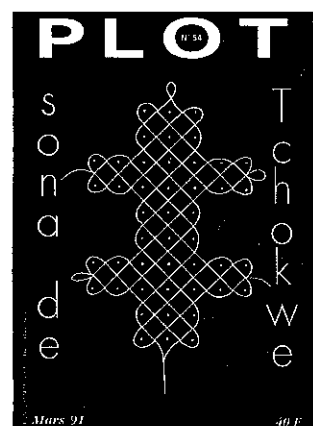




Directrice de publication
Marie-Laure Darche-Giorgi

Comité de Rédaction

Jacques Borowczyk,
Daniel Boutté, Gérard Chauvat,
Jacqueline Collet, Roger Crépin,
Luce Dossat, René Gauthier,
Georges le Nezet, Ginette Mison,
Serge Parpay, Raymond Torrent,
Michel Mirault, René Metregiste.

Rédaction

Michel Darche, Michel Clinard

Secrétariat

Madeleine Schlienger

Ventes

Patrick Marthe, Pierre Daudin

Publicité

Pascal Monsellier

Abonnements

PLOT APMEP
Université, BP 6759
45067 Orléans-Cédex 2

Prix d'abonnement

100 FF pour 4 numéros par an
Adhérent APMEP : 80 F.
Abonnement étranger : 120 F.

**Photocomposition
et maquette**

Techniques Graphiques du Futur
Limoges

Photogravure et impression

Fabrigue - Limoges

Commission paritaire

63181 - ISSN 0397-7471

Editeur

Associations régionales
de l'APMEP de Poitiers,
Limoges, Orléans-Tours,
Nantes, Rennes, Rouen, Toulouse
Brest, Caen, Clermont-Ferrand et
La Réunion

Diffusion

Adecum (Association pour le
développement de l'enseignement
et de la culture mathématique).

Publié avec le concours

du Centre National des Lettres et
du Ministère de la Coopération

SOMMAIRE

- Editorial	01
- Les mathématiques aujourd'hui - M. Demazure - Paris	02
- Les Sona de la tradition Tchokwé - P. Perdes - Mozambique	05
- Les 7 groupes de frises - M. Soufflet - Nouakchott	11
- Division approchée du cercle - F. Viète - Poitiers	15
- Une classe de collège "normale" - J. Jehl - Ste. Eulalie	19
- Π et la galaxie des Arcs Tangentes - G. Briand - Orléans	23
- "Feuilleton" de l'évaluation - J.P. Guichard - Parthenay	33
- Histoire illustrée des mathématiciens	36
- A - Plot - Strophe pour l'élémentaire	39
- La division de Lazard - P. Cognée - Poitiers	43
- Marathon au "Jardin de France" - R. Crépin - Limoges	46
- Abonnements - bon de commande matériels PLOT	48

EDITORIAL

**Un éditorial en forme de dernier appel à abonnement
pour les quelques 150 abonnés 90 qui n'ont
toujours pas renvoyé leur enveloppe timbrée!
Que leur dire?**

1991 est, pour le PLOT, une année de relance des **dossiers**. Et pas n'importe quels dossiers puisqu'en plus des trois numéros à venir qui seront des dossiers «ordinaires» (**redessinez l'espace** en mai, **le zéro et l'infini** en octobre et les ateliers du très prochain **congrès de l'ApmeP** en mai en Guadeloupe), oui, en plus de ces numéros nous allons vous offrir 2 livres-objets, en couleur, couverture cartonnée, qui seront à lire avec du scotch et du papier Canson. Deux dossiers spéciaux pour vous et vos élèves, avec des sujets inédits et originaux:
— **«Le secret des pavages»** de Raoul Raba fen avril et
— **«Maths en pièces»** de R. Torrent et M. Darche en septembre.

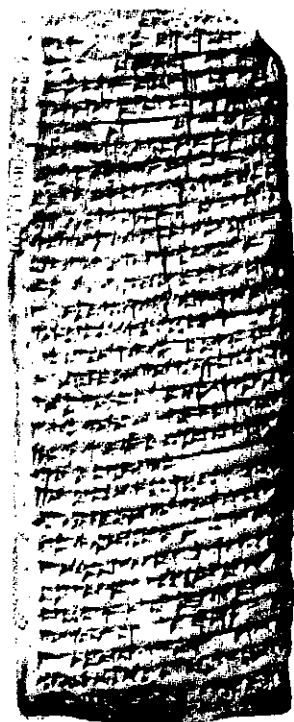
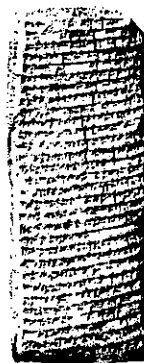
1991, une année de mise en route pour la collaboration éditoriale entre le national et les régionales. Le PLOT propose à toute équipe régionale de l'ApmeP, à partir de 1992, de gérer entièrement le rédactionnel d'un numéro du journal. Ça se prépare dès cette année.

1991 voit la mise en circulation de mini-expositions pour les écoles, collèges et lycées. 12 panneaux et 12 manipulations faciles à emporter:
— **«jeux et mathématiques»**, coproduite par la FFJM et l'ADECUM,
— **«Pythagore, nombres, figures et conjectures»** produite par l'ADECUM et Centre-Sciences, le CCSTI de la région Centre.
D'autres sujets sont en préparation sur les mathématiques, renseignez-vous auprès de Centre-Sciences.

**Voilà! 3 raisons au moins de vous réabonner
avant d'avoir fini la lecture de ce numéro.**

LES MATHÉMATIQUES AUJOURD'HUI

Michel DEMAZURE – Paris



Michel Demazure, mathématicien à l'Ecole Polytechnique, vient d'être nommé Directeur du Palais de la Découverte en remplacement d'Etienne Guyon, lui-même nommé Directeur de l'Ecole Normale Supérieure.

A cette occasion nous publions ci-dessous un résumé de la conférence qu'il fit en 1988 à La Réunion à l'occasion de la première présentation de l'exposition Horizons Mathématiques. C'est aussi l'occasion d'annoncer que cette exposition va à nouveau circuler dans les îles de l'Océan Indien.

Les mathématiques sont une activité fort ancienne : les plus vieilles tablettes mathématiques qui nous sont parvenues datent de 2400 av. J.C. et les mathématiques sont présentées comme science déductive depuis Euclide (300 av. J.C.). En dehors des mathématiques occidentales qui nous viennent des Grecs par l'intermédiaire de l'Islam, il y a eu dans le passé des courants mathématiques autochtones (Japon, Chine, Inde, Amérique précolombienne), mais aujourd'hui cela a disparu pour faire place à une culture mondiale ; les mathématiques sont devenues universelles.

Il y a plus de mathématiciens vivants que morts, à peu près 20.000 actuellement dans le monde. Tous les ans, 300.000 nouveaux théorèmes sont démontrés et publiés dans 500 revues périodiques. Des journaux consacrés à répertorier les autres publications ont été créés. Le plus répandu, **Mathematical Reviews**, atteint presque 4.000 pages par an et les articles y sont classés en une soixantaine de spécialités divisées en 3.400 sous-spécialités.

Tous les quatre ans a lieu un **Congrès international des mathématiciens** mais les échanges sont permanents entre mathématiciens concernés par les mêmes sujets. C'est lors de ces congrès que sont attribuées les **Médailles Fields** à des mathématiciens âgés de moins de 40 ans pour des travaux jugés exceptionnels par une

commission internationale. C'est un peu l'équivalent pour les mathématiques du Prix Nobel. La petite histoire dit que Nobel avait une femme jeune et jolie qui était amoureuse d'un mathématicien et que c'est pour ça qu'il n'y a pas de Prix Nobel en maths ! La France a obtenu à ce jour cinq médailles (Laurent Schwartz en 1950, Jean-Pierre Serre en 1954, René Thom en 1958, Alexander Grothendieck en 1966 et Alain Connes en 1982) et se situe au deuxième rang mondial après les Etats-Unis.

Que font les mathématiciens ? Leur travail est de résoudre des problèmes issus de sources variées, de démontrer des théorèmes, des résultats nouveaux. On constate dans l'histoire une alternance de périodes de consolidation et de développement des méthodes et de périodes d'expansion et d'avancées dans toutes les directions. Pour utiliser une analogie militaire, il y a des moments où l'on stabilise le front et des moments où l'on tente des percées. Pour se limiter à la période récente, on peut dire qu'il y a eu consolidation entre 1955 et 1975 et expansion depuis.

Les moteurs de la recherche en mathématiques sont au nombre de trois. Il y a d'abord la **curiosité** : les mathématiciens cherchent souvent dans des directions décidées par eux-mêmes, sans souci immédiat d'applicabilité même s'il est fréquent que des recherches « gratuites » aient plus tard des applications inattendues.

Ensuite la **nécessité interne** aux mathématiques : la résolution d'un problème fait surgir de nouvelles questions et ainsi de suite. Enfin il y a bien sûr une **source externe** : les besoins de la science et de la technologie, notamment de la physique théorique. On trouve là les frontières des mathématiques dans leur interaction avec les sciences de l'ingénieur, la physique théorique et plus récemment l'informatique.

Au cœur de l'activité mathématique, une place essentielle est tenue par les **grands problèmes**. Ce sont eux qui provoquent un changement de formulation des questions et une réorganisation des théories. Leur résolution nécessite parfois plusieurs siècles de recherche et comporte des rebondissements inattendus. Voici quelques exemples :

— **Le problème des trois corps** : il s'agit de décrire les mouvements de trois corps (par exemple le Soleil, la Terre et la Lune) soumis à la loi de l'attraction universelle de Newton. Lorsque deux corps seulement sont en présence, c'est facile ; dès qu'il y en a trois, la tâche devient gigantesque et ce problème est à l'origine d'importants développements de mathématiques pures en théorie qualitative des équations différentielles, topologie, topologie algébrique, analyse fonctionnelle, géométrie, théorie des groupes... Un exemple de rebondissement imprévu : au milieu du XIXe siècle, Delaunay a mis vingt ans à calculer les équations de la Lune à la satisfaction de tous les navigateurs et récemment son travail s'est retrouvé à la mode comme moyen de vérification des logiciels de calcul symbolique.

— **La description des nombres premiers** : depuis qu'Euclide a démontré que l'ensemble des nombres premiers est infini, on cherche à décrire cet ensemble de diverses façons. A la fin du XVIIIe siècle, Gauss et Legendre conjecturent la validité de formules empiriques donnant le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à un nombre réel donné x (il y en a environ $x/\ln x$). Ce résultat ne sera démontré qu'à la fin du XIXe siècle, soit un siècle plus tard, par Hadamard et De La Vallée Poussin en faisant appel à la théorie des fonctions analytiques d'une variable complexe. Une autre voie pour décrire les nombres premiers consiste à trouver des critères permettant de déterminer si un

nombre donné est premier ou non. Cette question a reçu un regain d'intérêt depuis une dizaine d'années avec les systèmes de codage basés sur la factorisation en nombres premiers et effectivement utilisés par les banques.

— La conjecture de Fermat :

Fermat avait affirmé que pour $n \geq 3$, l'équation $x^n + y^n = z^n$ n'a pas de solution en nombres entiers non nuls. Une équation diophantienne est une équation dont les coefficients et les inconnues sont des nombres entiers ou rationnels. Quelques exemples célèbres ont été donnés par Diophante et Fermat, dont celui cité plus haut. Ce genre de question a longtemps fait partie des «mathématiques amusantes». Or l'analyse diophantienne s'est construite par mutations successives jusqu'à engendrer une partie de l'algèbre et de la géométrie algébrique modernes. Tout récemment, le mathématicien allemand Faltings a obtenu une médaille Fields en 1986 pour avoir démontré, en utilisant des notions issues de presque toutes les branches des mathématiques, une conjecture de Mordell datant de 1922 : une équation diophantienne à deux variables n'a qu'un nombre fini de solutions, à l'exception de deux familles d'équations connues. Ainsi l'équation de Fermat n'a qu'un nombre fini de solutions. Le plus surprenant est que l'analyse diophantienne a trouvé de nombreux champs d'application en informatique, mathématiques discrètes et codage de l'information.

On pourrait citer encore l'**hypothèse de Riemann** qui, si elle était démontrée, pourrait bouleverser les tendances actuelles de la recherche en mathématiques ou, parmi les problèmes résolus, la **quadrature du cercle** et le **théorème des quatre couleurs**. Notons que ce dernier, qui dit qu'on peut toujours colorier une carte avec au plus quatre couleurs de sorte que des pays limitrophes aient des couleurs différentes, et qui a été démontré récemment grâce à de gros ordinateurs, est un problème isolé qui, contrairement aux autres, n'a pas entraîné de développements féconds.

Dans l'économie, les mathématiques jouent un rôle de plus en plus important grâce au développement de l'informatique et du calcul scientifique, et aux possibilités de modélisation et de simulation qui en résultent. On utilise de gros ordinateurs

43	44	45	46	47		
42	21	22	23	24	25	26
41	20	7	8	9	10	27
40	19	6	1	2	11	28
39	18	5	4	3	12	29
38	17	16	15	14	13	30
37	36	35	34	33	32	31

Image de "la spirale des nombres premiers" de Ulam.

pour prévoir le temps qu'il fera, pour des problèmes stratégiques, pour analyser presque instantanément l'état des marchés boursiers et tirer profit de minimes écarts de cours. Avec une puissance de calcul suffisante, on peut remplacer des essais coûteux par des simulations numériques : le calcul des déformations d'une voiture lors d'un choc est plus avantageux que la destruction de centaines de véhicules, le dessin de la voilure de l'Airbus A320 a nécessité cinq techniques différentes fondées sur des résultats de recherche fondamentale (mécanique des fluides, équation d'évolution, approximation numérique, triangulation, calcul numérique puissant) qui remplacent peu à peu les essais en soufflerie. La simulation est par ailleurs incontournable lorsqu'il n'est pas possible d'expérimenter. L'étude de la stabilité du système solaire (3 degrés de liberté par planète, soit 27 degrés de liberté en tout) nécessite des calculs extrêmement complexes et on tente actuellement des applications au calcul des glaciations. Dans la conquête de l'espace (recherche d'une orbite permettant le retour des Apollo par exemple), la modélisation et la simulation numériques sont indispensables et on ne peut se permettre d'erreur si l'on veut assurer le retour des astronautes ! D'im-

portantes recherches sont en cours en ce moment en France dans le cadre du projet de la navette Hermès.

Face à cette explosion des mathématiques et des besoins en mathématiques de la société se pose actuellement en France le grave problème du recrutement et de la formation des mathématiciens. Va-t-on vers une pénurie de mathématiciens ?

On constate une stagnation numérique des séries scientifiques du lycée : leur part dans l'ensemble des bacheliers a constamment diminué de 1975 (15 %) à 1983 (12 %), et si elle a un peu remonté depuis 1984, elle reste insuffisante. Par ailleurs, l'Université produit environ 1.000 licenciés de mathématiques par an qui devraient tous devenir professeurs de mathématiques pour faire face aux besoins !

La nature de la formation donnée actuellement aux futurs scientifiques est elle aussi sujette à caution. En France le système des classes préparatoires et des grandes écoles d'ingénieurs fait que les meilleurs vont dans les écoles d'ingénieurs et en sortent pour devenir rapidement des gestionnaires, pas des mathématiciens. La formation s'aligne sur le concours d'entrée à l'Ecole Polytechnique au point que l'on oublie que les études ne sont pas faites pour préparer des examens mais les examens pour sanctionner des études. Les contenus enseignés sont à revoir : quelle est l'importance réelle des techniques de calcul différentiel et intégral lorsque des machines font ça très bien ? Ne vaudrait-il pas mieux enseigner des mathématiques discrètes rendues indispensables par le développement de l'informatique ? Il est vrai qu'à tous les niveaux, il est plus facile d'apprendre à calculer que d'enseigner les mathématiques, c'est-à-dire d'apprendre à réfléchir.

Il est donc urgent de trouver des moyens pour attirer davantage de jeunes dans l'enseignement scientifique et de leur donner une formation mieux adaptée. Par exemple, on pourrait essayer d'attirer davantage de jeunes filles, il y a là un vivier largement inexploité. ■

Figure 1 : MAQUETTE F4 TYPE AIRBUS

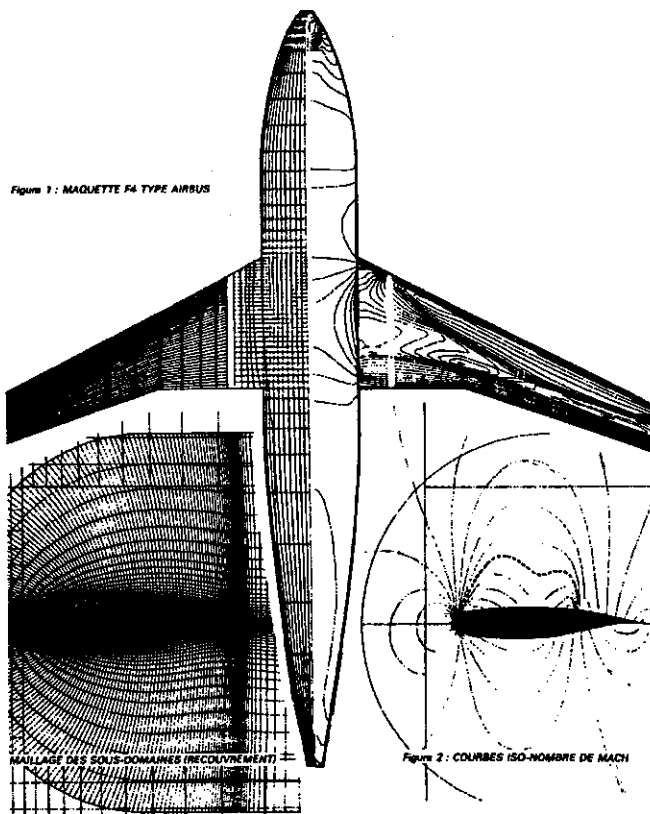


Figure 2 : COURBES ISO-NOMBRE DE MACH

Airbus - Centre de calcul vectoriel
de Palaiseau

LES SONA DE LA TRADITION TCHOKWE

Paulus GERDES - Mozambique

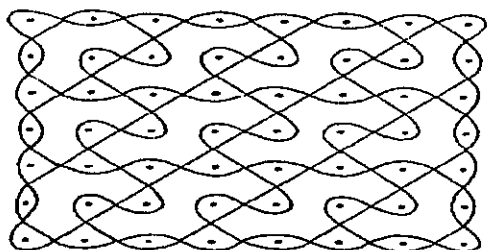


Fig. 1

Ceux qui connaissent bien l'exposition «Horizons mathématiques» ont pu y voir dans la partie «graphes et chemins» d'étranges dessins à caractère mathématique. L'auteur décrit comment ce type de dessin peut être le support d'une approche ethno-mathématique en classe.

A propos d'éléments mathématiques dans les «SONA» de la tradition Tchokwe

La tradition du dessin des Tchokwe

Le peuple Tchokwe (ou Quioco) avec une population de près d'un million habite principalement le nord-est de l'Angola, la région de Lunda. Ce sont traditionnellement des chasseurs, mais depuis la moitié du 17^e siècle, ils se consacrent également à l'agriculture. Les Tchokwe sont connus par leur art si beau et décoratif qui s'étend de la décoration de tapis et paniers tressés, du travail du fer, de la céramique, de la gravure dealebasses et tatouages, aux peintures sur les murs des maisons et dessins sur le sable.

Quand les Tchokwe se retrouvent au centre du village ou dans les terrains de chasse, assis autour du feu et à l'ombre d'arbres touffus, ils ont l'habitude de passer le temps en conversant et ils illustrent leurs conversations de dessins («lusona», au pluriel «sona») sur le sol. Beaucoup de ces dessins appartiennent à une vieille tradition. Ils se réfèrent à des proverbes, des fables, des jeux, des devinettes, des animaux, etc. et ils jouent un rôle important dans la transmission de la connaissance et du savoir d'une génération à l'autre. Les dessins doivent être exécutés suavement et de façon continue, car la moindre hésitation ou arrêt de la part du dessinateur est interprétée par l'audience comme une imperfection et un manque de connaissance, ce qui est signalé par un sourire ironique (Fontinha, 1983).

Pour faciliter la mémorisation de leurs pictogrammes et idéogrammes standardisés, les «akwa kuta sona» — spécialistes

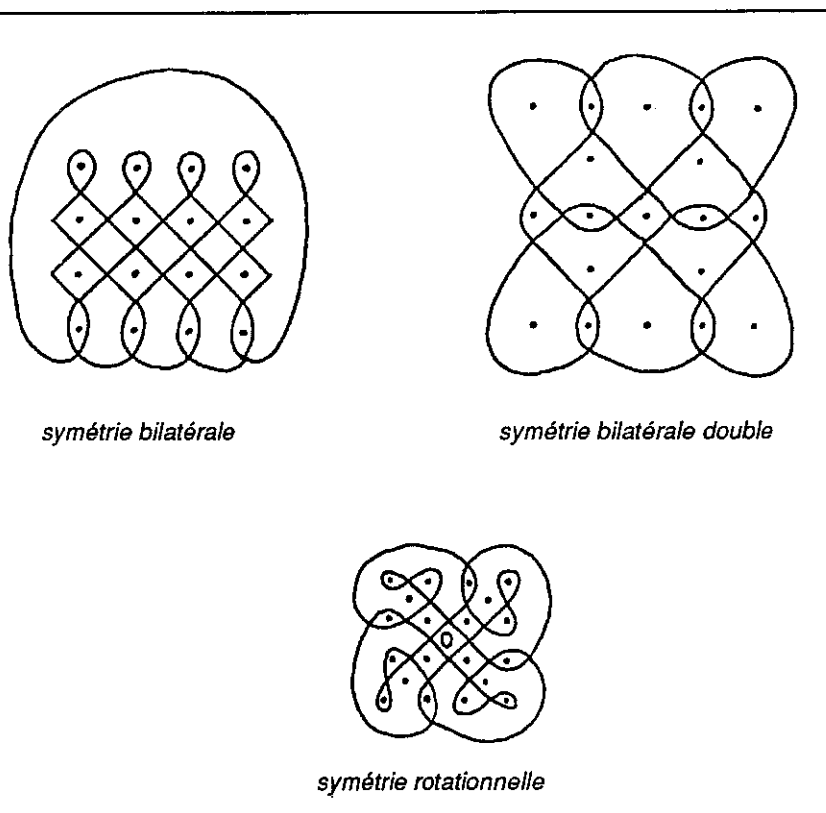


Fig. 2

de dessins — inventèrent une intéressante mnémonique. Après avoir nettoyé et lissé le sol ils marquent avec les extrémités des doigts, un réseau orthogonal de points équidistants. Le nombre de lignes et colonnes dépend du motif qui sera représenté. Par exemple, pour représenter les marques laissées sur le sol par une poule que l'on chasse, il faut 5 lignes de 6 points (voir dessin 1; Santos, 1961, p. 48). En appliquant leur méthode — un exemple d'usage ancien d'un **système de coordonnées** (cf. Santos, 1960, p. 267) — les «akwa kuta sona» réduisent la mémorisation d'un «lusona» complet à celui de deux nombres en général, et d'un algorithme géométrique.

5

Note sur l'auteur :

Paulus Gerdes est recteur de l'Institut Supérieur de Pédagogie, issu de la Faculté d'Éducation de l'Université du Mozambique. Cet Institut, chargé de former les maîtres et les cadres de l'enseignement, dispose de deux sites distants de 1200 km : à Maputo, la capitale et, plus au nord à Beira.

Paulus Gerdes s'intéresse en particulier aux processus de transmission et d'appropriation des connaissances mathématiques adaptés aux capacités et



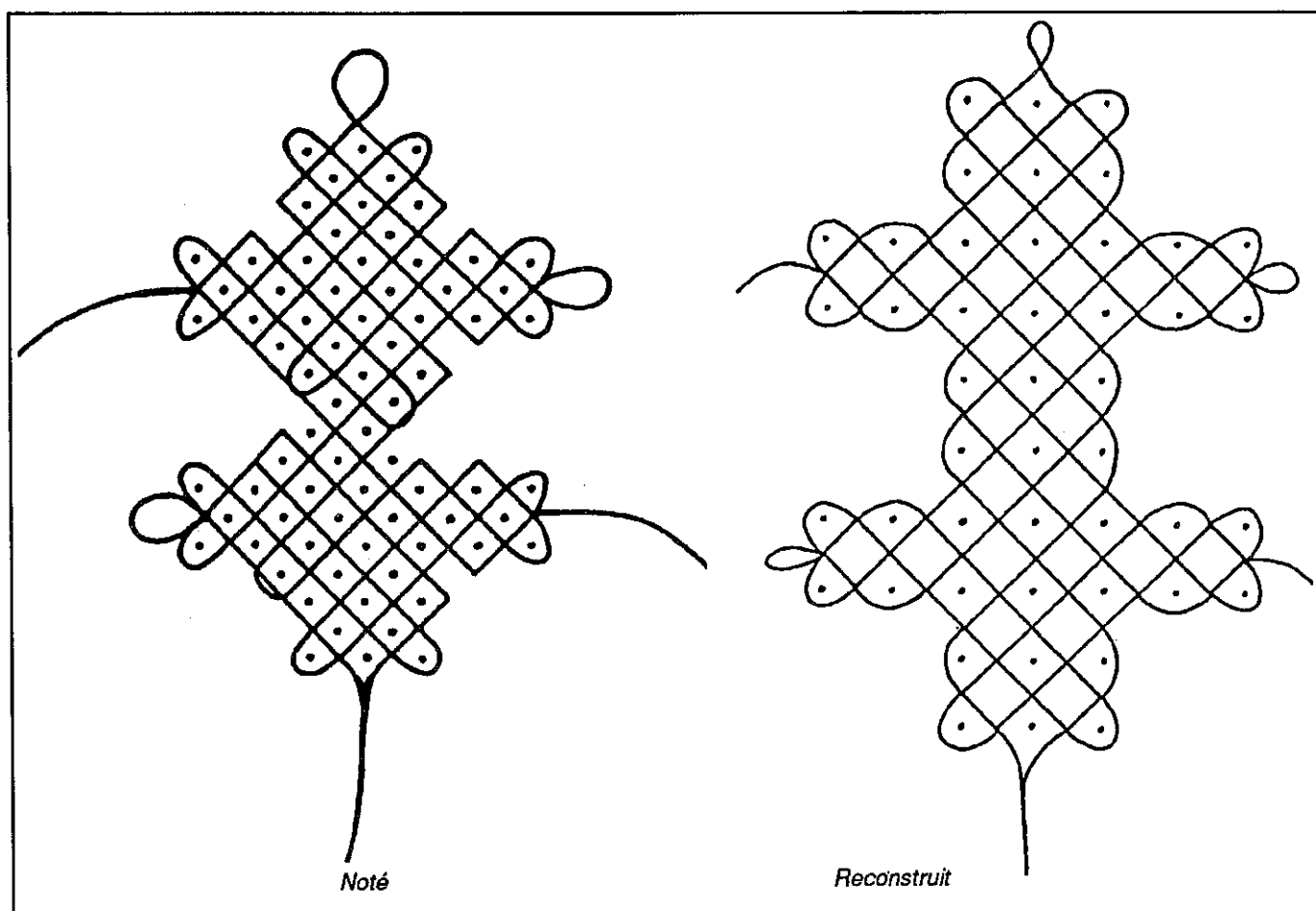


Fig. 3

Analyse et reconstruction d'éléments mathématiques

La tradition des «sona» était en train de disparaître : «ce que l'on trouve aujourd'hui, ce ne sont probablement que des vestiges d'un répertoire de symboles étonnamment riche et varié, qui devient de plus en plus obsolète» (Kubik, 1987, p. 59). Pendant plusieurs années j'ai étudié les **sona** qui ont été notés dans la littérature ethnographique (Hamelberger, 1952; Santos, 1961; Fontinha, 1983; Kubik, 1987) et dans la littérature ethnomathématique (Zaslavsky, 1973; Ascher, 1988); et sur la base d'une analyse systématique des (implicites) valeurs culturelles, je suis parvenu à la reconstruction d'éléments mathématiques importants de la tradition **sona**. Les premiers résultats sont publiés dans [Gerdes, 1989 c].

Symétrie et monolinéarité

La majeure partie des **sona** montrent une symétrie bilatérale, bilatérale double, ou rotationnelle (voir les exemples sur la figure 2). Beaucoup des **sona** sont monolinéaires: ils sont composés d'une unique courbe arrondie fermée. Dans

l'étude mentionnée antérieurement, j'ai montré que quelques uns des **sona** notés, faits de deux ou plus courbes superposées, sont en réalité des versions dégradées de modèles à l'origine monolinéaires. Ces probables **sona** originaux furent reconstruits (voir mon analyse de la tradition de dessins Tamil du sud de l'Inde, qui est **techniquement** en relation avec la tradition Tchokwe. (Gerdes, 1989 a). La figure 3 donne un exemple. Cette **lusona** représente une lionne avec ses deux portées. L'original reconstruit est monolinéaire (quand on ne prend pas en considération les queues, qui sont dessinées à la fin).

Classes et algorithmes géométriques

Les **sona** peuvent être classifiés en accord avec le type d'algorithme géométrique qui a été utilisé pour les dessiner. Par exemple tous les **sona** sur la figure 4 appartiennent à la même classe de **lusona** reconstruit sur la figure 3b. Les dessins de la figure 5 appartiennent à la même classe de pictogramme de la figure 1. Ces **sona** peuvent être appelés des «**extensions**» du **lusona** de la figure 1. En variant les dimensions (mais non arbitrairement,

parce que il n'y a que quelques dimensions qui sont possibles) des réseaux des points de référence et en appliquant le même algorithme géométrique, les «akwa kuta sona» obtiennent beaucoup de ces extensions. La figure 6 montre l'algorithme employé dans le cas des marques laissées sur le sol par une poule qui est poursuivie.

Règles pour la construction de «sona» monolinéaires

Les «akwa kuta sona» connaissent une série complète de règles de construction pour des modèles monolinéaires. La figure 7 montre une de ces règles dans le cas de composition d'un modèle monolinéaire à partir de deux sona partiellement superposés [Cette règle a été appliquée quatre fois pour la représentation d'un léopard avec cinq portées (voir figure 8)]. Les «akwa kuta sona» qui inventèrent celle-ci et d'autres règles de construction (cf. Gerdes, 1989 c) savaient pourquoi elles étaient valides, ils pouvaient prouver d'une façon ou d'une autre la vérité des théorèmes que ces règles expriment.

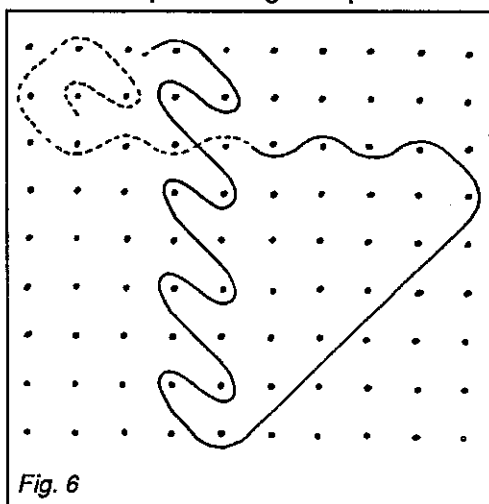


Fig. 6

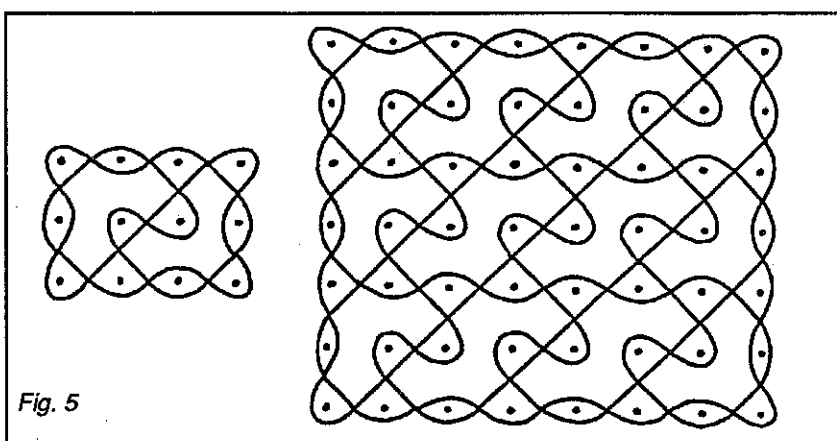


Fig. 5

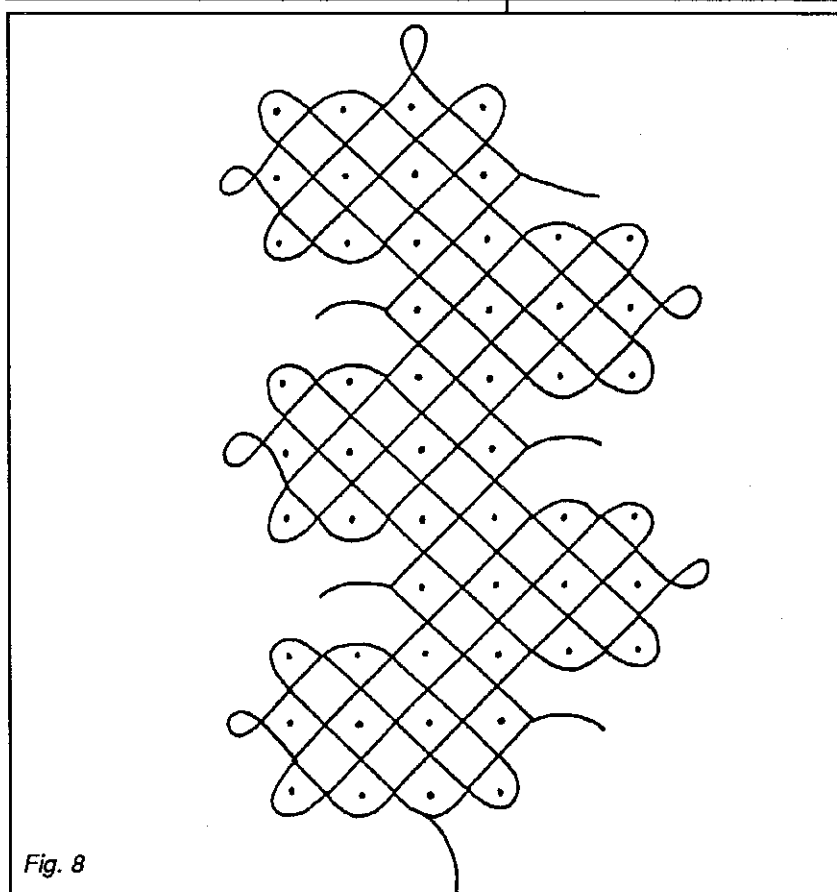


Fig. 8

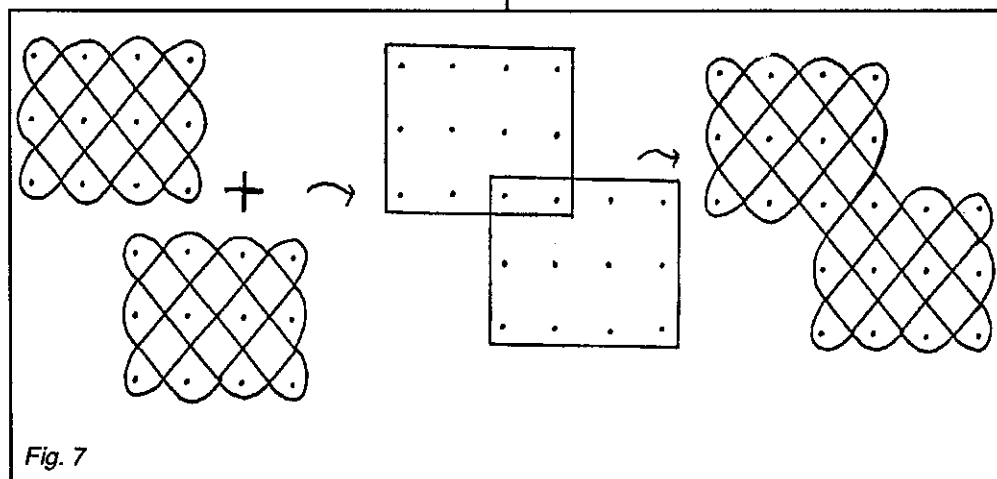
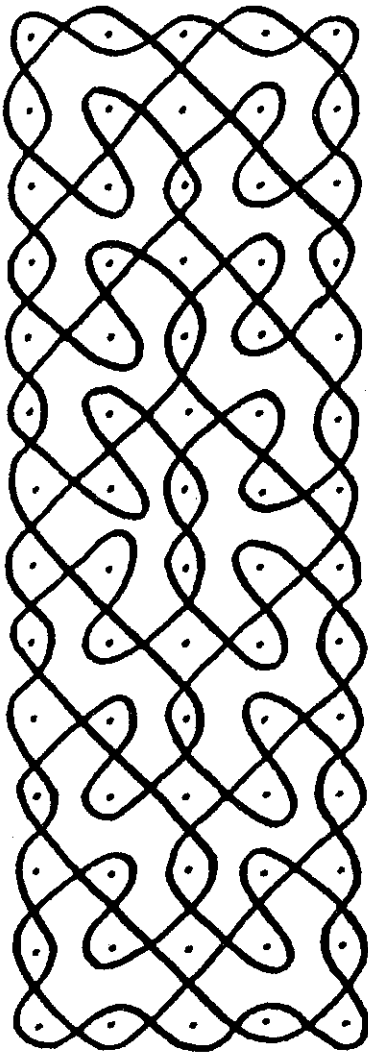
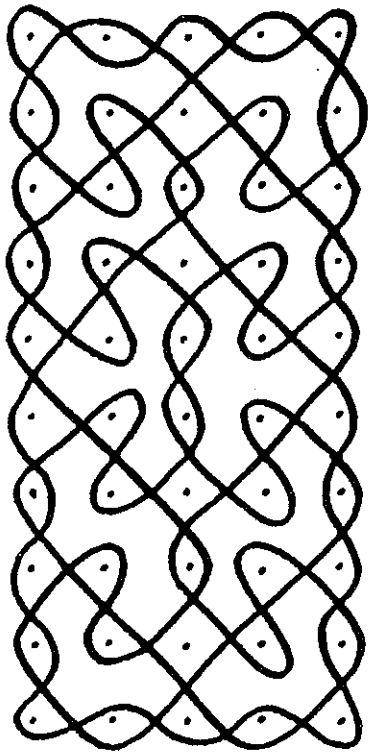


Fig. 7

été éditée en 1990, à la fois en allemand par Franzbecher Verlag et en portugais par Editora Cortez. Sa thèse d'habilitation soutenue à Leipzig *Etudes ethnomathématiques* (3 volumes) doit paraître dans les *Ethnomathematische Studien*. En outre Paulus Gerdes est président de l'AMUCHMA (AMU Commission on the History of Mathematics in Africa, l'AMU étant l'African Mathematical Union).



Potentiel éducationnel et mathématique

Au début j'étais intéressé par la reconstruction de la connaissance mathématique qui fut présente dans l'invention des **sona**. Pour être sûr que les dessins de la classe de la figure 4 soient monolinéaires, le nombre de lignes et le nombre de colonnes du réseau de points référentiel doivent être des nombres premiers entre eux. Ceci m'amena à la formulation d'un modèle

didactique géométrique pour déterminer le plus grand commun diviseur de deux nombres naturels (voir Gerdes, 1988 a) et d'un modèle physique pour déterminer les nombres premiers (voir Gerdes, 1989 c). Il y a plusieurs manières d'utiliser les **sona** Tchokwe dans l'éducation mathématique. Dans mes articles «**On possible uses of traditional Angolan sand drawings in the mathematics classroom**» (Gerdes, 1988 a et a') sont donnés des exemples qui vont de l'étude de relations arithmétiques, de progressions, symétrie et res-

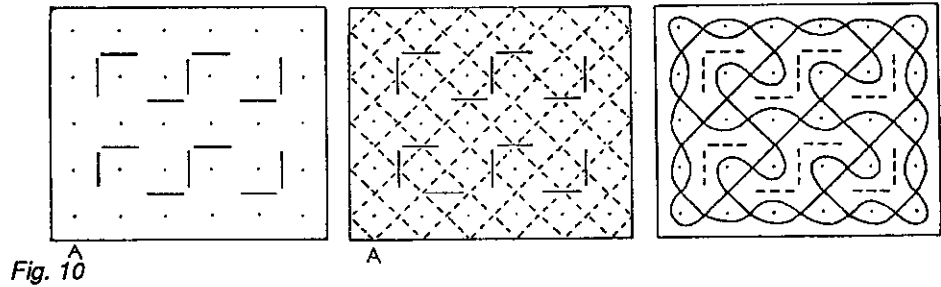


Fig. 11

Fig. 12

Fig. 9

Fig. 4

semblance jusqu'aux graphes d'Euler. Une série de problèmes géométriques fut élaborée : «**Trouvez les figures qui manquent**» (Gerdes, 1988 b et c) comme une variante de thèmes connus des problèmes arithmétiques du type «**Trouvez les nombres qui manquent**». La figure 9 en montre un exemple. Ces problèmes ont comme objectif de développer une sensibilité pour des algorithmes géométriques, généralisation et symétrie. D'autres usages didactiques des **sona** furent suggérés dans les livres «**Dessins d'Afrique**» (Gerdes, 1990 a) et «**Lusona : créations géométriques d'Afrique**» (1990 c).

Beaucoup parmi les (sub)classes reconstruites des idéogrammes Tchokwe, satisfont un **principe de construction** commun. Les courbes dont on parle peuvent être gérées de la manière suivante : chacune d'elles est la version arrondie du chemin polygonal décrit par un rayon de lumière émis du point A (voir la figure 10 comme exemple). Le rayon est reflété sur les côtés du rectangle circonscrit au réseau de points référentiel. Il trouve sur son chemin, à travers le réseau de points, des miroirs de deux côtés qui sont placés à intervalles réguliers, horizontalement au milieu entre deux points voisins sur l'horizontale du réseau. Une fois formulé ce principe de construction commun, il fut possible de trouver une grande classe de courbes fermées qui satisfont le même principe. La figure 11 en donne des exemples. La classe de courbes que j'ai trouvée de cette façon est attractive et intéressante pour beaucoup de raisons. Les courbes sont esthétiquement attractives. Elles peuvent être utilisées pour le dessin

textile par exemple. En les filmant et, en commençant la courbe en un point, on voit un algorithme géométrique en action. Elles peuvent probablement être appliquées dans la codification d'informations, dans le développement de circuits de mémoires laser par ordinateurs optiques, dans l'étude de la topologie de circuits intégrés à large échelle, etc...

L'étude des propriétés mathématiques de ces courbes constitue un nouveau et attractif champ de recherche. Un théorème avec plusieurs conséquences est illustré sur la figure 12 : si on exécute un dessin comme celui-ci sur un papier quadrillé et que l'on énumère les carrés par où passe la courbe successivement, module 4, alors on obtient toujours un schéma comme celui de la figure 13.

Remarques finales

L'étude de la tradition du dessin Tchokwe menacée d'extinction pendant la période coloniale, n'est pas seulement intéressante pour des raisons historiques. L'incorporation dans le curriculum de cette tradition **sona**, en Afrique comme dans d'autres parties du monde, contribuera à la réanimation et à la valorisation de la vieille pratique des «**akwa kuta sona**». Elle renforcera l'appréhension de la valeur de l'héritage scientifique du continent africain et pourra contribuer au développement d'une éducation mathématique plus productive et plus créative. D'un autre côté, une analyse des **sona** des Tchokwe stimule le développement de nouvelles voies d'investigation mathématique.

3	2	2	3	3	2	2	3	3	2	2	3
0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0
3	2	2	3	3	2	2	3	3	2	2	3
3	2	2	3	3	2	2	3	3	2	2	3
0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0
3	2	2	3	3	2	2	3	3	2	2	3
3	2	2	3	3	2	2	3	3	2	2	3
0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0

Fig. 13

Pour en savoir plus :

- Ascher, Marcia [1988] Graphs in culture (II) : a study in ethnomathematics. *Archive for the History of Exact Sciences*, Berlin, Vol. 39 n° 1, p. 75-95.
- Fontinha, Mario [1983] *Desenhos na areia dos Quilocos do nordeste de Angola*. Lisbonne.
- Gerdes, Paulus [1988 a] On possible uses traditional Angolan sand drawings in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, Dordrecht/Boston, Vol. 19, n° 1, p. 3-22.
- Gerdes, Paulus [1988 a] On possible uses of traditional Angolan sand drawings in the mathematics classroom.
- Abacus. *Journal of the mathematical Association of Nigeria*, Ilorin, Vol. 18, n° 1, p. 107-125.
- Gerdes, Paulus [1988 b] Find the missing figures. *Namnam. Tidskrift for matematikundervisning*, Göteborg, Vol. 15, n° 4, p. 51-53.
- Gerdes, Paulus [1988 c] Find the missing figures. A series of geometric problems inspired by traditional

Tchokwe sand drawings (Angola) and Tamil threshold designs (India). *Mathematics Teaching*, Derby, Vol. 124, p. 0, 18-19, 50.

— Gerdes, Paulus [1989 a] Reconstruction and extension of lost symmetries : examples from the Tamil of South India. *Computers and Mathematics with Applications*, Oxford, Vol. 17, p. 791-813.

— Gerdes, Paulus [1989 b] On ethnomathematical research and symmetry. Dans : Nagy, D. et Darvas, G. (ed.) *Symmetry in a kaleidoscope*. Budapest.

— Gerdes, Paulus [1989 c] Rekonstruktion und Analyse von mathematischen Elementen in der Tchokwe Sandzeichnung-Tradition. Dans : Gerdes, Paulus *Ethnomathematische Studien*, Maputo/Leipzig, p. 120-189.

— Gerdes, Paulus [1990 a] *Desenhos da Africa*. São Paulo.

— Gerdes, Paulus [1990 b] *Ethnogeometrie*. Bad Salzdetfurth.

— Gerdes, Paulus [1990 c] *Lusona : geometrical recreations from Africa*.

— Hamelberger, E. [1952] *A escrita na areia. Portugal em Africa*. Lisbonne, n° 53, p. 323-330.

— Kubik, Gerhard [1987] African space time concepts and the lusona ideograph in Luchazi culture with a discussion of possible cross-parallels in music. *African Music*, Grahamstown, Vol. 6, n° 4, p. 53-69.

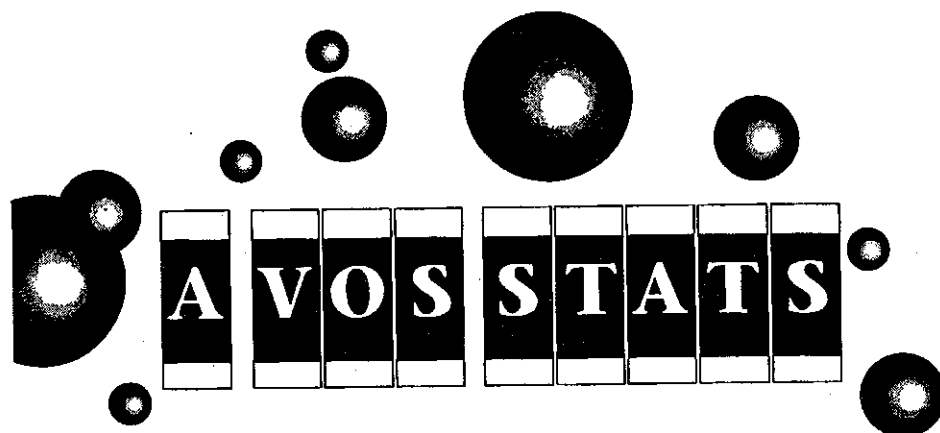
— Santos, Eduardo dos [1960] *Sobre a matematica dos Quilocos de Angola*. Garcia de Orta, Lisbonne, Vol. 8, p. 257-271.

— Santos, Eduardo dos [1961] Contribuição para o estudo das pictografias ideogramas dos Quilocos. *Estudos sobre a etnologia do ultramar português*. Lisbonne, Vol. 2, p. 7-131.

— Zaslavsky, Claudia [1973] *African counts : number and pattern in African culture*. Boston.

* Traduction de «*On mathematical elements in the Tchokwe «sona» tradition*» [For the Learning of Mathematics 1990, Vol. 10, n° 1, p. 31-34, Montrea par : Annie Capoulade, Département d'Français, Institut Supérieur Pédagogique Maputo, Mozambique.

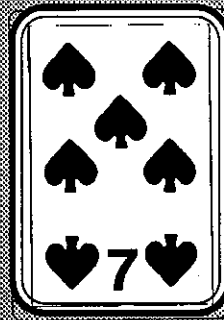
CONCOURS



CONCOURS DE REPRESENTATIONS GRAPHIQUES ORGANISE PAR DIX IREM * AVEC LE SOUTIEN DE LA FONDATION "LA SCIENCE STATISTIQUE"

- Ouvert aux élèves des collèges et des 4ème et 3ème Technologiques.
- Vise à familiariser les élèves avec l'expression graphique des données statistiques.
- Peut s'articuler harmonieusement aux activités scolaires en mathématiques mais aussi dans d'autres disciplines (sciences expérimentales, géographie,...).
- De nombreuses récompenses dans chaque région concernée (prix en espèces, voyages à Paris,...).
- Deux premiers prix nationaux de 10 000 F, deux seconds prix de 5 000 F.
- Date limite de dépôt des documents soumis au concours : 10 Avril 1991.
- N'hésitez pas à vous renseigner auprès de votre IREM (Institut de Recherches sur l'Enseignement des Mathématiques; demandez l'adresse à votre professeur).

* *Besançon, Clermont-Ferrand, Lyon, Montpellier, Orléans, Paris VII, Rennes, Rouen, Strasbourg, Toulouse. Le concours est ouvert uniquement dans les académies correspondant à ces IREM.*



LES SEPT GROUPES DE FRISES

Michel SOUFFLET - Nouakchott

Nous pouvons démontrer l'existence de ces sept groupes de deux façons différentes, l'une qui se place à un niveau mathématique que l'on peut situer entre la 3e et la Terminale et donc accessible aussi à de bons élèves de collèges, l'autre au niveau supérieur.

Du point de vue pédagogique, il peut être intéressant de se demander ce que la deuxième apporte de plus en rigueur et ce que la première apporte de plus en compréhension.

L'étude au premier niveau demande seulement quelques connaissances concernant les isométries du plan et leurs composées. Le lecteur qui n'a pas en tête ces notions est invité à retrouver tout d'abord les résultats suivants :

La composée de deux symétries centrales ou de deux symétries orthogonales d'axes parallèles est une translation. Dans les deux cas, on pourra préciser le vecteur de cette translation.

A partir de là vous pouvez commencer, ci-dessous, la lecture de la première méthode !!

(Les plus fêrus trouveront la deuxième méthode dans l'annexe 3 du chapitre 2 de la brochure «KREISLERANIA» éditée par l'IREM de Basse-Normandie).

7 jours, 7 mercenaires, 7 groupes !!!

On part de l'observation suivante : Une isométrie qui laisse globalement invariante une frise laisse globalement invariant l'ensemble $\mathbb{Z}$ constitué d'une droite et d'un ensemble $A_{-1}, A_0, A_1, \dots$ de points équidistants sur cette droite.

$\mathbb{Z}$ — — — — —
 $A_{-2} \quad A_{-1} \quad A_0 \quad A_1 \quad A_2$

Nous allons donc dans un premier temps étudier toutes les isométries qui laissent $\mathbb{Z}$ globalement invariant puis les différents

groupes pouvant être composés de ces isométries.

Isométries laissant $\mathbb{Z}$ invariant

Notons $\mathbb{I}$ l'ensemble des isométries laissant $\mathbb{Z}$ globalement invariant. Si $\mathbf{Is}$ est l'ensemble des isométries du plan, on a :

$$\mathbb{I} = \{f \in \mathbf{Is} / f(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\}$$

Translations : soit t la translation de vecteur $\vec{A_0 A_1}$, alors $t(A_i) = A_{i+1}$ et $t \in \mathbb{I}$ ainsi que toutes les translations de vecteurs $\vec{A_i A_j} = (j-i)\vec{A_0 A_1}$ qui sont de la forme $t^{(j-i)}$. On notera donc t^k une translation de vecteur $k \cdot \vec{A_0 A_1}$.

— Symétries centrales

Toutes les symétries de centre A_i sont dans $\mathbb{I}$ ainsi que celles de centre M_i où M_i est le milieu du segment $[A_i A_{i+1}]$. Nous noterons ces symétries S_{A_i} ou S_{M_i} ou plus simplement S quand il s'agira d'une quelconque de ces symétries.

— Symétries orthogonales

La symétrie d'axe $(A_0 A_1)$ que nous noterons s .

Les symétries dont l'axe est une perpendiculaire à $(A_0 A_1)$ passant par l'un quelconque des A_i ou des M_i , nous les noterons G_{A_i} ou G_{M_i} ou plus simplement G dans le cas général.

— Composées de ces isométries élémentaires

Etudions les différents cas deux à deux :

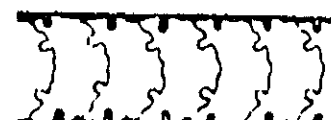
$$* t^a \circ t^b = t^{a+b}$$

$$* S_{A_i} \circ S_{A_i} = t^{2(i-i)}$$

Si: $i = j$, $S \circ S$ est l'application identique.

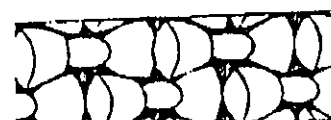
$$* s \circ G_{A_i} = G_{A_i} \circ s = S_{A_i}$$

$$* G_{A_i} \circ S_{A_i} = S_{A_i} \circ G_{A_i} = s$$



Il y a exactement sept groupes de frises, tous représentés dans les huit dessins ci-contre. L'un d'eux se trouve donc représenté deux fois !

Par quels dessins est-il illustré ?



et bien sûr :

$$* s \circ S_{Ai} = S_{Ai} \circ s = G_{Ai}$$

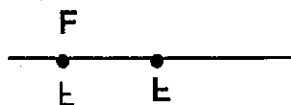
$$* G_{Ai} \circ G_{Ai} = (S_{Ai} \circ s) \circ (s \circ S_{Ai}) = S_{Ai} \circ S_{Ai} = t^{2(i-1)}$$

$$* S_{Ai} \circ G_{Ai} = S_{Ai} \circ S_{Ai} \circ s = t^{2(i-1)} \circ s$$

Cette isométrie n'est pas du type de celles rencontrées précédemment : c'est un glissement.

Nous noterons les glissements

$t^a \circ s = s \circ t^a$ par g^a et plus simplement par g le glissement $t \circ s$.



Glissement g

$$* S_{Ai} \circ t^2 = S_{Mi-1} ; t^2 \circ S_{Ai} = S_{Ai+1}$$

$$* S_{Ai} \circ t = S_{Ai-1} ; t \circ S_{Ai} = S_{Mi-1}$$

La composée d'une symétrie S_{Ai} par une translation t^a donne une symétrie S_{Aj} si a est pair et une symétrie S_{Mj} si a est impair.

* De même, $G_{Ai} \circ t^2 = G_{Ai-1} ; t^2 \circ G_{Ai} = G_{Ai+1}$ et $G_{Ai} \circ t^a = G_{Aj}$ si a est pair ; $G_{Ai} \circ t^a = G_{Mj}$ si a est impair.

$\mathbb{I}$ est un groupe

C'est un sous groupe de l'ensemble $\mathbb{I}$ des isométries du plan. En effet, nous venons de voir que si $f \in \mathbb{I}$ et $g \in \mathbb{I}$, alors $f \circ g$ et $g \circ f$ appartiennent aussi à $\mathbb{I}$, et de plus, si $f \in \mathbb{I}$, $f^{-1} \in \mathbb{I}$:

$$(t^a)^{-1} = t^{-a} ; S^{-1} = S ; G^{-1} = G ; s^{-1} = s ; (g^a)^{-1} = g^{-a}$$

Etudions tous les sous groupes de $\mathbb{I}$:

Afin de déterminer les différents groupes de frises, nous allons chercher tous les sous groupes de $\mathbb{I}$ qui contiennent des translations. En effet, si on considère une frise sur laquelle opère un groupe sans translation (exemple la frise 8 de l'introduction et le groupe $[I_d, G_{Ao}, S_{Ao}, s]$ alors, cette frise est également conservée par des translations. Cette ambiguïté concernant les groupes avec ou sans translation sera complètement levée avec la démonstration au niveau supérieur car on travaille alors avec les groupes vectoriels associés.

On voit alors que, en considérant une frise comme un espace affine, il n'y a que 7 groupes de symétries sur l'espace vectoriel associé.

Parmi les sous groupes de $\mathbb{I}$ qui contiennent des translations, le plus simple est bien sûr celui qui ne contient que des translations ; nous le noterons F_1 .

F_1 est donc le groupe engendré par t : $F_1 = \langle t \rangle$.

Sous groupes contenant des symétries centrales

— Appelons F_2 l'ensemble constitué de toutes les translations et de toutes les symétries centrales (de type S_{Ai} ou S_{Mi}), alors, les résultats précédents nous permettent d'affirmer que F_2 est un groupe engendré par S_{Ao} et S_{Mo} : $F_2 = \langle S_{Ao}, S_{Mo} \rangle$. Remarque : l'ensemble contenant seulement les translations engendrées par t^2 et les symétries de type S_{Ai} est également un sous groupe de $\mathbb{I}$, mais ce sous groupe ayant la même structure que F_2 (isomorphe), nous ne le retiendrons pas.

— Appelons F_2^1 l'ensemble contenant toutes les symétries centrales, la symétrie s , leurs composées et bien sûr les translations.

F_2^1 contient toutes les symétries G_{Ai} puisque $G_{Ai} = s \circ S_{Ai}$

* Cette ambiguïté sera également levée par la démonstration au niveau supérieur.

De même F_2^1 contient toutes les symétries G_{Mi} .

F_2^1 contient aussi tous les glissements, puisqu'il contient toutes les translations et la symétrie s .

Conclusion : $F_2^1 = \mathbb{I}$

Remarque : $F_2^1 = \langle s, G_{Ao}, G_{Mo} \rangle$ ou plus simplement $F_2^1 = \langle s, G \rangle$

* Ensemble contenant des symétries centrales, des symétries orthogonales de type G , ne contenant pas s mais contenant toutes les composées des symétries S et G . Alors, si cet ensemble ne contient pas s , il ne peut contenir à la fois G_{Ai} et S_{Ai} , il contient donc soit tous les G_{Ai} et tous les S_{Mi} , soit tous les G_{Mi} et tous les S_{Mi} . Notons F_2^2 l'ensemble contenant les G_{Ai} et les S_{Mi} (l'autre lui est isomorphe), alors F_2^2 contient aussi des glissements $(G_{Ai} \circ S_{Mi})$

Remarque : $F_2^2 = \langle t, G_{Ao}, S_{Mo} \rangle$ mais aussi : $F_2^2 = \langle t, G_{Ao} \rangle$

Ici encore, on peut donc trouver plusieurs

types de générateurs pour F_2^2 , on dit que les générateurs ne sont pas canoniques.

Sous groupes de $\mathbb{I}$ ne contenant pas de symétries centrales

Nous avons déjà rencontré F_1 qui ne contient que des translations.

* Ensemble contenant les translations et les glissements. Nous le noterons F_1^3 , cet ensemble est un groupe engendré par g : $F_1^3 = \langle g \rangle$ (en effet, la composée de deux glissements est une translation).

* Ensemble contenant les translations et la symétrie s ainsi que leurs composées, notons F_1^1 cet ensemble, alors F_1^1 contient aussi les glissements mais pas de symétrie de type G et on a : $F_1^1 = \langle t, s \rangle$

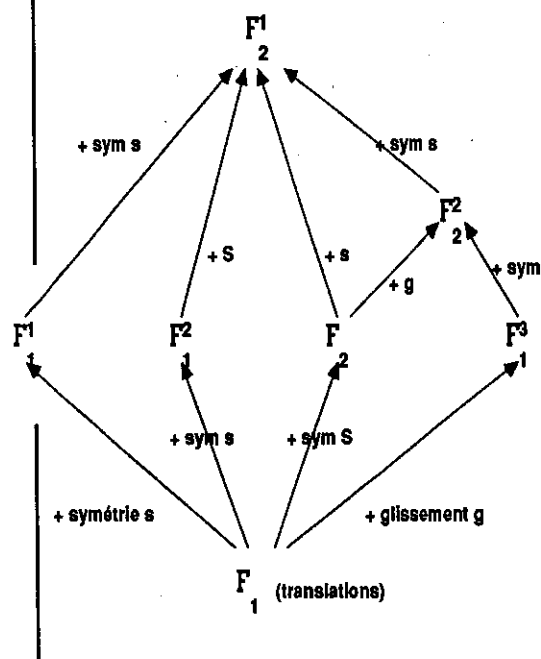
* Ensemble contenant les translations et les symétries de type G ainsi que leurs composées, alors cet ensemble ne peut contenir s car sinon, il contiendrait les symétries centrales. Notons F_1^2 celui qui contient tous les G_{Ai} et tous les G_{Mi} (les ensembles qui ne contiennent que les G_{Ai} ou que G_{Mi} lui sont isomorphes), alors F_1^2 est un groupe et on a :

$$F_1^2 = \langle t, G \rangle = \langle G_{Ao}, G_{Mo} \rangle$$

Nous avons ainsi déterminé les 7 structures de sous-groupes contenues dans $\mathbb{I}$.

Exercice : vérifiez que ces 7 groupes sont au complet dans les 8 frises de l'introduction.

Classement par niveaux de structure :

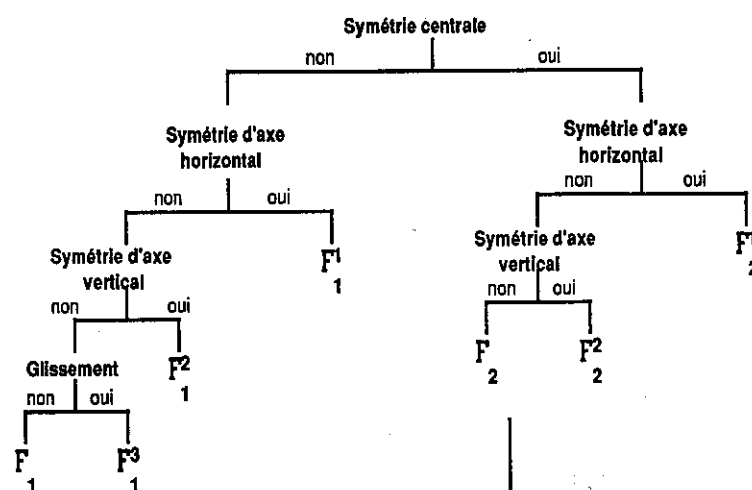


Algorithme de reconnaissance

Voici un algorithme simple qui vous permettra de reconnaître à quel groupe une frise donnée se rattache, elle vous permettra de répondre à la question de l'introduction et aux exercices qui suivent.

L'ordre des questions est le suivant :

- Y a-t-il un centre de symétrie?
- Y a-t-il un axe de symétrie horizontal?
- Y a-t-il un axe de symétrie vertical?
- Y a-t-il des glissements?



Remarque : on retrouve le classement précédent par niveau de structure, l'arbre étant incliné de F_1 en bas à gauche à F_2^1 en haut à droite.

Afin de vous entraîner, voici les sept groupes de frises tous formés uniquement de lettres ; le remplacement d'une lettre par une autre, invariante par des symétries différentes, permet d'obtenir un groupe différent. Cela vient du fait que le groupe des symétries laissant invariant chaque lettre est isomorphe à ce que nous appellerons le groupe vectoriel associé dans la démonstration de niveau 2. Du point de vue pédagogique, le choix des lettres est intéressant car ici les motifs sont bien séparés.

F_1	F F F F F F F F F F F F F F
F_1^1	D D D D D D D D D D D D D D
F_2^1	A A A A A A A A A A A A A A
F_3^1	D W D M D W D M D W D M
F_2	S S S S S S S S S S S S S S
F_1^2	I I I I I I I I I I I I I I
F_2^2	M W M W M W M W M W M W M

Remarque : pour les groupes qui contiennent des glissements mais pas la symétrie, nous avons besoin d'une figure formée de deux lettres.

Dans le même esprit, voici quelques exercices pour vous entraîner :

ME COOK HE COOK WE COOK ME C...

SANTA CLAUS SANTA CLAUS SA ...

H O H O H O H O H O H O H O ...

M T M T M T M T M T M T M T ...

NOON NOON NOON NOON NOON ...

WOMOWOMOWOMOWOMOWOMO...

IOI IOI IOI IOI IOI IOI IOI IOI ...

D'une manière générale, et toujours du point de vue pédagogique, le choix d'une lettre est excellent pour faire comprendre la différence entre une isométrie directe et une isométrie indirecte : l'image de la lettre F par une symétrie orthogonale n'est pas un F quelle que soit l'orientation que l'on donne à la feuille (si on ne regarde pas par transparence) ; le fait que le sens des angles soit inversé est bien sûr à signaler, mais ce n'est peut-être pas la première propriété qu'il faut faire observer.

Pour illustrer ce fait, nous vous proposons l'exercice suivant :

La figure ci-contre illustre le groupe F_7 . En



14

complétant les cases vides judicieusement, vous pouvez illustrer ainsi les 7 groupes.

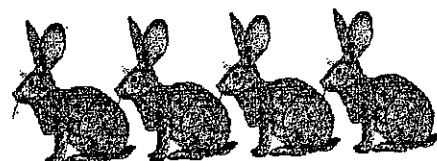
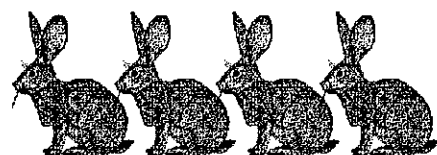
Pour aller plus loin

On lira l'article «Groupes de frises» de Y. Hellegouarch et M. Soufflet in «Kriegeriana». Irem de Caen 1985. p. 23 à 42.

Voir aussi :

→ «les secrets des pavages» de Raoul Raba, dossier-matériel à paraître (cf bon de commande page 48).

→ Les 2 Plots spéciaux sur symétrie n°42 et 42 bis - 1988.



CONSTRUCTION APPROCHEE DE LA DIVISION DU CERCLE

François VIETE - Poitiers

**Le texte qui suit est extrait
des Oeuvres mathématiques
de François Viète* et traduit
par Etienne de Lacroix de Lavalette (octobre 1989).**

1591 - 1991
4 siècles déjà

Il fait suite à l'article sur Viète paru dans le Plot n° 53.

Dans ce texte Viète rappelle une construction approchée de la division du cercle en n parties connaissant celle en $n-1$ parties et celle en $n+1$ parties. Il vérifie les écarts de cette construction à l'aide d'une table trigonométrique (Canon Mathematicus) qu'il a construite.

Viète et la trigonométrie

Euler a étudié les fonctions trigonométriques du type $\pi m/2n$ de façon à dresser des tables de trigonométrie et il a calculé les coefficients des développements en série entière des sinus, cosinus, tangente, cotangente, sécante et cosécante de $\pi m/2n$ et en regardant le développement qu'il donnait de $\tan \pi m/2n$ et de $\cotan \pi m/2n$ avec un terme asymptotique. Je me suis souvenu de ce texte de Viète où il met en évidence une construction approchée de la division du cercle en n parties en montrant qu'elle s'écarte peu entre $n=4$ et $n=6$ pour $n=5$ (pentagone), entre $n=6$ et $n=8$ pour $n=7$ (heptagone) enfin entre $n=8$ et $n=10$ pour $n=9$ (ennéagone).

Comme il attribue cette construction aux Lydiens communauté ethnique qui résidait jadis en Asie Mineure (aujourd'hui en Turquie entre le Gédiz et le Ménandre dont la capitale est Sardes), j'ai désiré montrer cette remarquable construction dont la précision est d'autant plus grande que n est grand.

Méthode d'obtention mécanique des côtés des polygones (réguliers) quelconques

Une règle mathématique réellement ly-dienne est la pierre pour de nouvelles découvertes à prouver. Elle révèle en effet une «fausse» représentation géométrique permanente des côtés ou des angles, comme voici ce qu'un artisan a proposé.

C A P Y T II.

Mechanice methodus inveniendi latus polygonorum quorumcumque.

Canon Mathematicus vere lydius est lapis ad nova probandum inven-
ta. Pseudographiam enim laterum vel angulorum statim detegit, ut
ecce proposuerit Mechanicus quispiam.

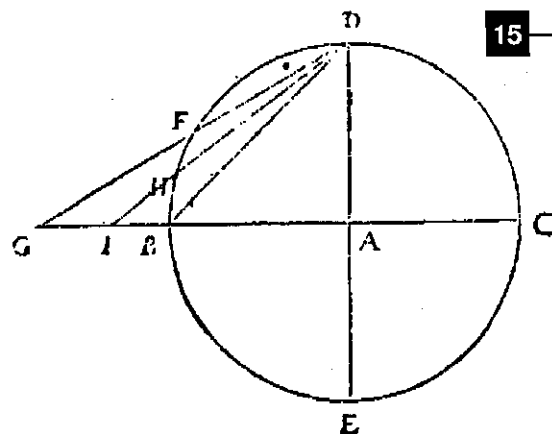
MECHANICVM.

Latus pentagoni circulo inscribendi compendiosè invenire.

Sub centro A intervallo quocumque AB describat^r circulus BDCE. Oportet lat^{us} pentagoni circulo inscribendi invenire. At vero inter hexagonum & tetragonum pen-

tagonom consistit, æquidistans ab illis pari angulorum numero. Dantur autem commodè latera hexagoni & tetragon. Quare secetur circulus BDCE quadrifariam à duabus diametris BC, DE sese ideo normaliter secantibus in centro, & sumatur DF latus hexagoni, & productæ DF, CB convenient in G. Sumatur quoque latus tetragoni DB declinens in ipsa CG in B. Jam autem inventum sit latus pentagoni quod quaeritur consistens inter DF, DB & sit DH quod productum interceptat AG in I. Dico Mechanicus GI, IB esse æquales. Itaque in synthefi datam BG propter datas DB, DG secabo bifariam in I, & ducta DI secante circumulum in H, exhibuero DH ut latus pentagoni.

15



MECANIQUEMENT :

Trouver brièvement le côté d'un pentagone à inscrire dans un cercle.

Du centre A avec un rayon quelconque AB on décrit un cercle BDCE. Il faut chercher le côté d'un pentagone (régulier) à inscrire dans le cercle. Mais en réalité le pentagone se tient entre l'hexagone et le carré, équidistant entre eux d'un nombre pair d'angles. En outre les côtés de l'hexagone et du carré sont fournis facilement. C'est pourquoi on coupe en 4 parties le cercle BDCE par deux diamètres BC, DE, eux-mêmes pour cette raison devant se couper perpendiculairement au centre et soit tiré le côté DF de l'hexagone et les prolongements DF, CB se rencontrent en G. Soit tiré également le côté du carré DB se terminant sur CG en B. Mais déjà on a trouvé que le côté du pentagone qu'on recherche se tenant entre DF et DB et soit DH ce côté dont le prolongement rencontrera AG en I. Je dis que mécaniquement GI et IB sont égaux. C'est pourquoi dans la composition, la donnée de BG, à cause des données DB, DG je les couperai en deux parties en I, et ayant prolongé DI coupant le cercle en H, je présenterai DH comme le côté du pentagone.

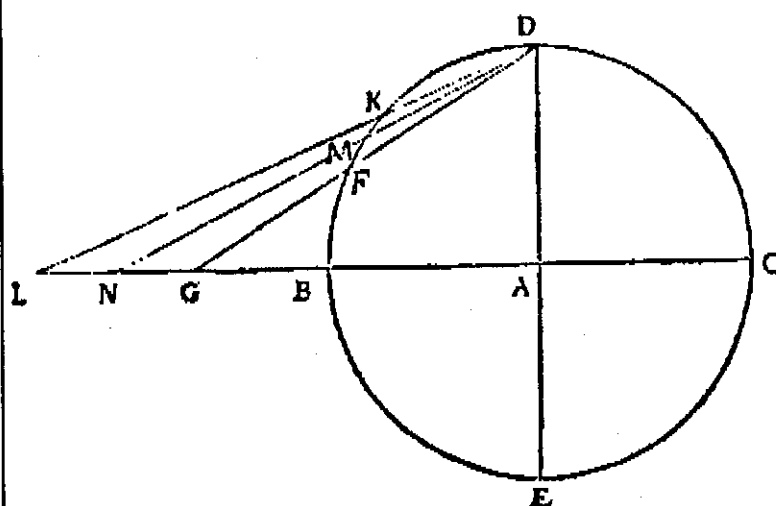
AUTRE EXEMPLE :

Trouver le côté de l'heptagone régulier à inscrire dans un cercle.

Du centre A avec un rayon quelconque on décrit un cercle. Il faut trouver le côté de l'heptagone (7 côtés) à inscrire dans ce cercle. Mais en réalité l'heptagone se tient entre l'hexagone et l'octogone équidistant entre eux d'une paire d'angles. Mais les côtés de l'hexagone et de l'octogone sont donnés facilement. C'est pourquoi on coupe le cercle BDCE en quatre parties par deux droites BC, DE, elles-mêmes pour cette raison devant se couper perpendiculairement au centre, et prenons DF le côté de l'hexagone et les prolongements DF et AB se rencontrent en G. On prend aussi le côté de l'octogone DK dont le prolongement rencontrera la même droite AB en L. Mais déjà on a trouvé que le côté de l'heptagone qu'on recherche se trouvant entre DK et DF et soit DM ce côté dont le prolongement coupe GL en N. Je dis mécaniquement que les segments de droite LN et NG sont égaux. C'est pourquoi GL étant donné par synthèse (à cause des données de DK et DF) je couperai ce segment en deux parties en N et je tracerai ND coupant le cercle en M, je présenterai DM comme le côté de l'heptagone.

A L I V D.

Latus heptagoni circulo inscribendi invenire.



Sub A centro intervallo quocumque describatur circulus. Oporter latus heptagoni in eo inscribendi invenire. At vero inter hexagonū & octogonum heptagonū cōsistit, æquidistans ab iis pari angulorū numero. Dantur autem commode latera hexagoni & octogoni.

Quare secetur circulus BDCE quadrifariam à duobus rectis BC, DE se se ideo normaliter secantibus in centro, & sumatur DF latus hexagoni, & producta DF, AB convenient in G. Sumatur quoque latus octogoni DK, cui producta DF occurrat in L. Jam autem inventum sit latus heptagoni quod queritur, consuevit inter DK, DF, & sit DM, quod productum intercipiat GL in N. Dico Mechanice rectas LN, NG esse æquales. Itaque in synthesi datam GL (propter datas DK, DF) secabo bifariam in N, & ducta ND secante circulum in M, exhibuero DM ut latus heptagoni.

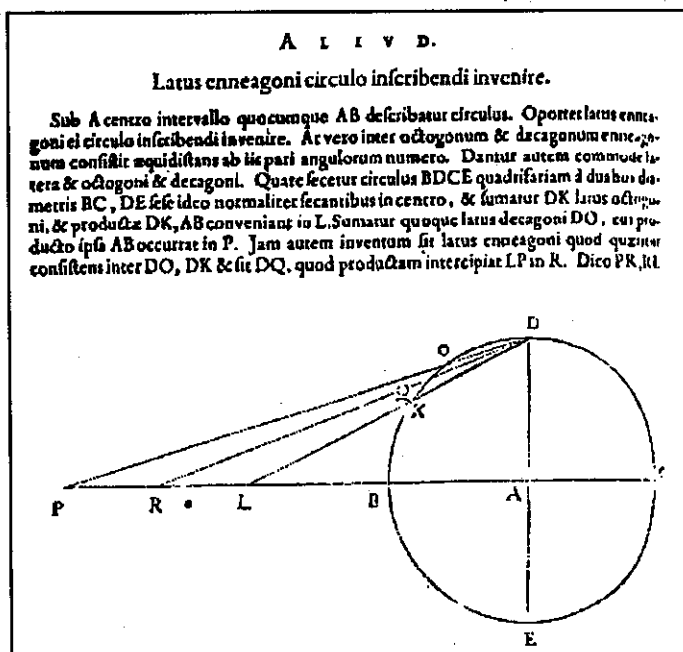
AUTRE EXEMPLE :

Trouver le côté de l'ennéagone à inscrire dans un cercle.

Du centre A avec un rayon quelconque AB on décrit un cercle. Il faut trouver le côté de l'ennéagone à inscrire dans ce cercle. Mais en réalité l'ennéagone se tient entre l'octogone et le décagone équidistant entre eux d'une paire d'angles. Mais les côtés de l'octogone et du décagone sont donnés facilement. C'est pourquoi le cercle BDCE est coupé en 4 parties par deux diamètres BC, DE, eux-mêmes pour cette raison se coupant perpendiculairement entre eux au centre et on prend DK le côté de l'octogone et les prolongements DK et AB se rencontrent en L. On prend aussi le côté du décagone DO auquel le prolongement rencontre le même AB en P. Mais déjà on a trouvé que le côté de l'ennéagone qu'on recherche se situant entre DO et DK et soit DQ ce côté dont le prolongement rencontre LP en R. Je dis que PR et RI sont égaux. Et ceci est général dans tous les côtés de polygones puisque si à partir du point limite D on prend les côtés de deux polygones équidistants d'un nombre pair d'angles du polygone dont on cherche le côté et les prolongements se terminent sur la droite AB, la partie de la droite AB interceptée par ces prolongements des deux côtés est coupée en deux parties par le prolongement du côté qu'on cherche. C'est pourquoi en conclusion LP étant donné à cause des côtés DO et DK donnés je couperai en deux parties LP en R et joignant DR qui coupe en Q le cercle, je présenterai DQ comme le côté de l'ennéagone et j'observerai la même méthode constamment dans les autres côtés.

Et si vraiment la vérité ne doit pas être admise pour ce qui n'est pas démontré ou presque démontré par le calcul, il m'a plu cependant de considérer attentivement de combien cette méthode s'écartait de la vérité. Ceci me sera permis immédiatement par la trigonométrie (Canon mathématique étant la table des fonctions trigonométriques). Les côtés AB, AG, AI, AL, AN, AP, AR étant établis pour un sinus maximal égal à AC résulteront de la cotangente (prosinus) ou de la tangente (foecundi) du nombre des angles qui se tiennent en D dans les triangles rectangles BDA, GDA, IDA, LDA, NDA, PDA et RDA. Mais ces angles sont donnés à cause des valeurs supposées exprimées à partir du

semi-périmètre de la circonférence (n). C'est pourquoi les mêmes quantités sont exprimées aussi en cotangente et surtout en différences de cotangentes.

**ERRATA**

PLOT n° 53 p. 26

si l'on traduit ses conclusions en termes modernes, il avait presque trouvé les formules suivantes :

$$\begin{aligned}\cos n\alpha &= \cos n\alpha - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cos^{n-2}\alpha \sin^2\alpha \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cos^{n-4}\alpha \sin^4\alpha \dots \\ \sin n\alpha &= n \cos^{n-1}\alpha \sin \alpha - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^{n-3}\alpha \sin^3\alpha \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cos^{n-5}\alpha \sin^5\alpha \dots\end{aligned}$$

... D'autres ont indiqué sa découverte de la résolution du "cas irréductible" de la cubique, sa formulation de la tangente,

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan 1/2(a+b)}{\tan 1/2(a-b)},$$

sa démonstration de la formule¹:

$$2/\pi = \sqrt{1/2} \times \sqrt{1/2 + 1/2\sqrt{1/2}} \times \sqrt{1/2 + 1/2\sqrt{1/2 + 1/2\sqrt{1/2}}}, \dots$$

17

¹Voir Chapitre XVIII, proposition II, du *Variorum de Rebus Mathematicis Responsorum Liber VIII* (Tours, 1593) ; réimprimé dans l'*Opera Mathematica*, p. 400. [N. d. T. Cf Note p. 143 de Catherine Goldstein : L'un est l'autre : pour une histoire du cercle In Michel Serres *Éléments d'histoire des sciences*, Paris, Bordas, 1989].

Comme voilà dans l'exemple de la première construction mécanique établi pour

AD = 100,000

BA = 100 cotan 180°/4 = 100,000

on obtient

AI = 100 cotan 180°/5 = 137,638

AG = 100 cotan 180°/6 = 173,205

C'est pourquoi

IB = AI — AB = 37,638

IG = AG — AI = 35,567*

(* erreur de Viète)

* (Francisci Vietae
Opera Mathematica in
unum volumen conges-
ta ac recognita opera
atque studio Francisci à
Schooten Leydensis
Matheseos Professoris
Lugduni Batavorum
C1>I> CXLVI (1646)
(B.N. V 4188).
Oeuvres mathémati-
ques de François Viète
recueillies et révisées
en un seul volume
grâce au soin et au
travail de François de
Schooten, professeur
de Science à Leyde
(Lugdunum Batavorum)
1646.
VIII^a partie intitulée :
«Pseudo-Mesolabium et
alia quaedam adjuncta
capitula». La fausse
moyenne proportion-
nelle et certains autres
paragraphes rajoutés.
Chapitre II p. 283-285.

La construction mécanique donnerait
 $73,205/2 = 36,603$
IB et IG ne sont donc pas égaux et IG est
plus petit que IB.

Egalement dans le second exemple de la
construction mécanique

établi pour

AD = 100,000

AL = $100 \cotan 180^\circ/6 = 173,205$

on obtient

AN = $100 \cotan 180^\circ/7 = 207,652$

AL = $100 \cotan 180^\circ/8 = 241,421$

C'est pourquoi

NG = 34,347

LN = 33,769

La construction mécanique donnerait

$68,216/2 = 34,108$

NG et LN sont inégaux

LN étant inférieur à NG

Egalement dans le troisième exemple de
la construction mécanique

établi pour

AD = 100

AL = $100 \cotan 180^\circ/8 = 241,421$

AR = $100 \cotan 180^\circ/9 = 274,748$

AP = $100 \cotan 180^\circ/10 = 307,768$

C'est pourquoi

RL = 33,327

RP = 33,020

RL et RP sont inégaux RP plus petit que
RL

La construction mécanique donnerait
 $66,347/2 = 33,174$

Mais c'est un mystère que les côtés des
polygones tiennent entre eux un rapport
précis ce qui est apparent dans les analy-
ses des sections angulaires et j'avais mis
en note

parergôs (= superficiellement) dans le huitième
livre de réponses diverses aux
questions mathématiques.

Note : La construction mécanique que
Viète rattache aux Lydiens ou aux Etrus-
ques est basée sur une remarque simple
et générale : les segments formés par
l'intersection des côtés respectifs des
polygones de n-1 côtés et de n côtés ont
pour grandeur $\cot(\pi/n) - \cot(\pi/(n-1))$ quan-
tité qui est égale à :

$\sin(\pi/(n(n-1)))/\sin(\pi/n) \cdot \sin(\pi/(n-1))$

et qui tend vers $1/\pi$ quand $n \rightarrow \infty$

Mais si au lieu de n entier nous mettons x
un nombre réel positif quelconque la fonc-
tion

$$f(x) = \cotan \frac{\pi}{x} - \cotan \frac{\pi}{x-1} = \frac{\sin \frac{\pi}{x(x-1)}}{\sin \frac{\pi}{x} \cdot \sin \frac{\pi}{x-1}} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{x(x-1)}}{\cos \frac{\pi}{x(x-1)} - \cos \frac{\pi(2x-1)}{x(x-1)}}$$

$$f(x) = - \frac{\frac{2\pi}{x(x-1)} \left(1 - \frac{\pi^2}{6x^2(x-1)^2} + \frac{\pi^4}{120x^4(x-1)^4} - \frac{\pi^6}{5040x^6(x-1)^6} + \dots \right)}{\frac{2n^2}{x(x-1)} \left(1 - \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2} \right) + \frac{\pi^4}{360} \left(\frac{3}{(x-1)^2} + \frac{1}{x} \right) \left(\frac{1}{(x-1)^2} \right) \left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{3}{x} \right) + \dots \right)}$$

Cette formule avec un terme de plus au
dénominateur permet de retrouver les
résultats précédents elle s'écarte de la
valeur limite 0,318309886 de moins de
0,01189 à partir de $x = 10$ ce qui fait qu'à
moins de 4 % la méthode lydienne donne
des résultats assez satisfaisants pour x
supérieur à 10. Quand on pense que cette
méthode empirique a pu permettre aux
artisans de construire des engrenages ou
peut-être même les premières graduation
angulaires des télescopes ou lunettes
astronomiques et que nous retrouvons,
beaucoup plus sérieusement, de grands
mathématiciens comme Euler s'intéresser
à $\cot n/x$ nous avons pensé que cette
citation d'un texte de Viète, certainement
oublié pourrait pousser un certain nombre
de jeunes à s'intéresser aux mathémati-

ciens anciens...

L'expression de $\cotan(\pi/2x)$ quand x tend
vers 0 a été étudiée par Euler qui a trouvé
une expression asymptotique. En fait il
s'agit ici de : $\cotan(\pi/2n) \cotan \pi/2n =$
 $\cos(\pi/2n)/\sin(\pi/2n) = (2n/\pi) - (\pi/4n)$
en gardant ces deux termes pour la divi-
sion en 180 parties on trouve pour
 $\cotan \pi/360 = 114,588650$ et pour
 $360/\pi - \pi/720 = 114,587196$
 $360/n = 114,591559$

En se servant de l'approximation de π
d'Archimède (22/7) on obtient 114,5454545
à 4/10000 ième près la division du cercle
en 360 parties. On voit que la méthode
approximative précédente permettait une
précision suffisante pour diviser le cercle
en 360 parties... ■

UNE CLASSE DE COLLEGE

«NORMALE»

Jean JEHL - Sainte Eulalie (33)

Une statistique concernant l'évaluation des connaissances de fin de 3e d'une classe «normale» pour un collège : classe de 25 élèves, régulièrement classée troisième sur quatre aux contrôles communs. Elle a obtenu 8,3 de moyenne au brevet (8,5 en maths).

13 élèves sont allés en seconde, 12 ont réussi le brevet. Le contenu de l'évaluation (dont vous trouverez ci-dessous toutes les questions) a été décidé en commun pendant une réunion intercycle (collège-lycée professionnel-lycée).

Qu'en pensez-vous, lecteurs du Plot ? Avez-vous obtenu des résultats semblables ? Ou bien complètement différents dans certains domaines ?

TESTEZ VOS MATHS (TROISIEME)

REMARQUES

- Le sujet est trop long pour deux heures : les meilleurs élèves furent obligés de choisir entre les questions qu'ils savaient finir.
- Seuls cinq jeunes ont eu trop de temps pour leurs connaissances.
- Tout ce qui concerne le vocabulaire mathématique ou la traduction mathématique de phrases françaises pose des problèmes aux enfants.
- L'identité $a^2 - b^2$ crée de très graves difficultés : une seule élève ne l'a jamais confondue avec $(a - b)^2$ (classée troisième dans la classe loin derrière les deux premiers).
- Les formules dans les repères ne sont pas du tout assimilées par les élèves.
- Nos élèves sont incapables de convertir à la sortie du collège.

I - Calcule sous la forme de fractions irréductibles :

- a) $1/7 + 3/5 + 3$
b) $4/3 - 2/3 \times 7$

Résultats :

- a) 21 réponses justes 84 %
b) 12 réponses justes 48 %
9 erreurs de priorité

II - Ecris sous la forme de fractions irréductibles, sans radical, l'inverse des nombres suivants :

- a) $3/5 + 7/3$
b) $\sqrt{5}$
c) $-\sqrt{7}$

- d) Ecris sous la forme d'une fraction irréductible, la somme des inverses de 3 et de 4.
 e) Ecris sous la forme d'une fraction irréductible, l'inverse de la somme de 3 et de 4.

Résultats :

- | | |
|----------------------|------|
| a) 7 réponses justes | 28 % |
| b) 9 réponses justes | 36 % |
| c) 7 réponses justes | 28 % |
- personne ne connaît le mot radical
 9 confondent inverse et opposé
 2 confondent inverse et carré
 4 confondent $2 \times (2/3)$ et $4/6$
 d) 6 réponses justes 24 %
 e) 3 réponses justes 12 %

III - Calcule les développements de :

- a) $(x + 1/3)^2$
 b) $(3x - 4y)^2$
 c) $(x\sqrt{2} + 1)^2$
 d) $(-x + 1/7)^2$

Résultats :

- | | |
|-----------------------|------|
| a) 16 réponses justes | 64 % |
| b) 14 réponses justes | 56 % |
| c) 14 réponses justes | 56 % |
| d) 9 réponses justes | 36 % |
- 9 confondent $2x + 3$ et $5x$ en cours de devoir
 32 erreurs de confusion entre $a^2 - b^2$ et $(a - b)^2$ dans tout le devoir.

IV - Factorise :

- a) $2x^2 + 3x$
 b) $x^2 - 25$
 c) $1/4x^2 - 1/9y^2$
 d) $(3x - 5)^2 - 16$
 e) $(x - 3)^2 - (3x - 7)^2$

Résultats :

- | | |
|-----------------------|------|
| a) 7 réponses justes | 28 % |
| b) 17 réponses justes | 68 % |
| c) 9 réponses justes | 36 % |
| d) 7 réponses justes | 28 % |
| e) 9 réponses justes | 36 % |

V - Résous dans $\mathbb{R}$:

- a) $2x + 5 = 0$
 b) $-3x = 0$
 c) $(2x + 5)(-3x) = 0$
 d) $x^2 = 25$
 e) $x + 4 < -2x + 1$
 f) $-x + 10 \leq 2x + 4$

Résultats :

- | | |
|-----------------------|------|
| a) 14 réponses justes | 56 % |
| b) 13 réponses justes | 52 % |
| c) 6 réponses justes | 24 % |
| d) 13 réponses justes | 52 % |
| e) 8 réponses justes | 32 % |

f) 11 réponses justes 44 %
13 élèves, à l'une au moins des questions du V n'ont pas reconnu le produit nul.

VI - On donne $f(x) = x^2 + x + 3$

1) calcule $f(x)$ pour les valeurs suivantes de x :

- a) $x = 0$
- b) $x = -1$
- c) $x = \sqrt{2}$
- d) $x = 1 - \sqrt{3}$

Résultats :

- a) 19 réponses justes 76 %
- b) 17 réponses justes 68 %
- c) 15 réponses justes 60 %
- d) 6 réponses justes 24 %

2) Résous dans R l'équation : $f(x) = 3$

Résultats :

5 réponses justes 20 %

VII - Construis le point S tel que $BS = BA + BC$

Résultats :

4 réponses justes 20 %

VIII -

- a) Dans un repère orthonormé. Représente les points $E(-2, 3)$ et $F(1, 2)$.
- b) Calcule les coordonnées du point M milieu de $[EF]$.
- c) Calcule la distance FE.

Résultats :

- a) 19 dessins justes 76 %
- 2 élèves échangent abscisse et ordonnée
- b) 7 réponses justes 28 %
- c) 6 réponses justes 24 %

IX -

- a) Dans un repère orthonormé. Place les points $A(-1, 2)$ et $B(3, 0)$
- b) Détermine une équation de la droite (AB)
- c) Trace la droite d'équation $y = 2x - 1$
- d) Calcule les coordonnées du point d'intersection de la droite du c) et de la droite d'équation $x + 2y - 3 = 0$

Résultats :

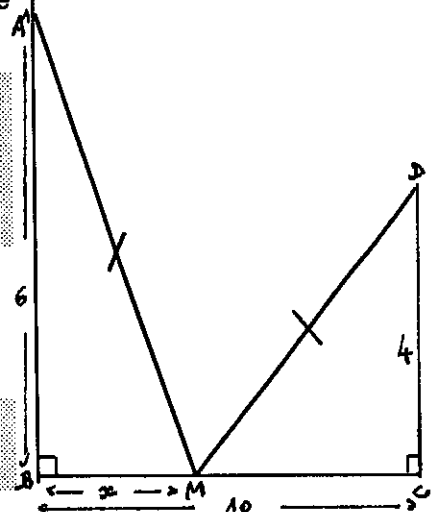
- a) 17 dessins justes 68 %
- b) 9 réponses justes 36 %
- c) 17 réponses justes 68 %
- d) 4 réponses justes 16 %

X - Soit un disque d'aire 40 cm^2

- a) Trouve une valeur approchée du rayon de ce disque à 10^{-2} près.
- b) Trouve une valeur approchée du périmètre de ce disque.

Résultats :

- a) 3 réponses justes 12 %
- b) 2 réponses justes 8 %



XI - La salle de classe mesure 2,50 m de hauteur, 10 m de longueur, 6 m de largeur. Quel est le volume d'air contenu dans la pièce ?

Résultats :

7 réponses justes 28 %

XII - Combien de jours y a-t-il entre le 15 mars inclus et le 20 juin inclus ?

Résultats :

10 réponses justes 40 %

5 élèves oublient un jour.

XIII - Le prix d'un ordinateur était de 5.200 F au premier janvier 1989 ; ce prix avait baissé de 500 F au 31 décembre 1989. Calcule le pourcentage de la diminution de prix par rapport au prix de début d'année.

Résultats :

14 réponses justes 56 %

XIV - Convertis en dl

- a) 1 litre
- b) 53 ml
- c) 0,52 cl
- d) 53 dm³
- e) 5,2 cm³

Résultats :

a) b) c) 13 réponses justes 52 %

d) 8 réponses justes 32 %

e) 7 réponses justes 28 %

XV -

- a) Convertis en heures, minutes et secondes 25.000 s.
- b) Convertis en secondes 2h 36min 43s.

Résultats :

a) 12 réponses justes 48 %

b) 12 réponses justes 48 %

XVI - Deux échelles de même longueur AM et DM sont posées entre deux murs et se touchent en M.

- a) Dessine la position correcte du point M et justifie la.
- b) On pose $BM = x$; exprime MC en fonction de x.
- c) Exprime AM^2 et MD^2 en fonction de x.
- d) Calcule x en résolvant une équation.

Résultats :

a) 2 réponses justes 8 %

b) 8 réponses justes 32 %

c) 6 réponses justes 24 %

3 élèves simplifient $\sqrt{9+x^2}$

d) 6 réponses justes 24 %

e) 3 réponses justes 12 %

et la galaxie des Arc Tangentes

Guy BRIAND, Orléans

Le "Challenge ADEMIR" est un concours proposé chaque année aux 180 Clubs des Fédérations MICROTEL et ADEMIR (clubs informatiques en milieu scolaire). En 1990, quatre de ses 18 questions visaient à la découverte de nouvelles formules de calcul des décimales de π , dans la famille des formules "Arc Tangente", et à leur mise en oeuvre au moyen de programmes adaptés. Cet article exploite les recherches qui ont conduit à l'élaboration de ces questions, et les réponses qui y ont été apportées.

Dans la longue histoire des essais de calcul du nombre π avec un nombre croissant de décimales, on distingue grosso modo trois périodes :

- **une période "géométrique"**: l'aire du cercle, ou son périmètre, et donc le nombre π , sont évalués à partir de l'aire ou du périmètre de polygones réguliers inscrits ou circonscrits à ce cercle. Le meilleur résultat obtenu par ces méthodes est celui de **Ludolph Von Ceulen**, en 1609 : trente-cinq décimales...

- **une période "analytique"** : π est calculé comme limite de la somme d'une infinité de termes, ou du produit d'une infinité de facteurs, somme ou produit convergeant plus ou moins vite selon la formule utilisée. Parmi ces formules, les développements en série de la fonction Arc Tangente ont fourni les récoltes les plus intéressantes : plus d'un million de décimales en 1974.

- et enfin, une période qu'on pourrait appeler **"période des algorithmes itératifs"**. Préparée au début du siècle par les recherches de l'Indien **Ramanujan**, et illustrée depuis 1970 par les travaux, entre autres, de **Brent**, **Salamon**, **Borwein** et **Borwein**, elle aboutit, provisoirement, en 1989 à l'obtention du milliard de décimales...

Ce ne sont pas cependant ces "algorithmes itératifs" qui nous intéresseront ici : leur mise en oeuvre semble trop complexe

et exige des moyens de calcul trop puissants pour être réalisée actuellement sur micro-ordinateur. Mais notre dessein, dans cet article, est :

- d'explorer la "galaxie" des formules Arc Tangente,
- et de prospecter quelques voies qui permettent d'en tirer le maximum pour le calcul des décimales de π sur micro-ordinateur.

Brève histoire des formules Arc Tangente.

• En 1670, **James Gregory** formule le développement en série de la fonction "arc tangente" : l'arc de cercle dont la tangente est x (en abrégé : Arc Tan x) est égal à : $x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + x^9/9 - x^{11}/11 \dots$ etc...

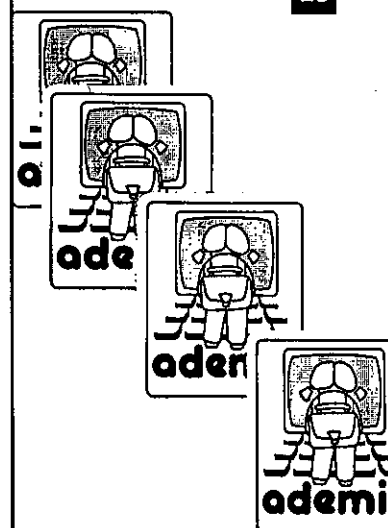
• Dès 1673, **Leibniz** en déduit que l'arc de cercle de tangente 1 étant $\pi/4$,
 $\pi/4 = \text{Arc Tan } 1$
 $= 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11 \dots$

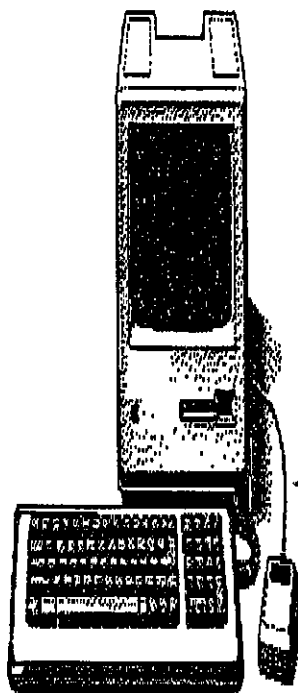
[1-1]

Mais ce développement est quasiment inutilisable : il "converge" trop lentement : il exige 628 termes pour obtenir de façon stable 2 décimales exactes, 2455 termes pour 3 décimales, et plus de 130 000 termes pour 4 décimales,...

• En 1706, **John Machin** découvre que
 $\pi/4 = 4 \text{ Arc Tan } 1/5 - \text{Arc Tan } 1/239$

[2-1]





et il utilise ce résultat pour calculer les 100 premières décimales de Pi. Un pas décisif est fait: la formule converge vers Pi de façon assez rapide.

• Au cours des deux siècles suivants, on recherche des formules analogues... Les plus connues sont ci-dessous. On y a abrégé "Arc Tangente" en "At"; et on a affecté à chaque formule une référence, entre crochets...

$$\text{Pi}/4 = 4 \text{ At } 1/5 - \text{At } 1/70 + \text{At } 1/99$$

(Euler, 1764) [3-1]

$$\text{Pi}/4 = \text{At } 1/2 + \text{At } 1/3$$

(Hutton, 1776) [2-2]

$$\text{Pi}/4 = 2 \text{ At } 1/3 + \text{At } 1/7$$

(Hutton, 1776) [2-3]

$$\text{Pi}/4 = 2 \text{ At } 1/2 - \text{At } 1/7$$

(Hutton ?) [2-4]

$$\text{Pi}/4 = 12 \text{ At } 1/18 + 8 \text{ At } 1/57 - 5 \text{ At } 1/239$$

(Gauss ?) [3-2]

$$\text{Pi}/4 = \text{At } 1/2 + \text{At } 1/5 + \text{At } 1/8$$

(Strassnitzki, 1840) [3-3]

$$\text{Pi}/4 = 3 \text{ At } 1/4 + \text{At } 1/20 + \text{At } 1/1985$$

(Stormer, 1896) [3-4]

$$\text{Pi}/4 = 6 \text{ At } 1/8 + 2 \text{ At } 1/57 + \text{At } 1/239$$

(Stormer, 1896) [3-5]

• Cette dernière formule, et celle de Gauss, permettent en 1974 à Jean Guilloud et Martine Bouyer d'obtenir plus d'un million de décimales de Pi. Ce record, établi alors sur un gros ordinateur, tout-un-chacun peut-il aujourd'hui l'espérer sur sa "bécanne" familière ? Nous allons tenter de baliser quelques pistes dans cette direction.

Nos vaisseaux pour voyager dans la "Galaxie" Arc Tangente...

Les développements de $\text{Pi}/4$ sous forme de sommes d'Arcs Tangente ne se limitent pas à ces dix expressions historiques... Il y en a d'autres, innombrables. Pour se véhiculer de l'un à l'autre, plusieurs formules existent. Nous en avons utilisé surtout deux, que nous avons baptisées "formule de dissection", et "formule de trissection".

• "Disséquer l'entier n", c'est, pour nous, déterminer les entiers a et b tels que :

$$\text{At } 1/n = \text{At } 1/a + \text{At } 1/b.$$

(At est mis pour Arc tangente)

Cela est équivalent à :

$$(n^2+1) = (a-n)(b-n),$$

et donc, à chaque couple de diviseurs de (n^2+1) correspond un "couple dissecteur" de "n"...

Exemple : dissection de "2" :

$$n = 2 \implies n^2 + 1 = 5.$$

or $5 = 1 \times 5$
d'où $a - 2 = 1$ et $b - 2 = 5$
soit $a = 3$ et $b = 7$
et d'autre part :

$5 = (-1) \times (-5)$
d'où $a - 2 = -1$ et $b - 2 = -5$
soit $a = 1$ et $b = -3$

D'où,

$$\begin{aligned} \text{At } 1/2 &= \text{At } 1/3 + \text{At } 1/7, \\ \text{et } \text{At } 1/2 &= \text{At } 1 - \text{At } 1/3 \end{aligned}$$

Le premier résultat mène de la formule [2-2] aux formules [2-3] ou [2-4]; le second, de la formule de Leibniz à la formule [2-2]...

• Un programme informatique très simple permet d'éditer des "tables" des "couples dissecteurs" de tout entier positif. La moisson est intéressante : ces tables constituent d'une certaine façon une "carte" de l'ensemble des nombres entiers organisé par notre formule de dissection en un réseau, "parallèle" en quelque sorte à celui qu'y crée la relation de divisibilité. Si certains nombres, comme le "2" de l'exemple ci-dessus, n'ont que deux couples dissecteurs, d'autres en capitalisent une douzaine (tels 43, 47, 57, 73) voire une trentaine (tels 307, 447, 557...) et constituent des maillons forts du réseau. On les retrouvera souvent d'ailleurs dans nos développements de $\text{Pi}/4$... et dans certaines formules de Ramanujan...

De Pi en Pi

• A l'aide de ces "tables de dissection", on peut voyager de développement de $\text{Pi}/4$ en développement de $\text{Pi}/4$. Un exemple, avec, pour point de départ,

la formule de Gauss :

$$\text{Pi}/4 = 12 \text{ At } 1/18 + 8 \text{ At } 1/57 - 5 \text{ At } 1/239$$

soit : $[12/18 + 8/57 - 5/239]$

De nos tables : 18 ==> (31;43)

d'où [12/31 + 12/43 + 8/57 - 5/239]
puis 31 ==> (57;68)

d'où [12/43 + 20/57 + 12/68 - 5/239]
puis 43 ==> (68;117)

d'où [20/57 + 24/68 + 12/117 - 5/239]
soit : $\pi/4 = 20 \text{ At } 1/57 + 24 \text{ At } 1/68 + 12 \text{ At } 1/117 - 5 \text{ At } 1/239$

• De façon analogue, "trisquer l'entier n", ce sera, dans notre jargon, trouver des nombres entiers a,b,c tels que :

$\text{At } 1/n = \text{At } 1/a + \text{At } 1/b + \text{At } 1/c$,

ce qui revient à :

$(n^2 + 1)(S - n) = (a - n)(b - n)(c - n)$,

avec $S = a + b + c$,

et encore à :

$c' = (n^2 - 1)(a' + b' + 2n) / (a'b' - n^2 - 1)$,

avec $a' = a - n$, $b' = b - n$, $c' = c - n$

Là aussi, un programme informatique encore assez simple permet d'obtenir des tables des triplets trisecteurs de tout nombre entier n. Impressionnantes, ces tables : 18, par exemple, compte 59 triplets trisecteurs ; 57 en totalise 187, et pour 99, il y en a 207...

Ces tables ne font pas double emploi avec les tables de dissection: si certains triplets trisecteurs peuvent être obtenus au moyen de deux dissections ou plus, d'autres ne sont ainsi accessibles que difficilement, ou pas du tout.

Exemple de travail avec les tables D et T
(D pour "dissection"...)

à partir de la formule [3-5] de Stormer :

$\pi/4 = 6 \text{ At } 1/8 + 2 \text{ At } 1/57 + \text{At } 1/239$
soit [6/8 + 2/57 + 1/239]

Tables T : 8 ==> (18,21,47)
d'où [6/18 + 6/21 + 6/47 + 2/57 + 1/239]

Tables T : 18 ==> (21,239,268)
d'où [12/21 + 6/47 + 2/57 + 7/239 + 6/268]

Tables D : 21 ==> (38,47)
d'où [12/38 + 18/47 + 2/57 + 7/239 + 6/268]

Tables T : 38 ==> (68,117,327)
d'où [18/47 + 2/57 + 12/68 + 12/117 + 7/239 + 6/268 + 12/327]

Tables D : 47 ==> (57,268)
d'où [20/57 + 12/68 + 12/117 + 7/239 + 24/268 + 12/327]

soit

$\pi/4 = 20 \text{ At } 1/57 + 12 \text{ At } 1/68 + 12 \text{ At } 1/117 + 7 \text{ At } 1/239 + 24 \text{ At } 1/268 + 12 \text{ At } 1/327$.

... Et nos boussoles dans ce voyage?

Règles de recherche:

* Les développements de $\pi/4$ cités plus haut sont des sommes de deux ou trois "termes", et chaque terme est caractérisé par un "coefficient" et un "dénominateur"; ainsi la formule de Machin :

$\pi/4 = 4 \text{ Arc Tan } 1/5 - \text{Arc Tan } 1/239$
a un premier terme de coefficient 4 et de dénominateur 5,
et un second terme de coefficient -1 et de dénominateur 239.

* De tels développements à 3, 4, 5, ... 10 termes, ou plus, nos formules de "dissection" ou de "trisection" en fournissent, en pagaille... mais ces résultats ne sont intéressants que s'ils permettent un calcul assez rapide de π , ce qui suppose :

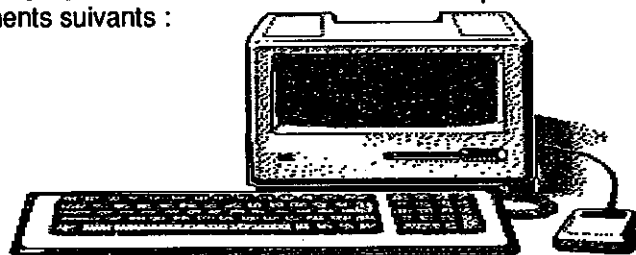
- un nombre de termes aussi réduit que possible ;
- des dénominateurs aussi élevés que possible, et surtout le plus petit d'entre eux...

Souvent aussi s'y ajoutera un autre impératif, celui d'une relative homogénéité dans l'ordre de grandeur des dénominateurs, ce qui se traduira par des "fourchettes", variables selon le langage et le format numérique utilisés pour programmer ces développements.

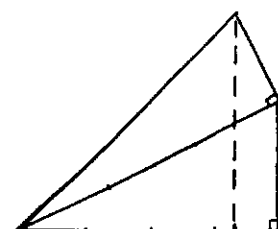
Les développements

Notre recherche s'est orientée aussi vers des développements dont un (au moins) des dénominateurs est un des nombres 4, 8, 16, 32, 64, ..., 512. En Assembleur en effet, la division par ces nombres ou leurs carrés peut se faire de façon très rapide (par décalage de bits ou d'octets).

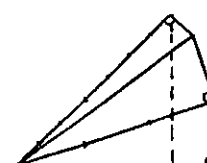
Citons, par exemple, outre les formules [3-4] et [3-5], de Stormer, et les formules [5-4] et [6-1] de la page 26, les développements suivants :



suite page 27



$\text{Arc tan } 1$
 $= \text{Arc tan } 1/2 + \text{Arc tan } 1/3$



$2 \text{ Arc tan } 1/3 + \text{Arc tan } 1/7$
 $= \text{Arc tan } 1$

Les développements trouvés.

Voici, parmi les cent quarante et quelques développements ainsi mis à jour, les plus intéressants à notre avis (tous sont des expressions de $\text{Pi}/4$) :

— **A trois termes :**

aucun n'est plus rapide que celui de Gauss.

Citons pourtant celui-ci, dont un des dénominateurs est décimal :

$$5\text{At } 1/14,5 + 7\text{At } 1/18 + 3\text{At } 1/57 \quad [3-6]$$

— **A quatre termes :**

$$12\text{At } 1/38 + 20\text{At } 1/57 + 7\text{At } 1/239 + 24\text{At } 1/268 \quad [4-1]$$

$$12\text{At } 1/43 + 20\text{At } 1/57 + 12\text{At } 1/68 - 5\text{At } 1/239 \quad [4-2]$$

$$20\text{At } 1/57 + 24\text{At } 1/68 + 12\text{At } 1/117 - 5\text{At } 1/239 \quad [4-3]$$

— **A cinq termes :**

$$34\text{At } 1/68 + 22\text{At } 1/117 + 5\text{At } 1/239 + 20\text{At } 1/307 + 10\text{At } 1/882 \quad [5-1]$$

$$44\text{At } 1/68 + 12\text{At } 1/117 - 5\text{At } 1/239 + 20\text{At } 1/882 + 20\text{At } 1/4557 \quad [5-2]$$

$$68\text{At } 1/99 - 12\text{At } 1/117 + 39\text{At } 1/239 + 20\text{At } 1/307 - 24\text{At } 1/882 \quad [5-3]$$

$$32\text{At } 1/117 + 24\text{At } 1/130,5 + 44\text{At } 1/142 - 5\text{At } 1/239 + 20\text{At } 1/512 \quad [5-4]$$

— **A six termes :**

(on abrègera désormais $X \text{ ArcTan } 1/Y$ en X/Y)

$$32//117 + 44//142 + 24//193 - 5//239 + 24//403 + 20//512 \quad [6-1]$$

$$56//157 + 39//239 + 68//268 - 12//302 + 20//307 - 12//882 \quad [6-2]$$

$$12//191 + 39//239 + 68//268 + 32//302 + 20//307 + 44//327 \quad [6-3]$$

$$56//191 + 39//239 + 68//268 - 12//302 + 20//307 + 44//882 \quad [6-4]$$

$$39//239 + 68//268 + 44//302 + 20//307 + 56//327 - 12//882 \quad [6-5]$$

$$39//239 + 68//268 + 64//307 + 56//327 - 12//882 + 44//18543 \quad [6-6]$$

— **A sept termes :**

$$39//239 + 56//265 + 68//268 - 12//302 + 20//557 + 76//684 + 44//882 \quad [7-1]$$

$$95//265 + 68//268 - 12//302 + 20//557 + 76//684 + 44//882 + 39//2436 \quad [7-2]$$

$$68//268 + 83//302 + 20//557 + 76//684 + 44//882 + 95//2163 + 39//2436 \quad [7-3]$$

— **A huit termes :**

$$56//191 + 39//239 + 88//437 - 12//487 + 68//693 - 12//795 + 44//882 + 20//1032 \quad [8-1]$$

$$171//557 + 227//684 + 68//853 - 24//882 + 95//2163 + 39//2436 + 68//2621 + 151//18543 \quad [8-2]$$

$$171//557 + 227//684 + 44//882 + 95//2163 + 39//2436 + 68//2621 + 151//18453 + 68//25943 \quad [8-3]$$

— **A neuf termes :**

$$227//684 + 44//882 + 171//1407 + 171//1607 + 266//2163 + 39//2436 + 68//3318 + 68//5793 + 83//18543 \quad [9-1]$$

$$227//684 + 171//1407 + 215//1607 + 68//1818 - 24//1955 + 266//2163 + 39//2436 + 68//2621 + 151//18543 \quad [9-2]$$

— **A dix termes :**

$$171//1407 + 215//1607 + 493//2163 + 83//2436 + 454//2582 + 68//3318 + 227//4443 + 68//5793 + 44//9901 + 83//18543 \quad [10-1]$$

$$171//1407 + 442//1607 + 493//2163 + 83//2436 + 68//2621 + 227//2801 + 44//9901 + 151//18543 + 68//25943 + 227//49083 \quad [10-2]$$

$$\begin{array}{rcll}
 & & 5//8 & + & 2//18 & + & 3//57 & [3-7] \\
 & & 4//4 & - & 4//21 & - & 1//239 & [3-8] \\
 & & 6//8 & + & 2//32 & - & 2//73 & + & 1//239 & [4-4] \\
 & & 12//16 & + & 2//57 & + & 1//239 & - & 6//2072 & [4-5] \\
 20//32 & + & 4//73 & + & 12//117 & - & 5//239 & + & 24//993 & [5-5] \\
 20//32 & + & 24//68 & - & 20//73 & + & 12//117 & - & 5//239 & [5-6] \\
 12//16 & + & 2//32 & - & 2//73 & + & 1//239 & - & 6//2072 & [5-7] \\
 24//32 + 7//241 & + & 4//437 & - & 4//2072 & - & 12//16432 & + & 3//28800 & [6-6] \\
 12//16 + 2//32 - 2//64 + 1//239 & + & 2//460 & - & 6//2072 & - & 2//4033 & [7-4] \\
 50//64 + 1//239 + 2//460 - 6//2072 & - & 2//4033 & - & 12//16432 & - & 26//131168 & [7-5]
 \end{array}$$

Le hit-parade des formules

Comparaison des résultats obtenus avec ces formules.

Trois chiffres peuvent caractériser les performances d'une formule donnée :

Le rapport D/T (nombre de Décimales désiré/nombre de Termes nécessaires). Là, pas de mystère : ce rapport est égal à "2 log a", "a" étant le "plus petit dénominateur" de la formule. Par exemple :

- pour la formule de Machin : $\pi/4 = 4 \text{ Arc Tan } 1/5 - \text{Arc Tan } 1/239$, ce rapport D/T est égal à $2 \log 5$, soit environ 1,4 : il faut 10 termes pour obtenir 14 décimales exactes...

- pour la formule de Gauss, ce rapport atteint $2 \log 18$, ($\approx 2,51$);

- pour notre formule [4-3], 3,51 ... et 6,30 pour notre formule [10-1].

Le nombre de décimales calculables.

Il dépend : du langage employé, de la formule, du programme, et de la mémoire disponible de l'ordinateur utilisé. On l'a calculé ici en tenant compte des trois premières de ces contraintes, (la dernière

pouvant être tournée par le recours à une mémoire étendue) et on l'a noté "DC" dans le tableau qui suit.

Le temps de calcul

- Pour une formule donnée, il varie un peu moins vite que le carré du nombre de décimales désiré...

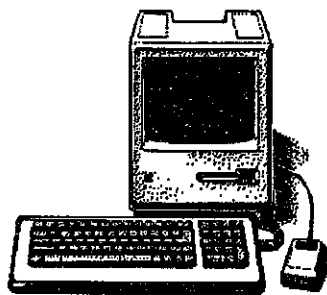
- Pour un nombre donné de décimales, il dépend de l'ordinateur, du langage, de la formule et du programme.... On a donc cherché, pour chaque formule, le programme le plus rapide, et cela dans trois cas :

1) en GwBasic, sur AT 286/12, par blocs de 12, pour 120 et 600 décimales ;

2) en Turbo-Basic version 1.1, sur un XT muni d'un coprocesseur 8087, par blocs de 10, pour 600 et 2400 décimales.

3) sur ce même XT, en Power-Basic (version 2.1 du Turbo-Basic), qui permet des calculs plus rapides, et par blocs plus gros : 12 à 14 chiffres selon la grandeur des dénominateurs de la formule (15 même si aucun dénominateur ne dépasse 99); et cela, pour 2400 décimales, par blocs de 12, puis de 13 ou 14 quand c'est possible. Voici quelques-uns des résultats trouvés :

Formule	rapp. D/T	en GwBasic, sur AT			sur XT+8087, en T-B, et			en P-B, 2400 déc		
		120 d	600 d	DC	600 d	2400 d	DC	b. 12	b. 13	b. 14
Mach	1,39	7"	2'29"	21 750	19"	4'57"	81 000	3'25"	3'10"	2'57"
Gaus	2,51	5"	1'49"	17 400	13"	3'30"	81 000	2'25"	2'15"	2'6"
4-3	3,51	5"	*1'40"	14 500	13"	*3'12"	70 800	*2'11"	*2'2"	1'53"
5-1	3,66	6"	2'3"	12 400	13"	*3'20"	60 700	*2'17"	*2'7"	--
5-3	3,99	6"	1'59"	12 400	13"	*3'10"	60 700	*2'10"	*2'1"	--
5-4	4,13	5"	*1'48"	12 400	13"	*3'11"	60 700	*2'10"	*2'1"	--
6-3	4,56	7"	2'26"	10 800	13"	*3'20"	53 100	*2'17"	*2'7"	1'57"
6-4	4,56	7"	2'23"	10 800	13"	*3'17"	53 100	*2'14"	*2'5"	--
6-5	4,75	7"	2'31"	10 800	12"	*3'12"	53 100	*2'11"	*2'2"	--
6-6	4,75	7"	2'22"	10 800	13"	*3'15"	53 100	*2'13"	*2'4"	--
7-3	4,85	8"	2'48"	9 600	22"	5'28"	47 200	*2'14"	--	--



On a signalé par une "" les temps meilleurs que ceux de la formule de Gauss, dans les mêmes conditions. Plus le Basic est évolué, semble-t-il, plus les formules à gros dénominateurs ont leur chance...

Notons cependant, pour compléter ce tableau :

- que le "nombre de décimales calculables" (DC) indiqué pour le Turbo-Basic ne peut parfois être atteint qu'en recourant à une mémoire étendue. Ce langage s'étale en effet sur 260 kilo-octets de mémoire.

- que cette condition remplie, et si on opère par blocs de 14 décimales, on peut porter ce nombre jusqu'à 94 500 décimales en Power-Basic (340 kilo-octets).

Mais c'est en **Assembleur** que la comparaison aura le plus d'intérêt, en particulier avec les formules de second type (dont un dénominateur au moins est 8, 16, 32, ... ou 512). Programme de travail ambitieux, qui exigera quelque temps ... Un collègue du Club Microtel d'Albi, Mr Didier Rivière, a d'ores et déjà programmé en Assembleur 8086 la formule de Gauss, et obtenu, sur AT 286/12, 68 000 décimales en 3 heures; et 157 600 en 10 heures sur AT 386/16. La place occupée en mémoire n'excède pas 332 ko (pour N décimales : $N \times 0,416 \times 5$ oct., plus les 3500 octets du programme). Moyennant quelques retouches, ce programme devra pouvoir fournir jusqu'à 164 500 décimales.

A ce stade, un obstacle sérieux apparaît: le "diviseur" $2N+1$ du terme de rang N dans le développement de $\text{ArcTan } x$ atteint 2^{17} , ce qui pose problème pour la division par ce nombre d'un "mot" de 32 bits.

Sans doute, on peut reculer cette barrière en remplaçant la formule de Gauss par une des formules 4-3, 5-4, 6-1 ou 6-3, à meilleur rapport D/T; puis, en recourant à la mémoire étendue, flirter avec les 300 000 décimales... Mais la route vers le million de décimales sur micro-ordinateur ne sera vraiment dégagée que par l'utilisation des "dmots" de 64 bits et des instructions propres à l'Assembleur du 80386 (ou du 80287). On y pense... Affaire à suivre...

Autres recherches, autres résultats.

- Après les formules de "dissection" et de "trisection", des formules de quadri-section et de 5-section ont été mises au point... La mise en oeuvre de la recherche par leur

intermédiaire est cependant plus laborieuse.

- On a cherché aussi des décompositions de la forme :

$\text{Arc Tan } 1/n = 2 \text{ Arc Tan } 1/a + \text{Arc Tan } 1/b$
ce qui a mené, entre autres, à la filière suivante :

$n = 1 \implies a = 3 \text{ et } b = 7$
 $n = 7 \implies a = 17 \text{ et } b = 41$
 $n = 41 \implies a = 99 \text{ et } b = 239$
 $n = 239 \implies a = 577 \text{ et } b = 1393 \text{ etc..}$

puis à ces deux formules:

(u_n) étant la suite :

$u_1 = 1, u_2 = 3, \dots, u_n = 2 u_{n-1} + u_{n-2}$,

on a :

$\text{Pi} = 2(\text{ArcTan } 1/u_2 + \text{ArcTan } 1/u_4 + \dots + \text{ArcTan } 1/u_{2n} + \dots)$

ou

$\text{Pi} = 2(\text{ArcTan } 1/u_2 + \text{ArcTan } 1/u_4 + \dots + \text{ArcTan } 1/u_{2n}) + \text{ArcTan } 1/u_{2n+1}$

- Décompositions de la forme $\text{ArcTan } 1/n = 2 \text{ ArcTan } 1/a + \text{Arc Tan } 1/b$.

Pour chaque valeur de n, elles donnent au moins le couple

$(2n, 4n^2 + 4n)$

et parfois un autre, aux deux termes moins disproportionnés.

- Par contre, aucun résultat nouveau dans les directions :

$\text{ArcTan } 1/n = 3 \text{ ArcTan } 1/a \pm \text{ArcTan } 1/b$ et
 $\text{ArcTan } 1/n = 4 \text{ ArcTan } 1/a \pm \text{ArcTan } 1/b$

- Enfin, on a parfois accepté, dans l'exploitation des formules de dissection et de trisection, des développements de $\text{Pi}/4$ avec **dénominateurs décimaux**. Certains de ces résultats (tels les développements 3-6 et 5-4) permettent un calcul de Pi assez rapide et sans histoire; d'autres, par contre, génèrent des erreurs auxquelles nous n'avons pas su remédier.

On a trouvé aussi des développements analogues à celui d'Euler :

$\text{Pi}/4 = 5 \text{ ArcTan } 1/7 + 2 \text{ ArcTan } 3/79$
avec "numérateur" différent de 1, par exemple :

$\text{Pi}/4 =$

$15 \text{ ArcTan } 1/57 +$

$3 \text{ ArcTan } 3/79 + 5 \text{ ArcTan } 7/524$

Si aucun n'est assez performant quant au rapport D/T (nombre de Déc./nombre de Termes) pour compenser la plus grande complexité de calcul qu'exige leur pro-

grammation sur micro-ordinateur, ils peuvent au moins servir de relais dans la recherche de formules de dénominateur

1. Ainsi, de la formule de Gauss :

$$\text{Pi}/4 = 12 \text{ At } 1/18 + 8 \text{ At } 1/57 - 5 \text{ At } 1/239$$

et de

$$\text{At } 1/57 = \text{At } 7/524 + \text{At } 1/239$$

puis de

$$\text{At } 7/524 = \text{At } 1/99 + \text{At } 1/307$$

on déduit :

$$\text{Pi}/4 = 12 \text{ At } 1/18 + 8 \text{ At } 1/99 + 3 \text{ At } 1/239 + 8 \text{ At } 1/307$$

Programmation de ces formules : GAUSS d'abord...

On a pris pour exemple de départ le calcul de Pi par la formule de Gauss, en GwBasic. Le programme obtenu se transpose en effet facilement aux autres formules citées, et se traduit sans problème notable en Turbo-Basic et en Assembleur (en Turbo-Pascal par contre, nous n'avons pas pu dépasser les 300 décimales, par suite de la rigidité des allocations-mémoire de ce langage).

Quatre étapes dans cette programmation :

1- Marier le développement de Arc Tan x :

$$\text{Arc Tan } x = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 \dots (A)$$

à la Formule de Gauss :

$$\text{Pi} =$$

$$48 \text{ At } 1/18 + 32 \text{ At } 1/57 - 20 \text{ At } 1/239, (F)$$

tout en tenant compte de la nécessité de saucissonner l'expression de Pi à obtenir, de la découper en "blocs" d'égales longueurs, manipulables par l'ordinateur...

Le calcul à programmer se développe donc selon trois directions :

- les termes de la série (A) : c'est la dimension A...
- les trois termes de la formule (F) : dimension F...
- la suite des blocs dont se compose le nombre à calculer : dimension B...

Le "pointeur" de l'ordinateur doit parcourir toutes les cellules d'un "cube" (un cube ? pas vraiment... un building plutôt, de plusieurs étages, dont chacun a, en gros, la forme d'un prisme triangulaire...) et cela, dans un "ordre" donné, qui peut être :

- pour chaque valeur de A, puis de F, chaque valeur de B (option AF)
- pour chaque valeur de F, puis de A, chaque valeur de B (option FA)
- (les autres options possibles semblent

plus difficiles à programmer)

Cela donne, pour $x = 48$, $y = 32$, $z = -20$, $M = 18$, $P = 57$, $Q = 239$

pour l'option AF :

$$\begin{aligned} \text{Pi} &= 1. (x/M + y/P + z/Q) \\ &- (1/3) \cdot (x/M^3 + y/P^3 + z/Q^3) \\ &+ (1/5) \cdot (x/M^5 + y/P^5 + z/Q^5) \\ &- \dots \end{aligned}$$

et pour l'option FA :

$$\begin{aligned} \text{Pi} &= (x/M - x/3M^3 + x/5M^5 - \dots) \\ &+ (y/P - y/3P^3 + y/5P^5 - \dots) \\ &+ (z/Q - z/3Q^3 + z/5Q^5 - \dots) \end{aligned}$$

Dans cet exemple, c'est l'option AF, plus gourmande en mémoire, mais plus rapide, qu'on retiendra.

2- Programme simplifié et commenté :

- On appelle X, Y, et Z les suites :

$$(x.M, \quad x/M, \quad x/M^3, \quad x/M^5, \dots),$$

$$(y.P, \quad y/P, \quad y/P^3, \quad y/P^5, \dots),$$

$$(z.Q, \quad z/Q, \quad z/Q^3, \quad z/Q^5, \dots).$$

(pour la suite X par exemple, chaque terme est le quotient du précédent par M^2 , le premier terme, indicié par 0, ne servant qu'à amorcer le processus);

- On appelle U la suite dont le terme de rang "n" est, dans un premier temps, la somme des termes de rang "n" des suites X, Y et Z; et, dans un second temps, cette somme divisée par $(2n - 1)$;

- Et enfin, S est une suite dont le terme de rang "n" est la somme des n premiers termes de la suite U, compte tenu de l'alternance des signes.

Ce qui donne :

```
5 DEFINT D-P:DEFDBL R-Z
10 I = 1 : L = 1 : J = 0
```

```
20 X=48:Y=32:Z=-20:M=18:
   P=57:Q=239
```

```
30 X=X*M:Y=Y*P:Z=Z*Q:
   M=M*M:P=P*P:Q=Q*Q
```

```
40 X=X/M
```

```
50 Y=Y/P
```

```
60 Z=Z/Q
```

```
70 U=X+Y+Z
```

```
80 U=U/I
```

```
90 S=S + L*U
```

```
91 L=-L:J=J+1:I=I+2
```

```
99 IF U>0 THEN 40
```

```
100 PRINT S
```

Définir les formats numériques utilisés
J numérote les termes des 5 suites ;
L alterne les signes de la suite U ;
I fournit la suite 1,3,5...

des coefficients des dénominateurs
Introduire coefficients et dénominateurs
Calcul des termes de rang 0

des suites X,Y,Z
et remplacer M,P,Q par leurs carrés
Passage d'un terme de (X) au suivant
...Idem pour Y...

... et pour Z.
Somme des termes de rang n des suites
X,Y,Z...

diviser cette somme par le dénominateur
Ajout du n-ième terme de S
aux précédents.

Mise à jour des coefficients
Test d'arrêt ou de poursuite du calcul
Affichage des résultats.

Tel quel, ce programme permet déjà le calcul de Pi avec 15 décimales exactes, en 6 boucles....

3- Passage en "multiprécision".

Pour obtenir une précision théoriquement illimitée :

- on utilise les techniques du "calcul par blocs de p chiffres", ce qui veut dire qu'on opère en base "10 exposant p" (en GwBasic, pour la formule de Gauss, on peut prendre p égal à 12 : c'est la plus grande puissance de 10 qui permet les calculs de ce programme en "double précision", sans dépassement de capacité ni perte de donnée ; en Turbo-Basic 1.0, ne pas prendre p supérieur à 11)
- on donne aux variables X,Y,Z,U,S un indice qui croîtra de 0 à N, N étant le nombre de blocs de p décimales désiré ;
- chacune des opérations des lignes 40 à 90 (divisions ou sommes) se fait en transposant en base "10 exposant p" les techniques de calcul à la main des opérations similaires en base 10. La base "10 exposant p" est notée V ; R désigne la retenue ou le report, et T le total provisoire ;
- les divisions (lignes 40,50,60,80) se font de gauche à droite, donc du bloc 0 vers le bloc N ; et les additions (lignes 70 et 90), du bloc N vers le bloc 0.

4- Optimisation.

Pour accélérer les calculs :

- on utilise autant que possible le format numérique "entier" ;
- on introduit les variables dans l'ordre de leur fréquence d'utilisation, et on en limite le nombre en les réemployant dès que possible (M, P, Q remplacés par leurs carrés à la ligne 35...)
- et surtout, on court-circuite les boucles ou parties de boucles devenues inutiles. En effet, les variables X, Y et Z convergent régulièrement vers zéro, en ce sens que leurs premiers blocs s'annulent successivement, à mesure que croît l'indice J qui numérote les termes de la série. Les variables F,G,H et les lignes 33,43,53 et 93 assurent cet élagage progressif qui se solde, pour cette formule, par un gain de temps de 45%.

Voici donc notre programme "Formule de Gauss en GwBasic, option AF" :

```

5 DEFINT D-P:DEFDBL R-Z:T=0:R=0:V=1000000000000#
7 INPUT;"Combien de blocs de 12 décimales ";N:DIM X(N),Y(N),Z(N),U(N),S(N)
20 M=18:P=57:Q=239:I=1:L=1:X(0)=48:Y(0)=32:Z(0)=-20
30 J=0:X(0)=X(0)*M:Y(0)=Y(0)*P:Z(0)=Z(0)*Q:M=M*M:P=P*P:Q=Q*Q
33 ON 3+(G>N)+(H>N) GOTO 60,50,40
40 R=0:FOR K=H TO N:T=R+Z(K):Z(K)=FIX(T/Q):R=(T-Z(K)*Q)*V:NEXT K
43 IF Z(H)=0 THEN H=H+1
50 R=0:FOR K=G TO N:T=R+Y(K):Y(K)=FIX(T/P):R=(T-Y(K)*P)*V:NEXT K
53 IF Y(G)=0 THEN G=G+1
60 R=0:FOR K=F TO N:T=R+X(K):X(K)=FIX(T/M):R=(T-X(K)*M)*V:NEXT K
70 R=0:FOR K=N TO F STEP -1:T=R+X(K)+Y(K)+Z(K):R=INT(T/V):U(K)=T-R*V
:NEXT K
80 R=0:FOR K=F TO N:T=R+U(K):U(K)=INT(T/I):R=(T-U(K)*I)*V:NEXT K
90 R=0:FOR K=N TO F STEP -1:T=R+L*U(K)+S(K):R=INT(T/V):S(K)=T-R*V:NEXT K
91 L=L:J=J+1:I=I+2
93 IF X(F)=0 THEN F=F+1
99 IF F<N+1 THEN 33
100 PRINT,,"      PI = 3,"
110 FOR K=1 TO N:PRINT USING " ***** ";S(K);
120 NEXT:PRINT

```

On peut ajouter un ou deux gadgets, par exemple, pour mesurer les temps de calcul, les instructions : A\$ = TIME\$, en début de ligne 20, et : B\$ = TIME\$, en début de ligne 100, ainsi que les lignes :

```

4DEF FNB(A$)=VAL(LEFT$(A$,2))*3600
+VAL(MID$(A$,4,2))*60+VAL(RIGHT$(A$,2))
150 B=FNB(B$)-FNB(A$):BH=B\3600:B=B MOD 3600:BM=B\60:BS=B MOD 60
160 PRINT "Temps de calcul : "BH"h"BM"m"BS"s"
et, pour faciliter la lecture, la ligne :
115 A=K/120:IF INT(A)=A THEN X$=INPUT$(1)

```

**Programmation
des autres formules...
et autres types de programmes..**

Pour transposer le programme ci-dessus de l'option AF à l'option FA, on peut remplacer les lignes 7 à 99 par celles ci-dessous :

```

7 INPUT;"Combien de blocs de 12 décimales ";N:DIM X(N),U(N),S(N):A$=TIME$
20 Q=18:X(0)=48:GOSUB 55
21 Q=57:X(0)=32:GOSUB 55
22 Q=239:X(0)=-20:GOSUB 55:GOTO 100
55 I=1:L=1:J=0:X(0)=X(0)*Q:Q=Q*Q:F=0
60 R=0:FOR K=F TO N:T=R+X(K):X(K)=FIX(T/Q):R=(T-X(K)*Q)*V:NEXT K
80 R=0:FOR K=F TO N:T=R+X(K):U(K)=INT(T/I):R=(T-U(K)*I)*V:NEXT K
90 R=0:FOR K=N TO F STEP -1:T=R+L*U(K)+S(K):R=INT(T/V):S(K)=T-R*V:NEXT K
91 L=-L:J=J+1:I=I+2:IF X(F)=0 THEN F=F+1
98 IF F<N+1 THEN 60
99 RETURN

```

Cette option est plus lente que la précédente (sauf pour les formules à deux termes) : elle requiert $3 \times N$ opérations par bloc pour une formule à N termes, au lieu de $3 + N$. Mais elle mange moins de mémoire : elle se contente de 3 variables indicées, quel que soit le nombre N de termes de la formule, au lieu de $N + 2$. Elle peut fournir 29000 décimales en GwBasic; et en Turbo-Basic v.1.1, 81000, quelle que soit la formule. Cependant le programme ci-dessus ne se transpose tel quel à d'autres formules que si aucun dénominateur ne dépasse 265.

Pour passer de la formule de Gauss, option AF, à d'autres formules, même option, il faut :

- * bien sûr modifier les coefficients $X(0), Y(0), Z(0)$ et les dénominateurs M, P, Q , et au besoin, en ajouter d'autres ;
- * mais aussi veiller au "format" des nombres utilisés :

** si un dénominateur dépasse 180, ne pas l'appeler P ou $P1$, mais Q , ou $Q1$... (car P , déclaré comme "entier", est remplacé par son carré qui dépasserait 2^{15} , limite du format "entier"...)

** si un dénominateur dépasse 265 (en GwBasic, avec blocs de 12), remplacer la division par Q^2 , en ligne 40, par deux divisions successives par Q .

En Turbo-Basic v.1.1, avec blocs de 10, c'est au delà de 882 que s'impose ce dédoublement; et, en Power-Basic, avec blocs de 12, au-dessus de 2700.

**GAUSS à la manière de ...
RAMANUJAN ?**

On a aussi tenté de "doper" ces formules en regroupant deux à deux les termes du développement de $\text{Arc Tan } 1/a$.

Partant de :

$$\text{ArcTan } \frac{1}{a} = \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{3a^3} \right] + \left[\frac{1}{5a^5} - \frac{1}{7a^7} \right] + \dots + \left[\frac{1}{(4n-3)a^{4n-3}} - \frac{1}{(4n-1)a^{4n-1}} \right] + \dots$$

on aboutit :
$$\text{ArcTan } \frac{1}{a} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{A + B \cdot n}{a^{4n-1} (4n-3) (4n-1)} \right) \quad \text{avec } A = 3 - a^2 \text{ et } B = 4a^2 - 4.$$

On a, par exemple :

$$\text{ArcTan } \frac{1}{18} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{-321 + 1292 \cdot n}{18^{4n-1} (4n-3) (4n-1)} \right), \quad \text{ArcTan } \frac{1}{57} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{-3246 + 12992 \cdot n}{57^{4n-1} (4n-3) (4n-1)} \right),$$

$$\text{et } \text{ArcTan } \frac{1}{239} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{-57118 + 228480 \cdot n}{239^{4n-1} (4n-3) (4n-1)} \right)$$

et la formule de Gauss s'écrit alors :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(4n-1) (4n-3)} \left(\frac{48(-321+1292 \cdot n)}{18^{4n-1}} + \frac{32(-3246+12992 \cdot n)}{57^{4n-1}} - \frac{20(-57118+228480 \cdot n)}{239^{4n-1}} \right) \right)$$

Pour aller plus loin:

On a regroupé sur une disquette pour compatible PC (5" 1/4 ou 3" 1/2 au choix):

- tous les programmes auxquels cet article se réfère (en GwBasic, Turbo-Basic, Power-Basic, Assembleur...)

- un programme donnant les 140 formules trouvées

- un fichier contenant au minimum 157 600 décimales de Pi données par le programme en Assembleur, et un programme pour les lire ou les éditer.

- un fichier faisant le point sur les résultats obtenus en Assembleur depuis la rédaction de cet article. Pour obtenir la disquette, contacter l'auteur :

(Tel 38 53 48 95) ou écrire au journal qui transmettra.

Quelques ouvrages

sur le calcul des décimales de Pi:

- Dix mille décimales de Pi, François Genuys, Chiffres V.I., 1958

- Calculation of Pi to 100.000 Decimals, Daniel Shanks et John W. Wrench Jr, Mathematics of computation, January 1962, Vol. 16 n°77

- 1.000.000 de décimales de Pi, J. Guilloud et M. Bouyer, 1974 - Numéro «Spécial Pi», ADCS, 1980.

cf. bon de commande p. 48

- Ramanujan et Pi, dans "Pour la Science", avril 1988, Borwein et Borwein.

Au point de vue mathématique, cette formule est satisfaisante : elle converge vers Pi à raison de 5 décimales par terme (deux fois plus vite que la même formule de Gauss, mais sans regroupement des termes). Mais sa programmation sur micro-ordinateur est pénible : à cause des gros multiplicateurs (tels 228480...) ou diviseurs (tels 239...) utilisés, on doit fractionner les opérations, si bien que le programme avec formule "dopée" est plus lent que le programme avec formule non dopée... On peut aussi ne doper que les termes de la formule ayant un petit dénominateur, tels le premier terme de la formule de Machin. Mais cette fois encore, le programme obtenu n'est pas plus rapide que le programme original...

Cet essai de "dopage" nous conduit à l'évidence suivante : la "rapidité théorique" d'une formule (c'est - à - dire le rapport D/T : nombre de Décimales désiré/nombre de Termes nécessaire) n'a pas grand chose à voir avec la rapidité réelle (le temps nécessaire à l'obtention d'un nombre donné de décimales), car il faut tenir compte aussi de la complexité de la formule, et des limitations du langage et du micro-ordinateur utilisé...

Et RAMANUJAN à la manière de GAUSS?

Cette remarque, et la présence au numérateur du terme général de la formule «dopée» d'un facteur de la forme $A + B.N$ nous a poussé à programmer les deux formules de Ramanujan suivantes:

$$\frac{4}{\pi} = \frac{1123}{882} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1.3}{4^2} \cdot \left[\frac{1123 + 21460}{882^3} \right] + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1.3.5.7}{4^2 \cdot 8^2} \cdot \left[\frac{1123 + 2.21460}{882^5} \right] - \dots$$

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801} \cdot \left[1103 + \frac{4!(1103 + 26390)}{(1!)^4 \cdot 396^4} + \frac{8!(1103 + 2.26390)}{(2!)^4 \cdot 396^8} + \dots \right]$$



Ces formules ont une bonne «rapidité théorique»: la première, de 6 décimales par terme, la seconde de 8. Mais leur programmation présente, sur micro-ordinateur, deux difficultés notables:

* l'inversion indispensable pour passer de $1/\pi$ à π , qui requiert la division d'un nombre de N blocs par un nombre de N blocs; * l'ordre de grandeur des diviseurs et multiplicateurs nécessaires pour passer d'un terme au suivant, ordre de grandeur qui de plus va croissant, (comme le cube de N), ce qui se concilie difficilement avec les formats numériques acceptés par les micro-ordinateurs actuels. Ces formules deviendront sans doute plus intéressantes avec des microprocesseurs, non plus à 32 ou 64 bits, mais à 256 bits ou plus... Les programmes que nous avons élaborés avec ces formules ne sont exacts que jusqu'à 3 ou 4 mille décimales, et plus lents, du fait de leur complexité, que les programmes issus des formules Arc Tangente...

Ce qui nous amène à deux questions, et à une conclusion:

Les deux questions :

- ces deux formules de Ramanujan partagent avec les formules Arc Tangente «dopées» le fait d'avoir, au numérateur de leur terme général, un facteur de la forme $(A+B.N)$. Ne seraient-elles pas, elles aussi, des formules «dopées», obtenues par regroupement deux à deux des termes de formules plus simples (et plus faciles à programmer) ? Si oui, comment remonter à ces formules plus simples ?

- le terme général de ces formules a pour facteur principal de son dénominateur, pour l'une 882^{2n+1} , et pour l'autre $(4 \times 99)^{4n}$. Or ces deux nombres: 882 et 99, sont de ceux qu'on retrouve souvent aux dénominateurs des formules ArcTangente. Y a-t-il un lien entre ces formules de Ramanujan, et nos formules ArcTangente ?... et si oui, lequel ? (on peut rêver, non ?)

Et la **conclusion**: en l'état actuel de la micro-informatique (nous ne parlons pas de l'Informatique avec un grand I, celle des gros systèmes...), ce sont encore, semble-t-il, les formules Arc Tangente qui mènent aux résultats les plus faciles, les plus rapides, et les plus performants pour le calcul des décimales de Pi, résultats que l'amélioration des langages et des matériels permet de pousser d'ailleurs chaque jour plus loin....

A moins que la méthode des «algorithmes itératifs», qui a permis d'atteindre le milliard de décimales, soit enfin réalisable sur microordinateur...? mais cela, c'est une autre histoire, et peut-être, qui sait, un autre article.

J'AI UNE RÉPONSE!
QUI VEUT ME POSER
UNE QUESTION?



1^{er} épisode

Que notons-nous ?

Vers une clarification des fonctions de l'évaluation

Pour visiter les territoires aux contours incertains de l'évaluation, nous allons partir de notre quotidien le plus quotidien, de cette grosse partie immergée de notre iceberg de travail. Vous avez tout de suite compris : il s'agit de la correction des copies !

1 - Le devoir fait en classe

Faisons l'hypothèse que le devoir que vous venez de corriger est un devoir fait en classe. Il fait donc le bilan d'un apprentissage (d'un ou de plusieurs) que nous schématiserons par :

Apprentissage	Bilan
---------------	-------

Ce devoir fait partie d'un paquet de copies. La moyenne des notes n'est certainement pas 18. Aussi va-t-il y avoir une correction du devoir. Pourquoi ?

1^{er} scénario : Les questions évaluées et mal réussies seront reposées plus tard, réévaluées. Mais alors n'était-ce pas **trop tôt** pour évaluer ? Prenons le cas d'un élève sérieux qui va retravailler et pour qui la correction aura été efficace : 1^{er} contrôle 5, 2^{ème} contrôle 15. Quelle doit être sa note ? 10, la moyenne de ses échecs et de sa réussite, ou 15 la mesure de ce qu'il sait faire effectivement ?

2^e scénario : C'est terminé, on passe à autre chose, à une autre partie du cours. A quoi sert alors la correction ? Envisageons

«FEUILLETON» de l'EVALUATION

Jean-Paul GUICHARD - Parthenay

encore le cas d'un élève sérieux qui va travailler : il va suivre les conseils du professeur, refaire des exercices. Maintenant il ~~sait~~ faire ; il aurait 18 si on refaisait un devoir aujourd'hui. Mais c'est **trop tard**. On ne tiendra compte que de son 5. Pensez-vous qu'ils seront alors nombreux à écouter sérieusement le corrigé et à le retravailler ?

De ces scénarii nous tirons **trois constats** :

- nous nions le droit à l'erreur
- nous faisons la somme des échecs de l'apprentissage
- nous valorisons la vitesse d'apprentissage.

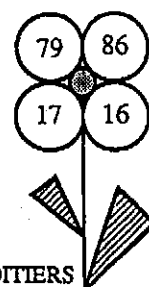
2 - Le devoir fait à la maison

Faisons maintenant l'hypothèse que le devoir a été fait à la maison. Quelle est alors sa finalité ? Certainement pas de faire un bilan des connaissances de l'élève car nul ne peut assurer que ce soit **son** travail. C'est donc de faire travailler l'élève sur les notions qui viennent d'être vues en cours, d'approfondir ces notions, de s'exercer. Ce devoir est noté. A quoi va servir cette note ? A alimenter la moyenne trimestrielle ? Et la moyenne trimestrielle, c'est l'image vis à vis des parents, c'est le passage dans la classe supérieure, la possibilité de poursuivre des études, de choisir une meilleure voie. C'est le **rôle social** de la note qui devient alors l'important et pas le travail à faire. Et de fait, qu'arrive-t-il ? Les élèves copient les uns sur les autres, se font aider, font faire le devoir par des parents ou amis... Quand nous agissons ainsi, nous **CONFONDONS** deux fonctions de l'évaluation :

- **la fonction sociale** : faire un bilan des connaissances et capacités de l'élève afin de savoir s'il répond aux exigences, aux normes du système éducatif.
- **la fonction pédagogique** : faire un bilan pour aider l'élève dans son travail et son apprentissage.

COROL'AIRE,
bulletin
de liaison
de la
régionale
Apmep
de
Poitiers,
vous
présente
ici
les deux
premiers
épisodes.

33



Régionale de POITIERS

Donc quand nous évaluons il faut nous poser la question : **POURQUOI ?**

— si c'est pour sanctionner les apprentissages, en faire la **somme**, il s'agit d'évaluation **SOMMATIVE**.

— si c'est pour contribuer à la **formation** de l'élève, il s'agit d'évaluation **FORMATIVE**.

L'intérêt de bien distinguer ces deux fonctions différentes est d'éviter les effets pervers de l'évaluation, et en particulier de la note, sur les apprentissages.

nante ? Le devoir que je pose a-t-il pour but de sélectionner les meilleurs ou de contrôler l'atteinte des objectifs de connaissance fixés par les programmes ? Or la mission fondamentale de l'Ecole est de **FORMER** des individus, et dès qu'il y a échec il est normal que cela suscite des interrogations, et même s'il n'y a pas échec il est normal que les acteurs du système éducatif essaient d'améliorer au maximum la réussite. Une analyse des **causes d'échec**, sous l'angle de l'évaluation,

EVALUATION	
FORMATIVE	SOMMATIVE
pour l'élève, pour sa formation en cours d'apprentissage savoir pour agir pour réguler les apprentissages pour aider l'élève à réussir ses apprentissages EVALUER POUR APPRENDRE	de l'élève, de ses acquisitions en fin d'apprentissage savoir pour juger pour sanctionner les apprentissages pour faire un bilan EVALUER POUR SAVOIR

2^{ème} Episode

Pourquoi changer ? **EVALUATION FORMATIVE (1).**

- Pour lutter contre l'ECHEC
- Pour former un maximum d'individus.

La note sanctionne, c'est vrai. Mais elle nous questionne aussi, car les résultats sont rarement à la hauteur des espérances du professeur. Certes il y a des élèves qui ne veulent pas travailler ou qui ont accumulé un retard énorme, mais pourtant le professeur a donné le meilleur de lui-même, a essayé de faire un bon cours, a réexpliqué plusieurs fois, a simplifié ce qui était difficile, a trouvé de bons exemples. Il espérait qu'un maximum d'élèves réussiraient : c'est le vœu secret de tout professeur. Car la réussite des élèves, c'est aussi sa réussite, la mesure de son efficacité ; et leur échec, c'est aussi la mesure de son échec, de son impuissance. Noton au passage qu'il est souvent alors en contradiction avec lui-même (double contrainte), car si ses élèves réussissent bien un devoir, il aura tendance à dire que le devoir était trop facile [cf. Petit x n° 7 - IREM de Grenoble - *Problèmes de l'évaluation des savoirs mathématiques* : Antoine BODIN]. Là encore il faudrait se mettre au clair : en quoi la réussite des élèves est-elle gê-

donne deux explications aux déconvenues des professeurs :

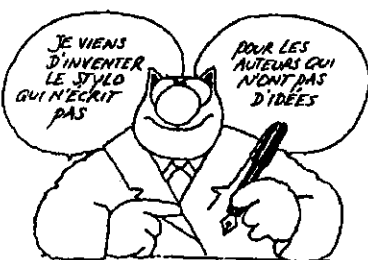
- 1 - On enseigne à un niveau et on évalue à un **autre** niveau plus élevé.
 - 2 - Pour évaluer un objectif on prend en compte, sans s'en rendre compte, d'autres objectifs.
- Développons ces deux points sur des exemples.

1 - C'est le problème de transfert de connaissances

exemple 1 : On apprend aux élèves le théorème de Pythagore et on voudrait qu'ils sachent l'utiliser dans toutes les situations, alors que déjà rien que la formulation pose des problèmes : si l'angle droit n'est pas en A alors que dans le cours il était en A...

exemple 2 : Pour l'apprentissage de la démonstration, on fait des démonstrations aux élèves et on voudrait qu'ils soient capables d'en faire ; alors que si on évaluait au niveau où on a enseigné, on pourrait seulement exiger d'eux qu'ils restituent, qu'ils récitent les démonstrations vues en cours.

exemple 3 : On apprend à tracer la hauteur d'un triangle dans la situation standard ci-contre, et lors de l'évaluation on demandera de tracer des hauteurs issues

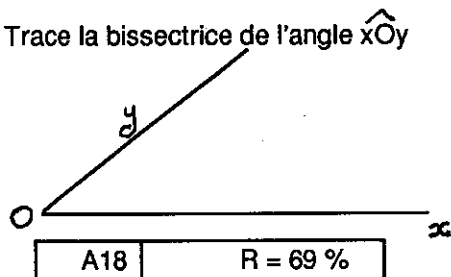


de sommets d'angles aigus d'un triangle ayant un angle obtus !

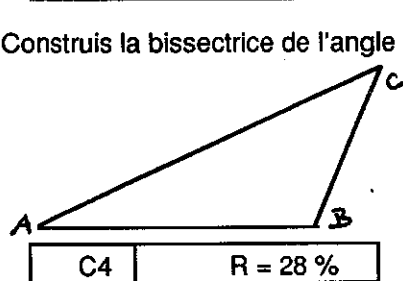
exemple 4 : On apprend aux élèves à tracer la bissectrice d'un angle, et une évaluation portant sur 20.000 élèves montre que 28 % d'entre eux sont capables, après apprentissage, de tracer la bissectrice de l'angle d'un triangle !

La bissectrice en fin de sixième

Trace la bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$



Construis la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$



Idées de recherches :

On pourrait dans cet ordre d'idées :

— analyser les questions jugées difficiles que les professeurs mettent dans leurs devoirs et se demander comment les élèves peuvent réussir de telles questions. Qu'est-ce que le professeur a fait pour cela ?

— analyser les questions qui sont mal réussies par une majorité d'élèves et essayer de comprendre pourquoi.

Or l'expérience montre que des types d'exercices non réussis qui font l'objet d'un apprentissage sont ensuite de mieux en mieux réussis.

2 - Second cas de figure

exemple 1 : Lorsqu'il s'agit de faire une démonstration en géométrie et que l'objectif de l'exercice est d'évaluer cette capacité, on oublie bien souvent qu'on évalue en même temps d'autres capacités :

— lecture d'un texte
— construction de la figure
— extraction de données (hypothèses)...
ce que montre une analyse de la tâche de démonstration qui amène à évaluer auparavant des objectifs qui sont prérequis.

Toutes les questions ne sont pas recevables par les enseignants.

Lorsqu'une question s'éloigne du questionnement habituel des enseignants, elle est souvent rejetée. C'est en particulier le cas pour des questions faisant d'avantage appel à l'activité de l'élève qu'à des connaissances spécifiques.

En classe de sixième, la question "Place un point S sur [AC] tel que les triangles ABS et BCS aient même périmètre" est difficilement acceptée. En réalité elle ne correspond pas à un apprentissage et n'est réussie que par environ 5 % des élèves.

Lorsque la question ne s'éloigne pas trop des habitudes elle peut être acceptée et même adoptée. Elle est alors intégrée au système d'évaluation des enseignants. L'expérience prouve qu'elle fait alors l'objet d'apprentissages systématiques et le taux de réussite des élèves augmente d'une année à l'autre.

C'est sans doute le cas pour la question suivante :

Tracer un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires et qui ne soit pas un losange.

qui en classe de quatrième est peu réussie dans nos premiers essais et qui est maintenant réussie par 55 % des élèves.

[Petit x n° 7 - IREM de Grenoble - *Problèmes de l'évaluation des savoirs mathématiques* : Antoine BODIN].

exemple 2 : Pour rester dans le même domaine, pour évaluer une démonstration on demande un texte écrit que certains sont incapables de rédiger alors qu'ils sont capables de construire un organigramme de la démonstration. La survalorisation de l'écrit et de l'expression est courante et l'atteinte de bon nombre d'objectifs en mathématiques présuppose, sans que nous en soyons conscients, une maîtrise de la langue qui n'est pas toujours atteinte par les élèves, ne serait-ce parfois qu'au niveau du vocabulaire, des tournures.

Tous ces exemples montrent :

1 - qu'il faut être au clair sur ce que l'on veut évaluer car l'évaluation finale influencera nécessairement les activités d'apprentissage.

« Sans objectifs clairement explicités, il n'y a pas de vraie évaluation » (G. Nunziati).

2 - que si l'on veut aider l'élève à réussir ses apprentissages il faut pouvoir agir sur ses apprentissages. Il faut donc pour cela évaluer PENDANT son apprentissage pour permettre des réajustements, des corrections, des dépassements.

3 - qu'il faut mieux assurer les savoirs et savoir-faire.

(à suivre...) ■

HISTOIRE ILLUSTRÉE DES MATHÉMATICIENS

Jean-Luc ROMET - Romilly sur Andelle (27)



HISTOIRE ILLUSTREE *des mathématiciens*

Sommaire... Sommaire...
Historique, méthodologie et objectifs du projet

Première partie : Histoire illustrée des mathématiciens

Présentation du professeur

ROMETUS

LA PREHISTOIRE

LA MESOPOTAMIE

L'EGYPTE

LA CHINE

LES MAYAS

Présentation

THALES

PYTHAGORE

EUCLIDE

ARCHIMEDE

ERATOSTHENE

LA GRECE

LES ROMAINS

L'INDE

L'ARABIE

Présentation

SYLVESTRE II

FIBONACCI

Les Opérations

VIETE

L'EUROPE

DESCARTES

PASCAL

NEWTON

LAPLACE et

HAMILTON

CHASLES

INAUDI

Bilan du professeur ROMETUS

Deuxième partie :

des exercices possibles liés à l'histoire des
mathématiciens.

D'autres idées pour les enseignants

Index et liste des exercices

Lexique

Liste des grands mathématiciens

Bibliographie

Pages supplémentaires réalisées lors d'un
concours :

GAUSS (G. Bernon)

GALOIS (D. Fromentin)



Edité par le CRDP de Poitiers.
6, rue Ste Catherine. 86034 Poitiers cedex
(60 F franco de port).

*Cette histoire illustrée des mathématiciens
est une publication originale, réalisée par J.L. Romet
et 19 élèves du collège de Romilly dans l'Eure.
Grâce à une présentation pleine d'humour et un langage
accessible à tous, elle peut intéresser un vaste public
à pénétrer dans le monde merveilleux des mathématiques.
Nous avons déjà utilisé les illustrations
de F. Viète dans le PLOT 53.*

Nous vous en proposons ici deux autres.

Historique, méthodologie et objectifs du projet

En octobre 1986, le dynamisme des élèves d'une classe de 6e me pousse à leur soumettre l'idée d'exposer sur le pourquoi des mathématiques et leur évolution (idée que je murmurais depuis déjà quelques années).

Il s'ensuit une période de deux mois, où chacun cherche (dans divers documents, dans les bibliothèques, en s'informant auprès de ses parents, de ses amis, de ses instituteurs) à mettre au point une liste des plus grands mathématiciens.

En décembre 1986, nous avons une liste de quarante mathématiciens.

Nous nous fixons alors l'OBJECTIF essentiel de notre travail : «rendre accessibles au plus grand nombre de personnes les Mathématiques et leur histoire».

Cela nous amène à retenir douze mathématiciens (ceux dont les noms sont connus des élèves et ceux dont les découvertes sont aisées à expliquer).

De janvier à juin 1987, des groupes de trois à quatre élèves vont mettre au point un document illustré sur deux mathématiciens... Nous assurons ensemble la coordination pendant les cours et les interclasses de 13 à 14 heures.

Nos principaux critères pour la mise au point d'une page sont :

- que chacune des découvertes **compréhensibles par les élèves** soit exposée et qu'il n'y ait aucun oubli (dans la limite de compréhension des enfants)
- la **clarté d'une page**,
- la **simplicité du langage utilisé**,
- l'**humour dans les illustrations**.

Ainsi, en juin 1987, naît un premier document sur douze mathématiciens, que l'on tire sur machine à alcool...

En octobre, alors que je ne retrouve en classe que trois élèves sur les vingt-trois qui travaillaient sur le projet, je lance l'idée de le reprendre beaucoup plus sérieusement.

Dix-neuf élèves viennent me rejoindre ; nous nous mettons au travail tous les jours après le déjeuner en club, nous élargissons notre liste de **douze à vingt mathématiciens** et nous décidons d'exposer les dix plus grandes civilisations mathématiques.

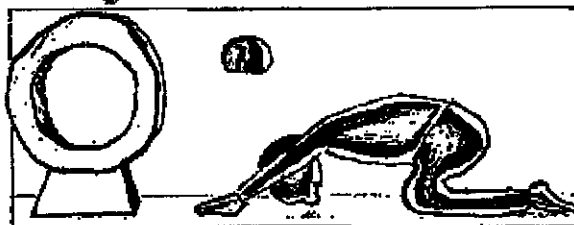
Dès **novembre**, nous décidons de reprendre l'objectif et donc les critères définis l'année précédente.

Nous allons maintenant disposer d'une photocopieuse, aussi, en fonction de cela, il va falloir remettre au point les pages travaillées en 86-87.

en Arabie, Quelle zizanie !



3) Les arabes reprennent les chiffres utilisés en Inde (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) leur principal apport est l'invention du zéro.



Mathématiques : Ibn Al-Haytham décide de se servir d'un petit signe, encercle chaque fois qu'il manquait un chiffre pour indiquer un ordre... (exemple : 109)

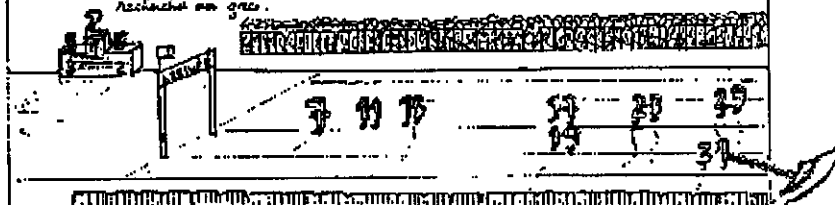
3630	8041
2479	1238
7088	7691
4138	8076

Voici un extrait de la table des nombre arabes...

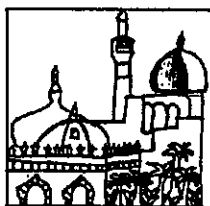
le zéro était appelé autrefois en arabe "55" qui devint le mot chiffre.



3) Les mathématiciens arabes ont étudié les nombre premiers deux qui ne sont discrets que par 1 et eux-mêmes !
exemple : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31... Il y a aussi beaucoup de recherche en grec.

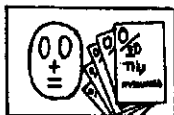
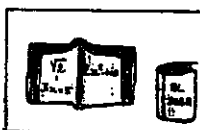


en Arabie, Quelle zizanie !



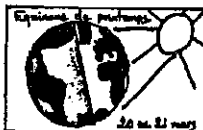
4) Quelques grands mathématiciens.

AL-KWARIZMI : savant arabe du 9^{ème} siècle. Il a écrit un livre "Al-jabr et al-muqabala" qui est le nom "Al-Khawarizmi" qui vient de nos algorithmes.



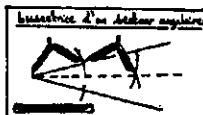
IBR. AHMAD : grand savant arabe qui inventa le 0.

AL-BATTANI : savant du 10^{ème} siècle. Il a écrit un recueil d'observation d'astronomie !...



THABIT-IBN-QURRA : savant du 9^{ème} siècle. Il fit un célèbre théorème des rayons grecs. Entre autres, il repéra l'arc d'un segment de cercle (déjà connu par Pythagore).

ABU-AL-WAFA : il effectua les constructions géométriques à l'aide de la règle et du compas. Il améliora la trigonométrie.



Avec le bénéfice de la vente, nous décidons d'en envoyer gratuitement aux différents médias (presse, télévision, radios...) puis à diverses personnalités et aux plus grands mathématiciens français toujours en s'appuyant sur le fait qu'il s'agit de la première « Histoire Illustrée des Mathématiciens », à paraître en France.

Ce sont les retentissements des différents médias et les avis très favorables des grands mathématiciens français qui vont nous pousser à essayer d'obtenir une édition de grande envergure.

Nous contactons en juin 1988 le CRDP de POITIERS qui nous donne le feu vert et qui prend en charge l'édition de notre brochure.

Nous n'avons plus qu'à espérer que notre objectif (rendre accessibles au plus grand nombre les mathématiques et leur histoire) soit largement atteint. ■

Des groupes de trois élèves prennent en charge trois mathématiciens et une ou deux civilisations en travaillant au moment du déjeuner en club, mais aussi les mercredis.

Nous nous réunissons tous ensemble deux fois par semaine pour la coordination générale, le lien entre les différentes pages, l'étude des titres... Chaque groupe profite de ces réunions communes pour expliquer brièvement ce qu'il veut faire.

Ainsi en avril 1988, naît une maquette dans laquelle Guillaume BERNON va ajouter une touche personnelle à chaque dessin pour donner une unité à l'ensemble.

Nous sortons notre premier exemplaire de cette « Histoire Illustrée des Mathématiciens » en mai 1988. La reproduction en sera assurée grâce à la photocopie.

« Le Professeur ROMETUS est étrange. Il parcourt l'Histoire, traverse les civilisations et reste incognito en arborant toujours le costume du pays et de l'époque.

Le Professeur ROMETUS a une passion : le calcul, les mathématiques et les mathématiciens ».

Ces quelques lignes sont l'introduction d'un article paru dans Paris-Normandie qui annonce le prix obtenu par les élèves du collège de Romilly :

Prix de l'Innovation 88...

Prix attribué aux journées nationales de l'association des professeurs de mathématiques à Rouen

(cf. PLOT N° 48 septembre 89)

A-PLOT-STROPHES

Les livres pour enfants !!!

Nous avons l'habitude de lire des livres sérieux, trop sérieux.

Il existe heureusement des auteurs qui savent s'adresser aux enfants pour les distraire tout en apportant des éléments de connaissance, même en mathématique.

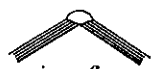
Profitant de la période des cadeaux de fin d'année, j'ai fouiné dans les librairies et trouvé quelques livres pour enfants qui ne dépareraient pas dans une classe même «supérieure» et même dans la bibliothèque d'un professeur d'école, de collège ou de lycée. En voici deux des plus jolis, décrits par leurs images.

Chacun de ces livres comporte en annexe un court texte de 3 à 6 pages qui donne aux enseignants et aux parents les clés de lecture et les éléments d'information qui leur permettent d'en dire un peu plus aux enfants.

AUX COULEURS DU MONDE
Conseiller éditorial : La Joie par les Livres
David M. Schwartz - Steven Kellogg

1000
milliers de
millions




circonflexe

SI TU VOULAIS COMPTER JUSQU'À UN MILLION...



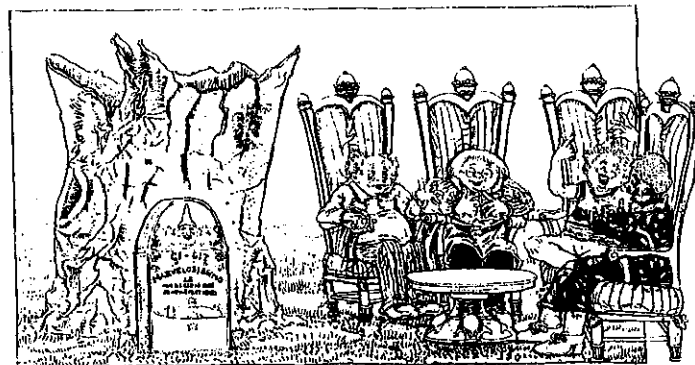
IL TE FAUDRAIT À PEU PRÈS 23 JOURS.



SI TU T'ASSEYAIS POUR COMPTER JUSQU'À UN MILLIARD...

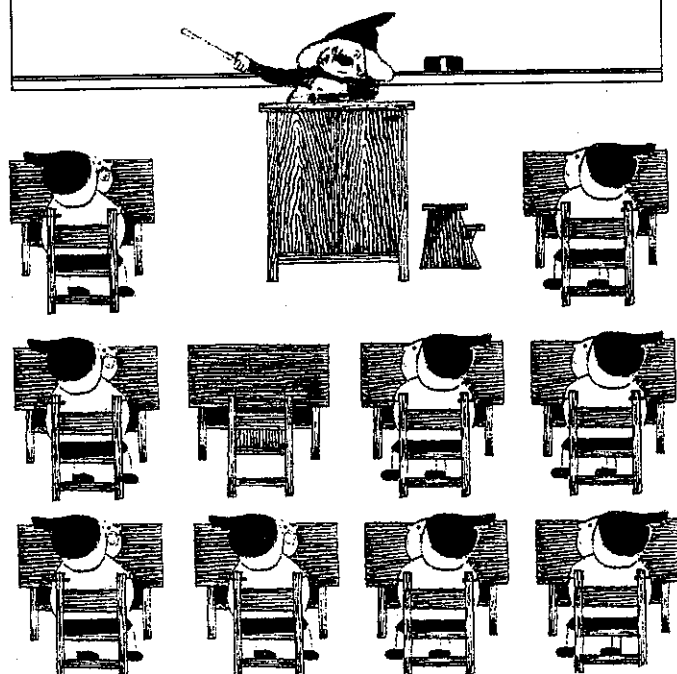


TU COMPTERAI PENDANT 95 ANS.



Mitsumasa Anno

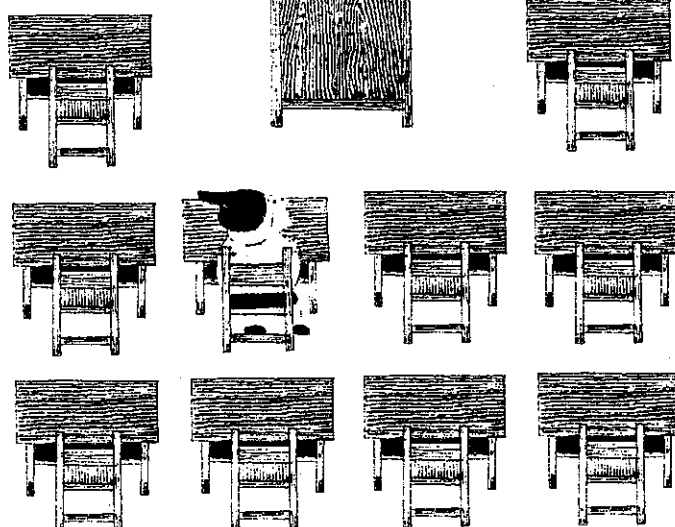
Jeux mathématiques



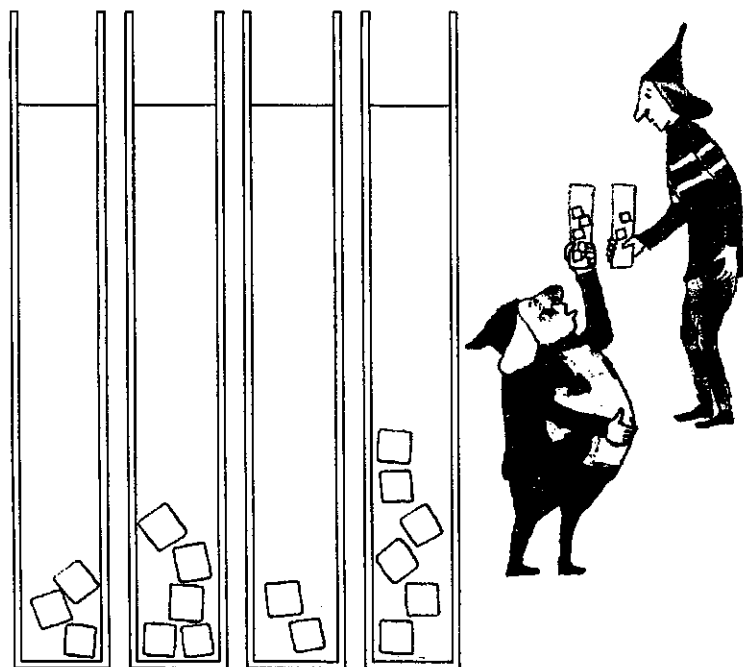
Père Castor Flammarion

Les mathématiques, ce n'est pas seulement l'art de manier les nombres et les abstractions. C'est d'abord un état d'esprit. Plutôt qu'un livre "pour apprendre à inédite de l'univers mathématique propose ici. Par le biais d'images, est amené à se poser des questions réponse. Un livre adulte... pour partager

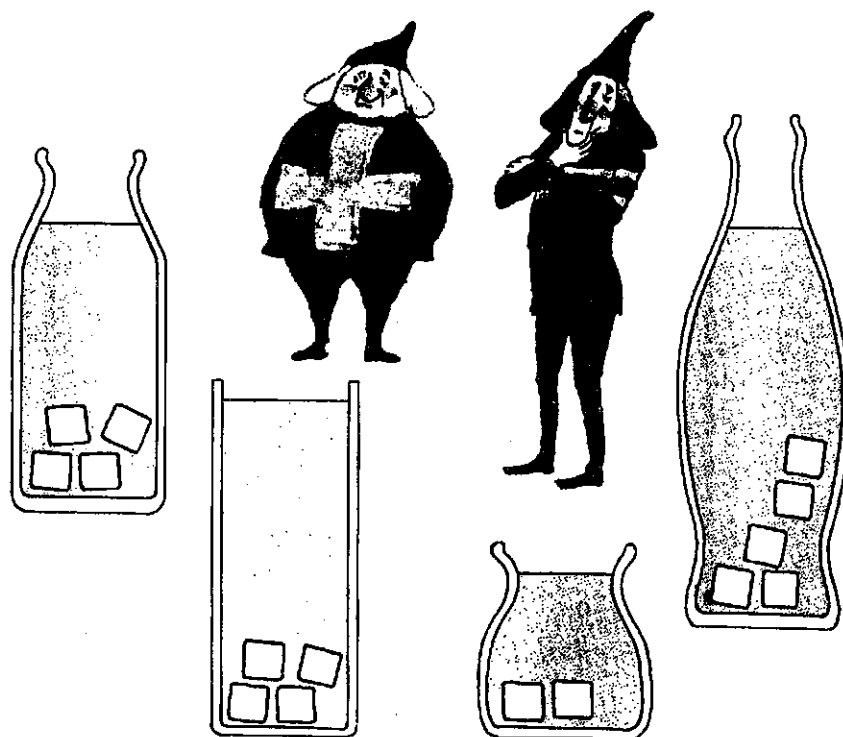
un éclairage porté sur les choses. compter", c'est une approche que Mitsumasa Anno nous d'énigmes, d'activités, le lecteur et surtout à en chercher la à explorer à deux, enfant et la découverte.



Nos amis mettent du sucre dans l'eau.
Dans quel récipient l'eau sera-t-elle le plus sucrée ?
S'il y a la même quantité d'eau dans chaque récipient,
la réponse est simple : dans celui qui contient le plus de sucre.



Oui, mais si la quantité d'eau
n'est pas la même d'un récipient à l'autre ?



La division de Lazard

Patrice COGNEE - Poitiers

Divisions en chaîne

Nous appelons chaîne de divisions "f" (/ étant une division euclidienne sur les entiers) commençant en (a_0, a_1) , la suite des entiers $(a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n, a_{n+1} = 0)$ où a_{k+1} est le reste de la division de a_{k-1} par a_k , soit $a_{k+1} = a_{k-1} - a_k \times (a_{k-1} / a_k)$ ($1 \leq k \leq n+1$). (n est la longueur de la chaîne $(a_0, a_1, \dots, a_{n+1} = 0)$). Par exemple $(32, 13, 6, 1, 0)$ ou $(1990, 89, 32, 25, 7, 4, 3, 1, 0)$.

- Il existe au moins une chaîne de divisions de longueur minimale ($a_0 = a, a_1 = b, \dots, a_{n+1} = 0$), nous appelons complexité de (a, b) l'entier n, et nous le notons $\mu(a, b)$.

- Nous dirons que $(a_0 = a, a_1 = b, \dots, a_{n+1} = 0)$ est optimale si $n = \mu(a, b)$.

- Nous avons $\mu(a_0, a_1) = \mu(a_1, a_2) + 1$ lorsque $(a_0 = a, a_1 = b, \dots, a_{n+1} = 0)$ est optimale.

- Soit a et b deux entiers, nous avons :

- $\sim \mu(a, b) = 0 \iff b = 0$
- $\sim \mu(a, b) = 1 \iff a \equiv 0 \pmod{b}$
- $\sim \mu(-a, -b) = \mu(-a, b) = \mu(a, -b) = \mu(a, b)$
- $\sim \mu(a, b) = \mu(a', b) \iff a' \equiv a \pmod{b}$
- $\sim \mu(b, a) \leq \mu(a, b) + 1$

$$a = bq + r$$

Soient a et b deux entiers (b non nul), il existe un couple d'entiers (q, r) tel que $a = bq + r$ avec $|r| < |b|$.

En fait si b est non nul alors il existe seulement deux couples (q_1, r_1) et (q_2, r_2) tel que $a = bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2$ avec $0 \leq |r_1| \leq |r_2| < |b|$.

- Nous appelons division de Lazard de a par b, la division euclidienne

$$a = bq + r \text{ avec } \begin{cases} r = r_2 \text{ si } |r_2| \leq \alpha |b| \\ r = r_1 \text{ si } |r_2| > |b| \end{cases}$$

où $\alpha = (\sqrt{5}-1)/2 = 0,6180339\dots$ est la solution positive de l'équation $x^2 + x = 1$. r est appelé reste de Lazard de la division de a par b.

(En fait, nous avons toujours $|r| < \alpha |b|$ car α est irrationnel).

- Nous avons :

$$\sim 0 < 1 - \alpha < \alpha < 1$$

$$\sim \alpha^{-1} = 1 + \alpha$$

$$\sim (2 + \alpha)^{-1} = 1 - \alpha$$

Théorème de Lazard

Toute division
 $a = bq + r$ (soit $\mu(a, b) \geq 1$)
est une division optimale
si et seulement si
c'est une α division.

- Soient s et t deux entiers positifs, alors
 $s \leq \alpha t \iff s(s+t) \leq t^2$

Une propriété des chaînes de Lazard

Nous allons montrer que dans une chaîne de divisions de Lazard, il n'y a pas deux divisions de Lazard non centrées consécutives.

Soient $a = bq + r$ et $b = rp + s$ avec

$$\begin{cases} \alpha |b| > |r| > (|b|/2) > 0 \\ \alpha |r| > |s| > 0 \end{cases}$$

• Si $p = 0$ alors $s = b \Rightarrow |s| = |b| > |r|$
or $|s| < \alpha |r| < |r|$
donc p est non nul.

Patrice Cognée, étudiant à Poitiers a trouvé une nouvelle majoration du nombre de divisions à effectuer pour trouver le PGCD de 2 ou plusieurs nombres.

Nous vous proposons ici les premiers pas de son travail.

• Si $p \geq 4$, nous avons $|b| < 2|r| < |r| \cdot |p|$

d'où $|s| = |b - rp| > |(|b| - |r| \cdot |p|)| = |r| \cdot |p| - |b|$

soit $|s| > |b/2| \cdot |p| - |b| = |b| (|p/2| - 1)$

or $|p/2| - 1 \geq 1$

donc $|s| > |b| > |r|$ ce qui est impossible.

• Si $|p| = 3$,

$\sim (rp)b < 0$, $|s| = 3|r| + |b| > |b| > |r|$

ce qui est impossible

$\sim (rp)b > 0$, $|s| = 3|r| - |b| < \alpha |r|$

d'où $(3 - \alpha)|r| < |b|$ or $\alpha < 1$

donc $2|r| < |b|$

ce qui contredit l'hypothèse $|r| > |b/2|$

• Si $|p| = 1$, $|b| = |\pm r + s|$

d'où $|b| = |r| + |s|$

ou $|b| = |r| - |s|$

or $|b| > |r|$ donc $|b| = |r| + |s|$,

Nous avons $|s|(|s| + |r|) = |s| \cdot |b| < |r|^2$

et $|r|(|r| + |b|) < |b|^2 = |b|(|r| + |s|)$
 $< |b| \cdot |r| + |r|^2 = |r|(|r| + |b|)$

nous arrivons à une contradiction.

• Nous avons $|p| = 2$,

donc $b = \pm 2r + s$, $|b| < 2|r|$ et $|s| < |r|$

d'où $|b| = 2|r| - |s|$

or $|r| < \alpha |b| \Rightarrow |b| > \alpha |r| = (1 + \alpha) |r|$

d'où $2|r| - |s| > (1 + \alpha) |r|$ soit $(1 - \alpha) |r| > |s|$

mais $\alpha > 1/2$ donc $|s| < |r|/2$.

Conclusion :

Soient $a = bq + r$ et $b = rp + s$

avec $|b| > \alpha |r| > |b|/2 > 0$ et $0 < |s| < \alpha |r|$

Alors $|s| \leq |r|/2$,

de plus $|p| = 2$, et $|b| = 2|r| - |s|$.

Etude sur la suite de Fibonacci

- La suite de Fibonacci est la suite (F_n) définie par

$F_0 = 0, F_1 = 1$ et
pour $n \geq 0$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

- Nous avons $F_n > F_{n-1}$ pour $n > 2$,
et $F_n > 0$ pour $n > 0$.

- Quand a-t-on $F_n < \alpha F_{n+1}$ ($n \geq 2$) ?

Nous avons :

$F_n < \alpha F_{n+1} \Leftrightarrow F_n (F_n + F_{n+1}) < (\alpha F_{n+1})^2$

Posons $A_{n+1} = F_n (F_n + F_{n+1})$ et $B_{n+1} = (\alpha F_{n+1})^2$

Calculons A_{n+3} et B_{n+3} :

$$\begin{aligned} A_{n+3} &= F_{n+2} (F_{n+2} + F_{n+3}) \\ &= (F_{n+1} + F_n)(2F_{n+2} + F_{n+1}) \\ &= (F_{n+1} + F_n)(3F_{n+1} + 2F_n) \\ &= 3(F_{n+1})^2 + 5F_{n+1}F_n + 2(F_n)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{n+3} &= (F_{n+3})^2 \\ &= (2F_{n+1} + F_n)^2 \\ &= 4(F_{n+1})^2 + 4F_{n+1}F_n + (F_n)^2 \end{aligned}$$

Soit $C_{n+1} = 3(F_{n+1})^2 + 4F_{n+1}F_n + (F_n)^2$

alors $B_{n+3} = C_{n+1} + (F_{n+1})^2$

et $A_{n+3} = C_{n+1} + F_n(F_n + F_{n+1})$.

soit $A_{n+3} = C_{n+1} + A_{n+1}$ et $B_{n+3} = C_{n+1} + B_{n+1}$

D'où $A_{n+3} < B_{n+3} \Leftrightarrow A_{n+1} < B_{n+1}$

Comparons A_3 avec B_3 et A_4 avec B_4 .

Nous avons $F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3$

d'où $A_3 = 3, B_3 = 4, A_4 = 10$ et $B_4 = 9$

donc $A_{n+1} < B_{n+1} \Leftrightarrow n+1 \equiv 1 \pmod{2}$

soit $F_n < \alpha F_{n+1} \Leftrightarrow n \equiv 0 \pmod{2}$

pour $n \geq 2$

- De plus comme

$$\begin{aligned} A_{n+3} - B_{n+3} &= A_{n+1} - B_{n+1}, \\ A_4 - B_4 &= 1 \text{ et } A_3 - B_3 = -1, \end{aligned}$$

nous avons $A_{n+1} - B_{n+1} = (-1)^{n+1}$

or $F_0(F_0 + F_1) - (F_1)^2 = 1$

et $F_1(F_1 + F_2) - (F_2)^2 = -1$

donc $(F_{n+1})^2 - F_n(F_n + F_{n+1}) = (-1)^n$

pour $n \geq 0$.

• Si $n > 2$,

n impair $\Leftrightarrow$ la division $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ est une α -division.

• Soit $n = 2p+3$ avec $p \geq 2$,
regardons la chaîne de divisions
de Lazard commençant en (F_{2p+4}, F_{2p+3}) .
 $F_{2p+4} = F_{2p+3} + F_{2p+2}$ est une α -division.

Nous savons que la division suivante est
centrée et que $|q_{2p+2}| = 2$

$$\begin{aligned} \text{or } F_{2p+3} &= F_{2p+2} + F_{2p+1} \\ &= 2F_{2p+2} + (F_{2p+1} - F_{2p+2}) \\ &= 2F_{2p+2} - F_{2p} \end{aligned}$$

Donc la division suivante est la division
centrée

$$F_{2p+3} = 2F_{2p+2} - F_{2p}$$

$$\begin{aligned} F_{2p+2} &= (-2)(-F_{2p}) + (F_{2p+1} - F_{2p}) \\ &= (-2)(-F_{2p}) + F_{2p-1} \\ &= (-3)(F_{2p}) - F_{2p-2} \end{aligned}$$

de même la division suivante est la division centrée:

$$F_{2p+2} = (-3)(-F_{2p}) - F_{2p-2}$$

- Regardons la chaîne de divisions de Lazard débutant en (F_6, F_4) :

$$F_6 = 8 \text{ et } F_4 = 3, \\ 8 = 3 \times 3 - 1 \text{ et } 3 = (-3) \times (-1) + 0$$

soit la chaîne $(F_6, F_4, F_2, F_0) = (8, 3, -1, 0)$

- Nous avons les chaînes de divisions de Lazard suivantes pour $n > 1$:

$$(F_{2n+2}, F_{2n+1}, F_{2n}, F_{2n-2}, \dots, (-1)^{k(i)} F_{2i}, \dots, F_0 = 0)$$

$$(F_{2n+1}, F_{2n}, F_{2n-2}, \dots, (-1)^{k(i)} F_{2i}, \dots, F_0 = 0)$$

où $k(i) = E(((n+1)-i)/2)$.

- Pour $n > 1$, nous avons $\mu(F_{2n+1}, F_{2n}) = n$ et $\mu(F_{2n+2}, F_{2n+1}) = n + 1$ (*)

- $\mu(F_1, F_0) = \mu(1, 0) = 0$ et $\mu(F_2, F_1) = \mu(1, 1) = 1$ donc (*) est vraie pour $n = 0$

- $\mu(F_3, F_2) = \mu(2, 1) = 1$ et $\mu(F_4, F_3) = \mu(3, 2) = 2$ donc (*) est vraie pour $n = 1$

Conclusion :

Pour tout $n \geq 0$, $\mu(F_{2n+1}, F_{2n}) = n$ et $\mu(F_{2n+2}, F_{2n+1}) = n + 1$

De plus nous avons les chaînes de divisions de Lazard suivantes pour $n \geq 2$:

$$(F_{2n+2}, F_{2n+1}, F_{2n}, \dots, (-1)^{k(i)} F_{2i}, \dots, F_0 = 0)$$

où $k(i) = E(((n+1)-i)/2)$.

$$(F_{2n+1}, F_{2n}, \dots, (-1)^{k(i)} F_{2i}, \dots, F_0 = 0)$$

(à suivre) ■

NOTE SUR L'AUTEUR:

L'auteur de cet article, Patrice Cognée, est étudiant en maîtrise de mathématiques à l'Université de Poitiers. Ce travail a été présenté dans le cadre du projet sur «algorithmique algébrique», proposé en 1989-90 aux étudiants de l'unité de valeur n° 10 **Informatique à l'usage des mathématiques**. Gabriel Lamé (Tours, 1795-Paris, 1870), ingénieur et mathématicien appliqué a donné un majorant du nombre de divisions à effectuer pour déterminer le plus grand commun diviseur de deux entiers par l'algorithme d'Euclide: le quintuple du nombre de chiffres du plus petit de ces deux nombres qui est de fait le nombre de divisions à effectuer pour déterminer le plus grand commun diviseur des entiers 13 et 8, ou 144 et 89, ou encore 1597 et 987

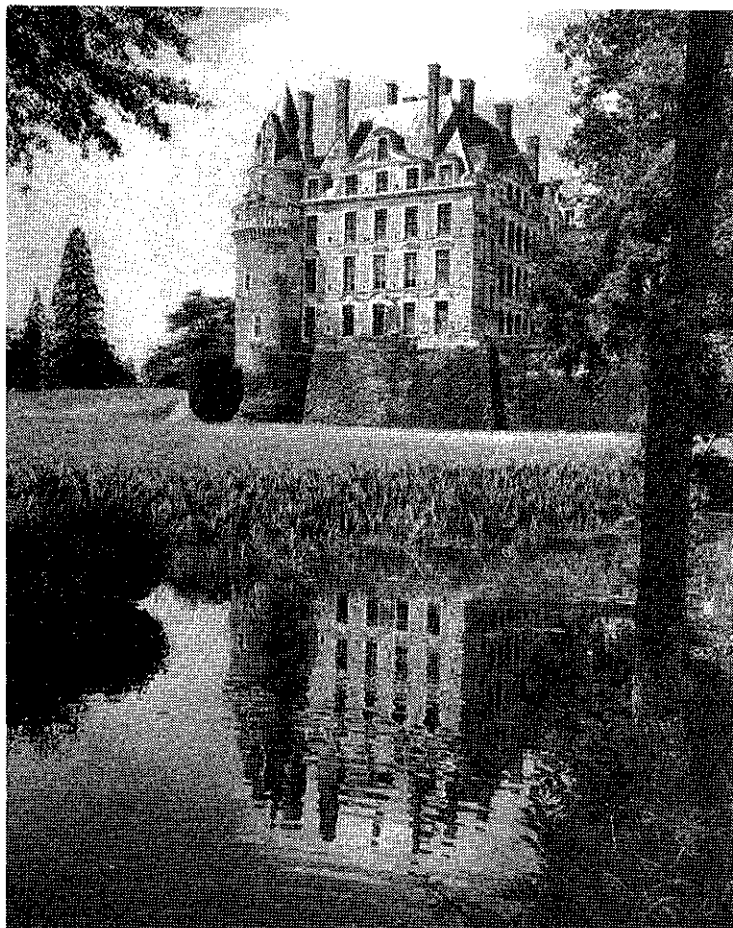
(Comptes rendus des séances de l'académie des sciences, tome 19, p. 867, Paris, 1853).

D'après E. Lucas (Théorie des nombres, p. 335), ce résultat aurait été entrevu par Léger (Correspondance mathématique et physique, tome 9, p. 483) et Finck (Nouvelles annales de mathématiques, tome 1, p. 354, 1842). Kronecker avait observé que la division à plus petit reste en valeur absolue (division centrée) pouvait réduire le nombre de divisions à effectuer pour déterminer le plus grand commun diviseur de deux entiers par l'algorithme d'Euclide qui est plus petit que le triple du nombre de chiffres du plus petit des deux nombres (Vorlesungen über Zahlentheorie 1, Leipzig, Teubner, 1901).

Daniel Lazard a établi que dans l'anneau Z , si $k \in]0, 1]$, toute chaîne d'entiers $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1})$ vérifiant $a_{i+1} = a_i q_i + a_{i+1}$ pour un certain q_i avec $|a_{i+1}| \leq k |a_i|$ pour $i = 0, \dots, n$ et $a_{n+1} = 0$ a une longueur minimale si, et seulement si $k = (\sqrt{5} - 1)/2 = 0,618\dots$ (D. Lazard, Le meilleur algorithme d'Euclide pour $K[X]$ et Z , Comptes rendus des séances de l'académie des sciences, tome 283, Paris, 3 janvier 1977).

Marathon au «Jardin de France»

Roger CREPIN - Limoges



Sur le thème : «Etre professeur à l'aube du XXI^e siècle», je suis essentiellement intervenu pour sensibiliser sur un problème qui m'est cher : l'égalité des chances entre garçons et filles dans tout le système éducatif. Est-ce la faute des enseignants si les filles fuient les classes scientifiques pour s'agglutiner dans les terminales A, G, ou F8 ?

Malgré la pratique du «harcèlement... égalitaire», je crains bien de n'avoir pas créé beaucoup de remises en cause. L'atmosphère y était-elle ?

L'équipe d'animation, dont je loue par ailleurs le dynamisme et l'efficacité, avait complètement oublié ce paramètre égalitaire dans les cours et tables rondes. Les dix-sept personnalités qui ont défilé devant le tableau (ou l'écran) étaient des hommes, seule Elisabeth Busser fut acceptée — il est vrai qu'elle était responsable de cette Université —. Par ailleurs, bien que l'enseignement soit féminisé, les stagiaires hommes étaient plus nombreux que les stagiaires femmes.

D. Dacunha-Castelle n'a pas apporté de réponse à mon questionnaire, mais j'ai été heureux d'apprendre qu'à l'Ecole Michelet de Bordeaux les recherches en didactiques commençaient à prendre en compte le paramètre : égalité entre filles et garçons. J'espère que ce début essaiera dans toutes les recherches en didactique des mathématiques, afin que l'on s'oriente vers un rééquilibrage des répartitions actuelles, dans les sections de baccalauréat, mais aussi dans l'Institution «Education Nationale» qui vit avec 70 % de femmes «Professeurs d'Ecole» et 9 % de femmes «Professeurs d'Université».

J. P. Bourguignon a séduit par sa pédagogie, sa maîtrise des technologies nouvelles, son cours parfait. C'était tellement convaincant qu'en sortant je me sentais rajeuni de quarante ans avec l'envie de reprendre des études. En abordant, dans les débats, le grave problème des déficits en chercheurs vers 2005, il a souvent fait appel pour rechercher et trouver des moyens d'intéresser davantage tous les

Du 29 octobre au 2 novembre, il a beaucoup plu, mais heureusement l'I.U.T. de Tours a su nous mettre à l'abri dans des conditions chaleureuses et studieuses. Nous avons planché tous pendant au moins 36 heures ; certains qui avaient la lourde tâche de rédiger ont vraiment travaillé en continu —ont-ils même dormi ? —

Dois-je remercier l'APMEP de m'avoir accepté ? J'hésite, car ce fut dur pour le retraité de tenir le coup dans ce rythme endiablé des alternances : cours - ateliers - débats - tables rondes... interrompu un instant pour faire une incursion sur les merveilleux bords de Loire. La disponibilité de l'équipe d'animation et de l'équipe d'accueil m'ont permis de bien vivre cette semaine de «vacances-travail» ; je les en remercie donc.

élèves, et surtout les filles, aux études scientifiques. Peut-être que la future Charte de l'APMEP prévoira les mesures qui s'imposent.

Quelles mesures ? Le débat qui a suivi la table ronde sur «conception, élaboration et suivi des programmes» aurait pu en suggérer quelques unes. Je ne suis pas intervenu car la série des exposés laissait croire que l'APMEP avait marqué de son sceau les actuels programmes ; il valait donc mieux reprendre la discussion dans le cadre des instances de l'Association.

Sans faire une analyse des textes actuels, au Collège, les programmes conçus autour d'activités (n'est-ce pas ce que l'on appelait : problèmes-types avant 1960 ?) contiennent-ils suffisamment d'éléments pour faire une formation mathématique véritable ? Pour moi, la réponse est non.

En particulier, la géométrie physique décourage souvent les filles ; c'est pourquoi on ne les retrouve pas en Terminales Scientifiques. Je ne crois pas que le nouveau GTM (groupe technique mathématique) qui ne comprend que deux femmes modifie les inégalités actuelles, bien que je n'interprète pas ce GTM comme Groupe Très Macho !

Certes, les programmes ont leur pouvoir, mais il suffit de visiter des classes pour trouver une très grande diversité dans les applications. Pourtant, l'APMEP fait des efforts pour aider l'enseignement ; par exemple, la brochure Seconde est très achetée (ce qui ne veut pas dire très utile) ; espérons que, comme beaucoup d'informations, elle ne sera pas reléguée au fond de l'armoire.

Si, comme le pense D. Dacunya-Castelle, les programmes sont bons, il faut donc agir sur l'enseignement. Cette action se fait par la Formation Initiale et Continue. Que vont être les I.U.F.M. ? En ce qui concerne les chances entre filles et garçons, il semble que cela n'intéresse pas les I.U.F.M. Mais ce qui me gêne le plus, c'est que la Commission «Formation des Maîtres», dans son travail, n'ait à aucun moment pris de l'intérêt pour ce problème.

Je remercie l'atelier «Organisation scolaire» d'avoir accepté de mettre un paragraphe sur l'orientation des élèves qui tient compte de l'égalité des chances entre garçons et filles.

Le Président de l'APMEP a-t-il compris le message ? Laissons-le constituer le G.T.C. (Groupe Technique pour la

Charte) comprenant quatre membres. Trois hommes sont d'abord désignés... «Pour la quatrième place, place à un jeune»... Après quelques secondes d'hésitation, j'entends dans mon dos : «Alors, Roger, tu ne dis rien ?» C'est Anne Capdevielle qui enfin réagit et sera désignée. «Anne, Anne ma sœur... gare aux éléphants !»

Ces échos disparates ne font pas oublier que j'ai bien vécu et profité de cette Université d'Automne. Tourangeau d'origine, j'ai apprécié la chaleur de l'accueil, l'organisation matérielle (bravo pour les installations technologiques de l'I.U.T.), et bien entendu la très petite récréation au bord de Loire. Je laisse à Charles Péguy le soin d'honorer pour finir, dans la lumière des châteaux, le souvenir d'une enfant qui eut pouvoir de manœuvrer des rustres !

CHATEAUX DE LOIRE

Le long du coteau courbe et des nobles vallées
Les châteaux sont semés comme des reposoirs,
Et dans la majesté des matins et des soirs
La Loire et ses vassaux s'en vont par ces allées.

Cent vingt châteaux lui font une suite courtoise,
Plus nombreux, plus nerveux, plus fins que des palais.
Ils ont nom Valençay, Saint-Aignan et Langeais,
Chenonceaux et Chambord, Azay, le Lude, Ambroise.

Et moi j'en connais un dans les châteaux de Loire
Qui s'élève plus haut que le château de Blois,
Plus haut que la terrasse où les derniers Valois
Regardaient le soleil se coucher dans sa gloire.

La moulure est plus fine et l'arceau plus léger,
La dentelle de pierre est plus dure et plus grave,
La décence et l'honneur et la mort qui s'y grave
Ont inscrit leur histoire au cœur de ce verger.

Et c'est le souvenir qu'a laissé sur ces bords
Une enfant qui menait son cheval vers le fleuve.
Son âme était récente et sa cotte était neuve,
Innocente elle allait vers le plus grand des sorts.

Car celle qui venait du pays tourangeau,
C'était la même enfant qui quelques jours plus tard,
Gouvernant d'un seul mot le rustre et le soudard,
Descendait devers Meung ou montait vers Jargeau.

Charles Péguy

Le journal PLOT - Tarifs 1991

Nom et prénom
ou établissement

Adresse complète

Code postal et ville

Pour les 4 numéros de :

1986 ☐ 1990 ☐
1987 ☐ 1991 ☐
1988 ☐ 1992 ☐
1989 ☐ 1993 ☐

Ecole élémentaire ☐

Collège ☐

Lycée ☐

Supérieur ☐

Autre ☐

Réabonnements et Adhérents

Tarif normal
et établissements*

Apmep

Supplément
avion

Total à payer

Pour un an
Par année
supplémentaire

120 F
+ 90 F

90 F
+ 70 F

+ 40 F
+ 40 F

→ Co-abonnement :

à PLOT et à
Pour un an
Par année
supplémentaire

Tangente
215 F
195 F

Jeune Archimède
150 F
130 F

Tangente & J.A.
275 F
255 F

Suppl^l avion
+ 85 F
+ 85 F

Total à payer

* 2 exemplaires pour les établissements

Règlement à envoyer à l'APMEP Orléans-Tours — BP 6759, 45067 Orléans-Cedex 2 — CCP La Source 144009X

10%, 20% de RÉDUCTION* si vous êtes abonné au PLOT pour 1 an, 2 ans...

Prix unitaire normal

(nombre)
Coût
Total

Les Dossiers et Matériels du PLOT — Tarifs 91 —

NOM :
Adresse :
Code Postal :

50 F	Kit matériel Polyèdres n°1			
50 F	Kit matériel Polyèdres n°2			
50 F	Dossier Polyèdres dans l'espace			
50 F	Papiers accrochés (dossier et matériel)			
50 F	Pilages et mathématiques (dossier matériel)			
50 F	Les Dossiers "Ludi-Math" 3 et 4	n° 3	n° 4	
50 F	Catalogue exposition : Mosaïque Mathématique			
100 F	Dossiers Spécial II			
200 F	La cassette vidéo TANGENTE			
10 F	Affiches pour la classe : Format minimum 40 x 60 cm			
10 F	1. Horizons Mathématiques	2. L'esprit Informatique		
10 F	3. Volume impossible	4. Polyèdres dans l'espace		
20 F	5. Pavage hyperbolique (1)	6. Pavage hyperbolique (2)		
20 F	7. Triangles (1) ou (2)	8. Cercles et sphères		
20 F	Pour envoi des affiches roulées dans un tube (en option)			
50 F	Pochettes pour rétroprojecteur n° 5 à 10, 12 à 14			
100 F	Pochettes de diapositives n° 1 à 6			
100 F	Géode - miroir ☐	Sphère - image ☐		
Sous total				
Réduction pour les abonnés au Plot pour 1 an 10% ☐ pour 2 ans 20% ☐				
Frais d'envoi forfaitaires*				20 F
TOTAL A PAYER				

* 20% pour les écoles élémentaires.

* Frais d'envoi par avion à compter en plus

Règlement à envoyer à l'APMEP Orléans-Tours — BP 6759, 45067 Orléans-Cedex 2 — CCP La Source 144009X

Bon de commande en souscription (1)

Le Secret des Pavages
116 pages. 80 F

nom:

adresse:

Maths en pièces,
116 pages. 80 F

ville :

Les deux : 150 F (franco de port)

(1) Adressez votre commande
accompagnée de son règlement à:

ADECUM B.P. 6759
45067 - ORLEANS - Cedex 2

