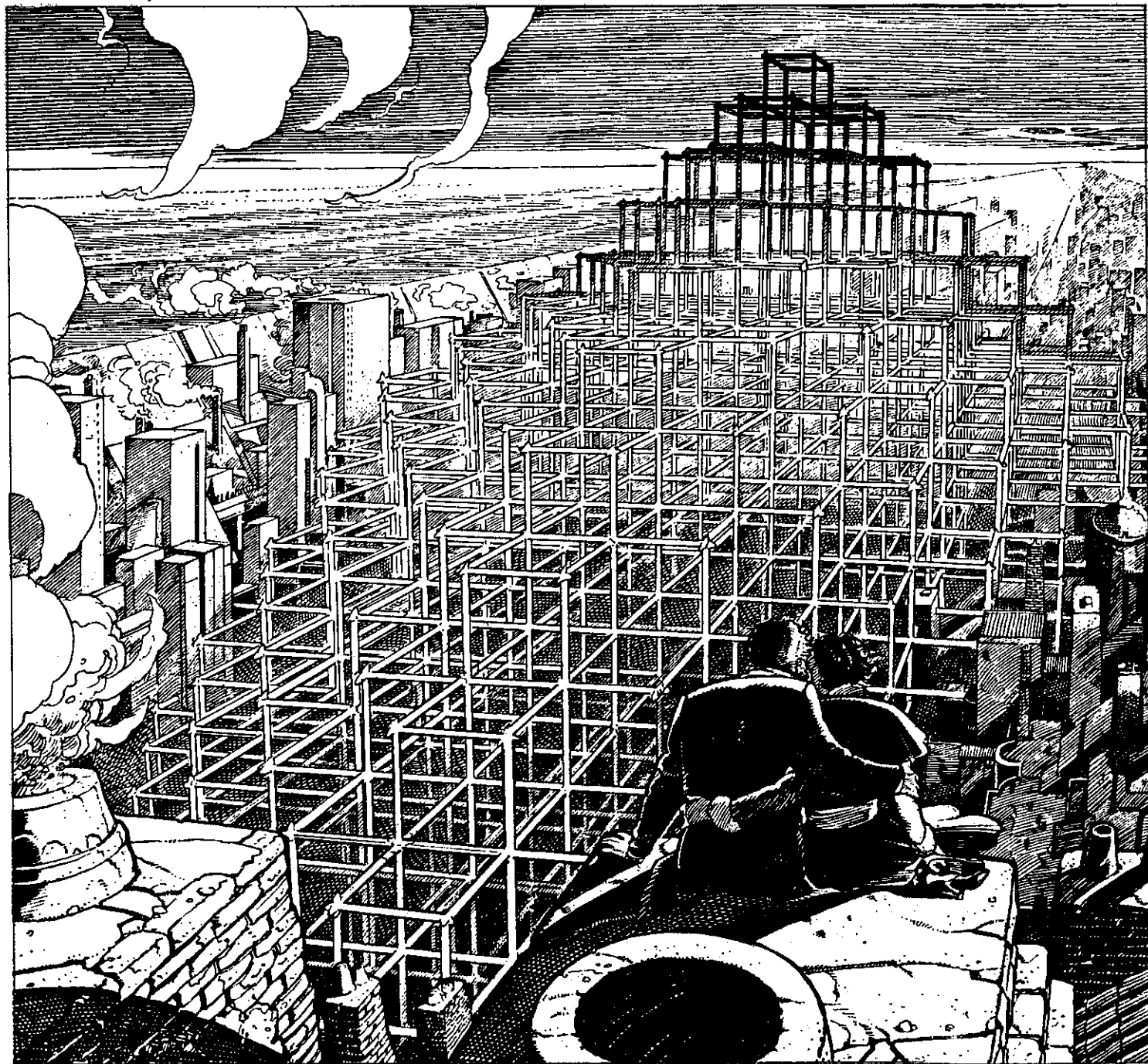
utile pour analyser les démarches des élèves ou leur en imposer une).

- Observations, hypothèses vérifiables (avec des petits cubes emboîtables - ça existe - avec des dessins - difficultés liées à la représentation dans l'espace, au comptage des cubes cachés) ; favoriser une induction ; ou au contraire faciliter une analyse récurrente (en donnant le nombre de cubes de l'enveloppe à la génération G_n par exemple...)
- Enfin, on peut privilégier une démarche interdisciplinaire : math-français en particulier - lecture, compréhension, interprétation d'une bande dessinée tant pour le texte que pour le dessin).

On peut terminer en évoquant les conceptions platoniciennes du monde : les cinq polyèdres réguliers (les solides de Platon), tétraèdre, cube, octaèdre, icosaèdre, dodécaèdre sont associés respectivement au feu, la terre, l'air, l'eau, le divin.

Du cube à l'octaèdre, cette BD de qualité nous élève de la terre à l'air, du ras des pâquerettes aux pensées les plus hautes à conditions qu'elles ne soient pas fumeuses. ■

M.C.



ABONNEMENTS au journal PLOT pour 1987 et après

Avec réduction

si vous vous abonnez pour 2 ans ou +

Nom et prénom ou établissement _____

Adresse complète _____

Code postal et ville _____

Ecole élémentaire Collège Lycée Supérieur Autre

Pour les 4 numéros :

de 1986

de 1987

de 1988

de 1989

payé par chèque

désire facture

nouvel abonné

	Tarif normal et établissement	Membre Apmp	Pays étrangers (par avion)	Règlement
Pour un an	100 F	80 F	120 F	[]
Par année supplémentaire	+ 70 F	+ 60 F	+ 80 F	

BON DE COMMANDE 1987

Les Dossiers et Matériels du PLOT

Nom : _____

Adresse : _____

		Abonnés	Non Abonnés	20 % de réduction pour plus de 500 F d'achat		
				Matériel (Nombre)	Dossier (Nombre)	Coût Total
35 F	40 F	Polyèdres dans l'espace n° 1				
35 F	40 F	Polyèdres dans l'espace n° 2				
35 F	40 F	Aléatoire				
35 F	40 F	Papiers accrochés				
35 F	40 F	Pliages et mathématiques				
35 F	40 F	Espaces, pavages et symétries (à paraître)				
20 F	Les Dossiers "Ludi-Math" (Poitiers)		n° 1/20 F	n° 2/20 F		
30 F/40 F			n° 3/30 F	n° 4/40 F		
50 F	Catalogue exposition : Mosaïque Mathématique					
10 F	Affiches pour la classe : "Horizons Mathématiques"			<input type="checkbox"/>		
	"Polyèdres dans l'espace"			<input type="checkbox"/>		
	60 x 40 cm			<input type="checkbox"/>		
40 F	Pochettes pour rétroprojecteur			n°		
40 F/60 F	Pochettes de diapositives			n°		
Frais d'envoi forfaitaire pour toute commande						15 F
- 20 % pour plus de 500 F d'achat					TOTAL	

Prix unitaires - Port compris

Règlement à envoyer à l'APMEP Orléans-Tours - BP 6759, 45067 Orléans-Cedex 2 - CCP La Source 144009X

VOTRE CORRESPONDANT REGIONAL

écrire à : Régionale de l'APMEP,

POITIERS : IREM - 40, avenue du Recteur Pineau - 86022 Poitiers (Serge Parpay)

LIMOGES : IREM - 123, rue Albert Thomas - 87060 Limoges (Roger Crépin)

NANTES : IREM - 38, bd Michelet - BP 1044 - 44037 Nantes (Raymond Torrent)

RENNES : Collège La Harpe - BP 1325 - 35016 Rennes (Georges Le Nezet)

ROUEN : IREM - BP 27 - 76130 - Mont-Saint-Aignan (Jacqueline Collet)

BREST : IREM - Université - 6, avenue Le Gorgen - 29283 Brest (André Treguer)

CAEN : IREM - IUT - Boulevard Maréchal Juin - 14000 Caen (Francis Conynck)

ORLEANS-TOURS : Université - 45067 Orléans Cedex 2 (Madeleine Schlienger)

COTE D'IVOIRE : Daniel Boutté - BP 927 - Abidjan 06

TOGO : Gérard Dubos - BP 91 - Lomé

MAURITANIE : Pierre Latourette - BP 203 - Nouakchott

CAMEROUN : Roger Pigeonneau - BP 1303 - Yaoundé

CONGO : Jean-Claude Leclercq - BP 2175 - Brazzaville

GUINEE : Pierre Schraen - Mission Française - Conakry