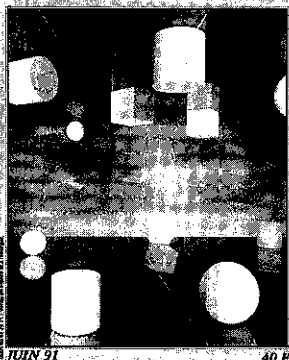


PLOT



Directrice de publication
Marie-Laure Darche-Giorgi

Comité de Rédaction
Jacques Borowczyk,
Daniel Boutté, Gérard Chauvat,
Jacqueline Collet, Roger Crépin,
Luce Dossat, René Gauthier,
Georges le Nezet, Ginette Mison,
Serge Parpay, Raymond Torrent,
Michel Mirault, René Metregiste.

Rédaction
Michel Darche, Michel Clinard

Secrétariat
Madeleine Schlienger

Ventes
Patrick Marthe, Pierre Daudin

Publicité
Pascal Monsellier

Abonnements
PLOT APMEP
Université, BP 6759
45067 Orléans-Cédex 2

Prix d'abonnement
100 FF pour 4 numéros par an
Adhérent APMEP : 80 F.
Abonnement étranger : 120 F.

Photocomposition et maquette
Techniques Graphiques du Futur
Limoges

Photogravure et impression
Fabrègue - Limoges

Commission paritaire
63181 - ISSN 0397-7471

Editeur
Associations régionales
de l'APMEP de Poitiers,
Limoges, Orléans-Tours,
Nantes, Rennes, Rouen, Toulouse
Brest, Caen, Clermont-Ferrand et
La Réunion

Diffusion
Adecum (Association pour le
développement de l'enseignement
et de la culture mathématique).
Publié avec le concours
du Centre National des Lettres et
du Ministère de la Coopération

SOMMAIRE

- Editorial	01
- Puissance et limite des modèles - R. Pallascio - St.-Bruno - Québec	02
- Pointus les cônes ? - A. Berté - Bordeaux	07
- L'espace en seconde - Y. Bouteiller et M. Dupérier - Irem d'Orléans	12
- Comment calculer les polyèdres réguliers et semi-réguliers - D. et Ph. Martin - Nantes	15
- Démonstration, perception et évocation - A. Taurisson - Toulouse	23
- L'évolution historique des dessins - B. Parzys - Paris	31
- Représentation de solides - D. Beaufort - Chartres	41
- L'espace et l'enseignement - G. Vaton - Abidjan	44
- Abonnements - bon de commande matériels PLOT	48

EDITORIAL



Déjà en 1987, nous avons publié un numéro du PLOT (le 39) sur l'espace qui avait eu un grand succès auprès des lecteurs de l'époque (3 fois moins nombreux qu'aujourd'hui !!!).

Nous récidivons cette année avec deux numéros, celui-ci et celui de fin d'année, et des auteurs, anciens qui travaillent toujours sur le sujet et nouveaux qui apportent

un autre regard sur ... l'espace.

Pour ne pas vous lasser, et pour vous réserver une surprise en fin d'année, les articles denses sont à suivre dans le dernier numéro de 91.

Une façon aussi pour le PLOT de prendre en compte votre désir (et votre besoin) de profiter de l'été.

INFO-DERNIERES

Au Palais de la Découverte :
"De près comme de loin", une exposition temporaire sur les formes fractales qui vous montrera la force que donnent les images aux mathématiques.

PROCHAIN NUMERO :

Les ateliers des journées nationales de l'APMEP en Guadeloupe

PUISSANCE ET LIMITE DES MODELES

Richard PALLASCIO - Saint-Bruno – Québec

*La science est l'asymptote de la vérité,
elle approche sans cesse
et ne touche jamais !
(Victor Hugo, dans «Shakespeare»)*

Deux exemples appliqués aux propriétés multiplicatives et à la notion de dimension !

De diverses conceptions des mathématiques

Nous avons tous et toutes une conception personnelle des mathématiques. Bernard Charlot (1976) les résume à trois conceptions épistémologiques différentes : les «mathématiques du ciel» (selon l'expression du philosophe des sciences Jean T. Desanti), c'est-à-dire perçues comme étant des structures existantes en soi, les «mathématiques de la terre» perçues comme étant la structure du monde naturel ou social, et les mathématiques perçues comme instruments, comme une création.

Le pédagogue ou la pédagogue qui est investi(e) de la première conception, la plus répandue, cherche à présenter le monde des mathématiques qui existe indépendamment de notre esprit, lequel doit être formé (i.e. «prendre la forme de») à celles-ci. Selon la deuxième conception, les mathématiques existent dans les choses elles-mêmes. En les manipulant con-

crètement, l'enfant finira bien par s'approprier les éléments mathématiques qu'elles contiennent. Il suffit d'y mettre le temps. Selon la dernière conception, les mathématiques n'ont pas été découvertes, elles ont été créées, inventées. Elles sont une métaphore du monde réel, parmi d'autres, de nature artistique par exemple !

Selon notre conception des mathématiques, les modèles que nous utilisons pour se représenter la réalité n'ont pas tous le même caractère permanent. Nous examinons ici deux exemples : d'abord les propriétés multiplicatives et ensuite la notion de dimension.

Les propriétés multiplicatives

Dans un article très intéressant, Georges Glaeser (1981) montre l'évolution de la compréhension des propriétés multiplicatives. En fait les mathématiciens, de façon «clandestine» au moins depuis Diophante d'Alexandrie (fin du 3^e s. après J.-C.) jusqu'au 19^e siècle, ont utilisé ces propriétés, sans vraiment les comprendre (ex : le produit de deux entiers négatifs égale un entier positif, c'est-à-dire pendant près de 16 siècles.

Même Euler justifiait que

$$(-1) \times (-1) = 1$$

et non (-1) , étant donné que

$$(-1) \times (1) = (-1) \text{ !?}$$

La place $<<(-1)>>$ était occupée ! En effet, cela fonctionnait !

L'auteur est chercheur
au CIRADE

(Centre Interdisciplinaire
de Recherche sur l'Apprentissage
et le Développement

en Education) et professeur au
département de mathématiques et
informatique de l'UQAM.

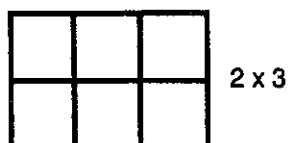
Cet article est aussi paru au
Québec en 1990 dans

«Instantanés Mathématiques».

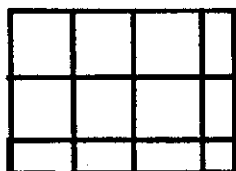
Tous les modèles finissent par rendre les armes, c'est-à-dire à ne plus représenter la réalité sans l'introduction d'artifices. Par exemple, celui du bilan commercial (ou de l'addition répétée, voir Grignon, 1987) issu du produit d'entiers positifs,

$$2 \times 3 = 2 + 2 + 2 = 3 + 3 = 3 \times 2$$

achoppe sur le produit de facteurs positifs inférieurs à 1. Ou encore celui de la surface rectangulaire (voir Lyons, 1988) issu du produit de nombres fractionnaires,

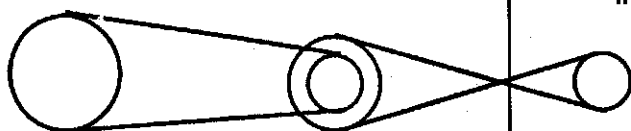


$$2,5 \times 3,5$$



$$\begin{aligned} 2,5 \times 3,5 &= (2 + 0,5) \times (3 + 0,5) \\ &= (2 \times (3 + 0,5)) + (0,5 \times (3 + 0,5)) \\ &= (2 \times 3) + (2 \times 0,5) + (0,5 \times 3) + (0,5 \times 0,5) \end{aligned}$$

s'adapte plutôt mal aux relatifs. Ou encore celui des courroies de transmission (voir Glaeser, 1981), tentant de représenter le produit de deux nombres négatifs.



Ce n'est qu'en 1867, qu'un mathématicien allemand «ordinaire», Hermann Henkel, sans même le savoir, mit un terme à cette recherche du modèle parfait qui pourrait justifier les propriétés multiplicatives sur tout ensemble de nombres, une fois pour toutes. Sa perspective tranchait par rapport aux précédentes : plutôt que de chercher des exemples concrets ou pratiques, il décréta le caractère imaginaire des nombres relatifs. Ceux-ci, comme tous les autres, sont des inventions, et non des découvertes !

Evidemment l'enfant n'a pas à repasser par toutes ces inventions, toutes ces créations. Les philosophes diraient : «l'ontogénèse ne reproduit pas la phylogénèse»

(i.e. l'individu n'a pas à refaire tout le cheminement de l'humanité). Par contre, il ne serait pas sage de faire l'économie de tous ces modèles, d'un point de vue didactique, à la condition toutefois de relativiser le rôle du modèle par rapport au concept mathématique qu'il est censé représenter. Par exemple, le modèle de l'addition répétée est tout à fait approprié, à la condition que le modèle ne soit pas identifié à l'opération elle-même. Chaque modèle n'est qu'une représentation imparfaite d'une certaine réalité, pas toujours facile à circonscrire (les plus grands mathématiciens n'ont-ils pas pris des siècles à comprendre les propriétés multiplicatives sur les nombres relatifs !).

La notion de dimension

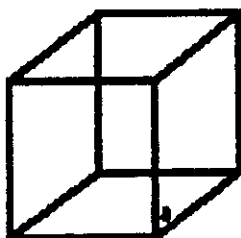
Existe-il des objets qui n'ont pas trois dimensions ? Que veut dire un objet qui a trois dimensions ? Un carré existe-il ? Un segment ? Un point ? Peut-on parler d'objets de dimension 4 ? D'objets de dimension non entière (ce sont les fractals) ? Y a-t-il des modèles qui représentent ces objets ?

A la suite du premier exemple, nous devrions être prudents(es) avant de parler de l'«existence» ou de la «non-existence» de tel ou tel objet de telle ou telle dimension. Le concept de dimension est fort pratique.

Il permet de décrire un cube à l'aide de 3 dimensions, le carré comme étant une des frontières bidimensionnelles (ce que je «vois» du cube, lorsqu'une face est perpendiculaire à mon champ de vision) du cube, le segment comme étant une des frontières unidimensionnelles (ce que je «vois» du carré, lorsque j'examine son «épaisseur») du carré, et par extension, le point comme étant une des frontières de dimension nulle (ce que je «vois» d'une tige, lorsque j'examine son «épaisseur») du segment. Notre petit monde tridimensionnel se porte bien ! Est-ce si sûr ? Allons-y voir !

Quand je dessine un objet «conventionnel», je me trouve à représenter en deux dimensions, i.e. sur ma feuille de papier, un objet tridimensionnel. Or je ne peux effectuer cette opération sans convention ! Par exemple, si je dessine un cube d'après les conventions dites de la «perspective cavalière», selon lesquelles les

parallèles sont conservées, ce qui n'est pas le cas dans notre champ de vision (ex : les bordures d'une route semblent se rencontrer au loin), voici ce que cela peut donner :



L'angle «a» est représenté à l'aide d'un angle aigu, alors que dans la réalité il s'agit d'un angle droit ! Je dois donc utiliser une convention, pour que vous puissiez convenir qu'il s'agit bien de la représentation d'un cube, et non d'un assemblage quelconque de lignes.

En termes de mesure, je représente l'aire d'un carré de 2 cm de côté par le calcul et l'expression :

$$2 \text{ cm} \times 2 \text{ cm} = 4 \text{ cm}^2$$

Si je poursuis en voulant calculer le volume d'un cube ayant 2 cm d'arête, j'obtiens :

$$4 \text{ cm}^2 \times 2 \text{ cm} = 8 \text{ cm}^3$$

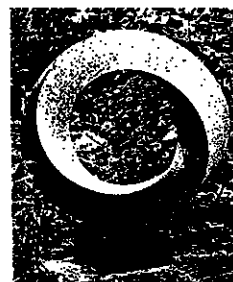
Qu'est-ce qui nous empêche de poursuivre et de considérer le calcul :

$$8 \text{ cm}^3 \times 2 \text{ cm} = 16 \text{ cm}^4 \text{ (on parle de cm bicarrés) ?}$$

Si nous considérons un univers dans lequel il existerait non pas seulement 3, mais 4 directions mutuellement rectangulaires, il nous faut une quatrième donnée pour déterminer un point, par exemple : (x, y, z, w). Mais le sens commun nous dit que dans notre univers, il n'y a pas de place pour une quatrième direction ! Mais faut-il toujours faire confiance à notre sens commun ?

L'expérience usuelle nous conduit à soutenir que toute surface a deux faces ! Or il n'en est rien, nous le savons, depuis l'invention du ruban de Moëbius (1790-1868). Ce ruban est une surface à une seule face et une seule frontière (prendre une bande de papier rectangulaire, faire une rotation

de 180° à l'une des extrémités et coller les deux extrémités ensemble) :



Il est important pour le développement de la pensée mathématique d'avoir de tels objets. Ils montrent au moins que l'on ne peut se contenter d'être sûr de quelque chose, uniquement d'après le « bon sens usuel » (Niklitschek, 1946).

Mais dans l'univers bidimensionnel d'une feuille de papier, il n'y a pas de place pour une 3e dimension, d'où la nécessité de conventions lorsque nous l'employons comme mode de représentation. De même notre œil, habitué à observer l'univers tridimensionnel, ne « voit » pas d'objet de la 4e dimension, pas plus que ceux de dimension 2 d'ailleurs : sans épaisseur, ma feuille de papier ne pourrait me révéler le carré qui y figure ! Peut-on conclure pour autant que les « objets » de dimension 4 n'existent pas ? Essayons de les représenter sur notre feuille de papier, comme s'ils pouvaient exister.

Procédons par analogie. Un segment de dimension 1 est engendré par 2 points distincts de dimension 0, par convention (ou si vous aimez mieux, ce sont des points ou objets de dimension 0 qui « limitent » le segment) :

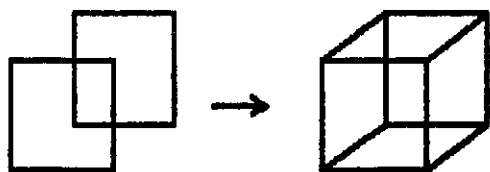


Un carré de dimension 2 est engendré par 2 segments distincts de dimension 1 (ou encore ce sont des segments ou objets de dimension 1 qui limitent le carré) :

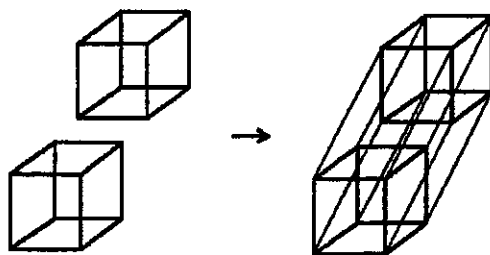


Un cube de dimension 3 (8 sommets, 6 faces et 12 arêtes) est engendré par deux carrés de dimension 2 (ou ce sont des

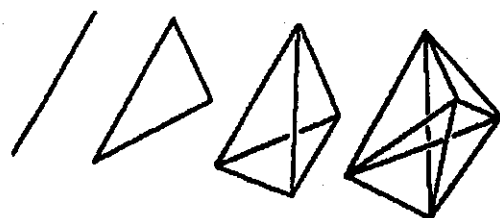
carrés ou objets de dimension 2 qui limitent le cube) :



Ne nous arrêtons pas en si bon chemin. Un hypercube (ou cube de dimension 4, composé de 16 sommets, 32 arêtes, 48 carrés et 8 cubes) est engendré par deux... cubes de dimension 3 (ou ce sont des cubes ou objets de dimension 3 qui limitent l'hypercube) :



De la même façon, nous pouvons identifier les «objets» les «plus simples» pour les 4 premières dimensions : le segment, le triangle, le tétraèdre [un tétraèdre est une pyramide à base triangulaire] (4 sommets, car il y a toujours un et un seul plan qui passe par trois points distincts et non colinéaires [des points qui ne sont pas tous situés sur une même droite], 4 triangles et 6 arêtes) et le pentaèdre quadridimensionnel (ou tétraèdre de dimension 4, composé de 5 sommets, car il y a toujours un et un seul tétraèdre engendré par quatre points distincts et non coplanaires (des points qui ne sont pas tous situés dans un même plan), 10 arêtes, 10 triangles et 5 tétraèdres).



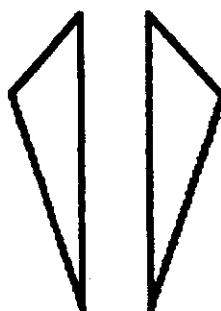
D'un bout du segment, je "vois" l'autre bout. D'un sommet du triangle, je "vois" le segment opposé. D'un sommet du tétraèdre, je "vois" un triangle. D'un sommet du pentaèdre quadridimensionnel, je «vois» un tétraèdre !

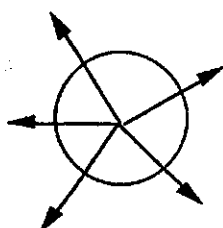
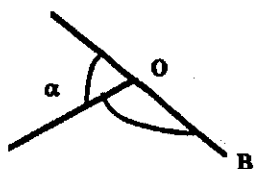
Tous ces objets ne sont pas que des vues de l'esprit. Puisque nous pouvons les dessiner, nous pouvons également les bricoler dans l'espace à trois dimensions et construire, non pas des objets de dimension 4, mais leurs représentations en trois dimensions. (Différents matériels permettent de faire construire ces objets par vos élèves. Le plus intéressant à ma connaissance est le «D-stix» composé de tiges en plastique variant de 2 à 14 pouces et de nœuds en caoutchouc équipés de 5, 6, ou 8 embouts : Geodesic Structures, P.O. Box 11308, Parkwater Station, Spokane, Washington 99211).

Conclusion

Que conclure de notre voyage à travers les différentes dimensions, eu égard aux modèles ? D'abord que tout modèle n'est jamais la réalité. Il n'en est qu'une représentation plus ou moins imparfaite ! Par contre tout modèle au moins localement exact peut s'avérer utile à l'une ou l'autre des étapes de l'apprentissage de l'individu, surtout dans un domaine aussi symbolisé que les mathématiques, une métaphore de la réalité, créée par l'être humain.

Ensuite, ces modèles peuvent nous en apprendre beaucoup à propos de concepts comme la symétrie et la projection d'un objet «conventionnel», par exemple sur un plan. A des enfants qui considéraient deux triangles scalènes, symétriques par rapport à une droite, mais non congrus (ils ne peuvent coïncider en les déplaçant uniquement dans le plan), on a pu leur faire effectuer une rotation dans la 3e dimension et induire ainsi la congruence.





néanmoins être plus pointus l'un que l'autre. Même remarque avec le cercle de base. Le fait d'être plus ou moins pointu ne peut pas se mesurer par h seul, ou r seul, mais par le rapport entre r et h , ce qui revient à la tangente d'un certain angle β que l'on voit en dessinant le cône de façon à mettre en évidence h et r .

Le professeur peut alors expliquer que le cône est une surface de révolution, en faisant tourner un triangle rectangle (une équerre par exemple). On remarque que

$$\tan \beta = r/h \quad \text{et} \quad \sin \beta = r/s/R$$

d'où une reformulation de la question 1 :

– Relation entre α et R donnés d'une part, et l'angle β obtenu d'autre part. (Dans cet article, pour des questions de place, nous nous limiterons à la question 1 ainsi reformulée et à ses prolongements. Nous n'aborderons pas la question du volume, pourtant elle aussi très intéressante).

Cette formulation satisfait bien ceux qui voulaient mesurer le «pointu» en emboîtant les cônes les uns dans les autres, car ils avaient vu que ce qui intervenait n'était ni h ni r , mais une sorte d'angle (ils ne disposent pas du concept d'angle solide qu'ils pourraient utiliser, certains voient 2β en prenant les génératrices correspondant à deux points opposés sur le cercle de base). Pour ceux qui n'ont pas eu cette intuition, on arrive à β comme je l'ai expliqué par h et r et la tangente. Il faut être sûr que tout le monde est d'accord sur cet angle β , en demandant par exemple la valeur de β pour le cône plat.

III - Réponse à la question 1 dans une classe

Les élèves, plus ou moins influencés par le professeur selon leur degré d'autonomie, peuvent avoir l'idée d'étudier un cas particulier avant de passer au cas général. Beaucoup ont construit leur cône avec un demi-cercle, et ils peuvent alors constater que, quel que soit R leurs cônes sont tous «pointus» pareil, donc β doit être calculable pour tous dans ce cas particulier. On trouve $\beta = 30^\circ$ car $R = 2r$ donc $\sin \beta = 1/2$. Dans le cas général, au lieu de $\pi R = 2\pi r$ on a $(2\pi - \alpha)R = 2\pi r$ donc $2\pi - \alpha = 2\pi r/R$ et

$$\text{donc } 2\pi - \alpha = 2\pi \sin \beta$$

Ce problème est difficile pour des élèves

de 2e et 1ère car il y a trois difficultés :

1 - L'angle α n'est pas matérialisé, et certains élèves ne le «voient» pas bien. L'intérêt est qu'on l'atteint par ses lignes trigonométriques, ce qui est une utilisation pertinente de la trigonométrie.

2 - Les élèves ont du mal à réaliser que la longueur de l'arc dans le cône développé est justement la longueur du cercle de la base quand le cône est construit. La figure plate et la figure dans l'espace sont si différentes qu'ils ont du mal à voir le passage de l'une à l'autre, même s'ils l'ont réalisé de leurs mains.

3 - La proportionnalité entre l'angle au centre et la longueur de l'arc est peu souvent utilisée à l'école, de sorte que les élèves n'y pensent pas du tout.

Ceci dénote une lacune dans l'assimilation du concept de proportionnalité, et les difficultés pour la compréhension du radian en découlent.

L'intérêt de commencer par le cas particulier du demi-cercle est qu'on élimine à peu près la difficulté 3, car comme il s'agit d'un demi-cercle, il suffit de penser à la proportionnalité entre la longueur du cercle et le rayon. Si le cercle est deux fois plus petit le rayon est deux fois plus petit, donc $r = R/2$.

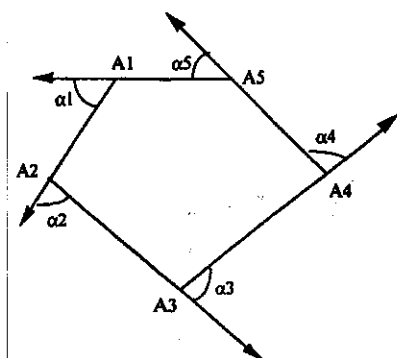
Dans le cas du demi-cercle, la difficulté 2 est suffisamment bloquante pour que l'on arrive à ceci : les élèves vérifient par la mesure directe que $r = R/2$ mais ne peuvent pas le justifier. Ils ont donc $\sin \beta = 1/2$ donc $\beta = 30^\circ$ mais à partir d'un résultat admis d'après une mesure. Par chance d'autres conjecturent $\beta = 45^\circ$ à vue d'œil et en déduisent une relation de proportionnalité entre β et $360^\circ - \alpha$.

$\beta = (360^\circ - \alpha)/4$; $360^\circ - \alpha$ est la mesure de l'angle qui reste après le découpage.

Conjecture renforcée par :

– le cas limite $\alpha = 0$ on a $\beta = 360^\circ/4 = 90^\circ$
– l'aplatissement du cône de façon frontale (confusion sur l'angle β).

Le fait qu'il y ait deux conjectures contradictoires, oblige chacun à trouver de meilleures preuves, ce qui amène la preuve de $R = 2r$.



Quand on fait le cas particulier de $\alpha = 180^\circ$, il y a une seule variable supplémentaire à introduire, c'est α mais la difficulté 3 est très bloquante. Pour arriver à passer l'obstacle on peut prendre un deuxième cas particulier encore avant le cas général. Par exemple, pour confectionner le cône, on conserve $3/4$ du cercle. Donc $360^\circ - \alpha = 270^\circ = 3\pi/4$. On voit alors que, se donner l'angle en radian est plus pratique, pour calculer la longueur de l'arc. On trouve un angle β d'environ 48° , et on vérifie que c'est normal que cette valeur soit supérieure à 30° , puisqu'on a enlevé un morceau de cercle plus petit.

On traite alors le cas général et on peut arriver à la conclusion que β ne dépend pas de R mais seulement de α ce que l'on avait vérifié dans les cas particuliers.

On termine par $h/R = \cos \beta$

$$\text{donc } h = R \cos \beta = R \sqrt{1 - \frac{(2\pi - \alpha)^2}{4\pi^2}}$$

Contrairement à β , h dépend à la fois de α et de R .

Tous les mystères du plus ou moins pointu, plus ou moins haut et plus ou moins plat sont éclaircis, ce qui provoque toujours un sentiment de satisfaction. La mathématisation nous a permis de progresser dans la compréhension.

**De la dimension 2
à la dimension 3,
que veut dire
plus ou moins pointu ?
Plus ou moins courbe ?
(avec des étudiants de DEUG)**

I - Qu'est-ce qui rend un angle plus ou moins pointu ?

Quand je veux tracer un angle AOB sur l'écran de l'ordinateur en langage LOGO, je pars de A, je trace [AO] puis je dois tourner d'un certain angle α orienté tel que $\alpha + (\text{OB}, \text{OA}) = \pi$ donc $\alpha = \pi - (\text{OB}, \text{OA})$. L'angle AOB est d'autant plus pointu que α est grand, car α est ce qu'on enlève à l'angle plat.

Et si je dessine un polygone, de 5 côtés par exemple ?

Je dois tourner de $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$. Pour savoir combien vaut cette somme, je dessine des représentants de même origine des vecteurs u_1, u_2, u_3, u_4 , tous de norme 1. Les extrémités se trouvent sur un cercle de rayon unité, et tout le cercle est décrit quand j'imagine le mouvement.

$$\sum \alpha_i = 2\pi$$

Ce résultat est valable quel que soit le nombre de sommets du polygone, et même si le polygone n'est pas convexe, pourvu que ses côtés ne se croisent pas.

$$\alpha_1 = \pi - A_1 \quad \alpha_2 = \pi - A_2 \quad \alpha_3 = \pi - A_3$$

Avec A_1, A_2, A_3 angles positifs aigus du polygone.

Si A_4 est toujours compté positif

$$|\alpha_4| = A_4 - \pi \text{ mais } \alpha_4 < 0$$

$$\text{donc } \alpha_4 = \pi - A_4$$

On obtient le même résultat si, au lieu de prendre des vecteurs u_i ayant pour direction les côtés du polygone, on prend des vecteurs v_i normaux aux côtés du polygone

on a $\beta_i = \alpha_i$
et donc la somme des angles β_i
est aussi 2π

II - Courbure pour courbe plane

On sait que la courbure locale en un point d'une courbe est égale à l'inverse du rayon du cercle osculateur en ce point. La courbure totale de la courbe s'obtient en sommant les courbures locales tout au long de la courbe.

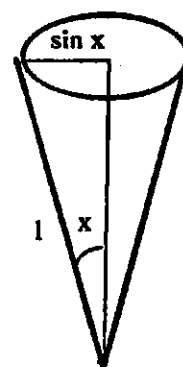
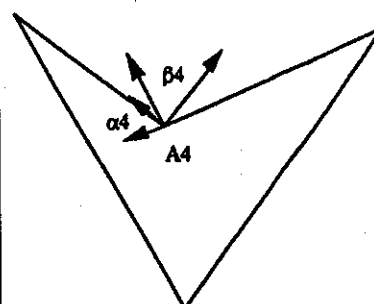
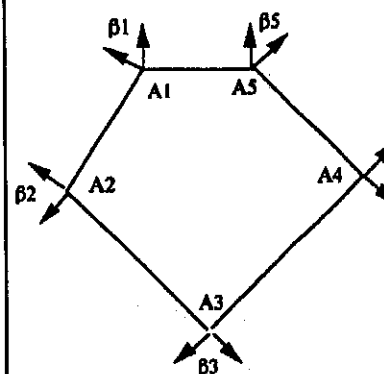
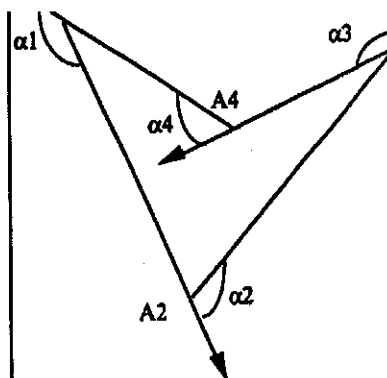
Ainsi la courbure totale du cercle de rayon

$$R \text{ est } \int \frac{1}{R} dl = \frac{1}{R} \int dl = 2\pi R / R = 2\pi$$

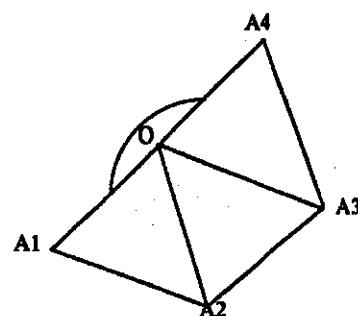
Tout polygone dont les côtés ne se croisent pas est homéomorphe à un cercle. Sa courbure totale est aussi de 2π et on peut convenir qu'en chaque sommet A_i la courbure locale est α_i car, comme nous l'avons vu, plus α_i est grand plus l'angle est pointu.

III - Que signifie «plus ou moins pointu» en dimension 3 ?

En dimension 2, un angle en radian est la longueur de l'arc décrit par l'extrémité du vecteur unitaire qui «balaye» l'angle.



9



Peut-on avoir l'analogie dans l'espace ? Soit O le sommet d'un cône et imaginons un vecteur unitaire représenté en O, qui «balaye» l'intérieur du cône. Son extrémité décrit une calotte sphérique. L'aire de cette calotte sphérique est l'angle solide du cône en stéradian.

L'aire de la calotte sphérique se calcule par intégration (petites bandes de largeur dx et de longueur $2\pi \sin x$).

Si le demi-angle au sommet du cône est x_0 ,

$$\int_{x_0}^0 2\pi \sin x \, dx = [2\pi \cos x]_0^{x_0} = 2\pi (1 - \cos x_0)$$

Prenons maintenant le cône réalisé par les élèves de 3e ou 2e.

Le demi-angle au sommet était β son sommet O.

On fait «tourner» en O un représentant d'un vecteur qui reste normal à la surface du cône. Ce vecteur «balaye» un angle solide qui est égal à $2\pi(1 - \cos(\pi/2 - \beta)) = 2\pi(1 - \sin \beta)$

Or ceci est la valeur de α que nous avons trouvée pour la partie du cercle que l'on enlève dans le patron du cône, ce qui permet de réaliser le «pointu». Il s'agit donc aussi de l'angle solide balayé par le vecteur normal au cône représenté en son sommet. Plus α est grand, plus le cône est pointu.

IV - Courbure d'une surface en dimension 3

Localement la courbure d'une surface en un point est le produit $1/R_1 \times 1/R_2$, $1/R_1$ et $1/R_2$ étant les courbures extrémales de deux géodésiques en ce point (plus grande et plus petite courbure). On obtient la courbure totale en sommant la courbure locale sur la surface.

Par exemple pour une sphère de rayon R, la courbure totale est :

$$\int \frac{1}{R^2} ds = \frac{1}{R^2} \int ds = \frac{1}{R^2} \times 4\pi R^2 = 4\pi$$

Prenons un «bon» polyèdre et faisons promener un vecteur normal sur la surface de ce polyèdre. A chaque sommet le vecteur normal balaye un angle solide, et si on veut voir la somme de tous ces angles solides, il suffit de représenter tous ces vecteurs normaux de même origine. Leur

extrémité «balaye» la sphère entière de rayon 1 si les vecteurs sont unitaires.

Donc la somme des angles solides ainsi obtenus est 4π . Un tel polyèdre est homéomorphe à une sphère et il a la même courbure que celle-ci. On peut dire qu'en chaque sommet A_i la courbure est le α_i correspondant.

Par exemple pour un tétraèdre régulier réalisé avec des triangles équilatéraux, en chaque sommet on a trois triangles équilatéraux et on colle $[OA_i]$ sur $[OA_j]$.

Le «pointu» vient d'un «manque» de π . Donc en chaque sommet on peut dire que la courbure est π et la courbure totale est 4π .

Pour un cube, la courbure en chaque sommet sera $\pi/2$ et la courbure totale sera $8 \times \pi/2 = 4\pi$.

Descartes avait découvert cette propriété pour les «bons» polyèdres, propriété qui est équivalente à la formule d'Euler $S + F - A = 2$.

(démonstration de l'équivalence en annexe)

V - Et si je dessine un triangle sur un cône ?

Si, sur une sphère de rayon R, je dessine un triangle dont les côtés sont trois grands cercles qui sont les géodésiques de la sphère, je trouve que la somme des angles du triangle est :

$A + B + C = \pi + (1/R^2) T$ où T = aire du triangle sphérique.

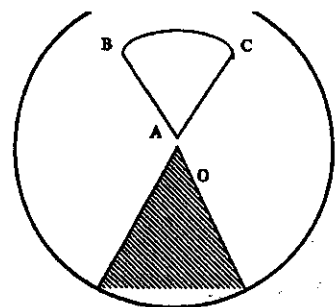
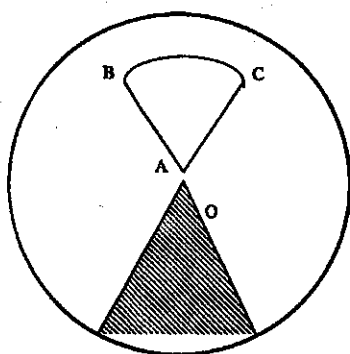
De façon générale, sur une surface, la somme des angles d'un triangle formé par des géodésiques s'obtient par :

$$\pi + \int K(M) \, ds$$

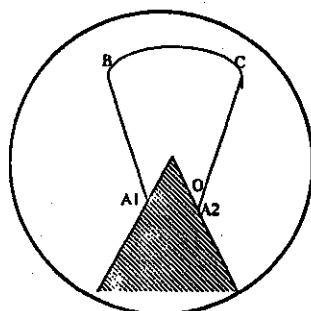
$K(M)$ étant la courbure locale en chaque point du triangle et on somme sur la surface T du triangle.

Par exemple pour la sphère qui a une courbure constante $1/R^2$ en chaque point, on obtient la formule donnée plus haut. Cette formule dans le cas particulier de la sphère peut aussi se démontrer directement.

On peut donc avoir l'idée de tracer un triangle sur le cône. Ce n'est pas simple si le cône est construit. On peut décoller



10



selon une génératrice et tracer le triangle sur le papier mis à plat. Les géodésiques sont alors des droites.

On peut construire le triangle de deux façons, contenant le sommet du cône (fig. 1) ou ne contenant pas le sommet du cône (fig. 2).

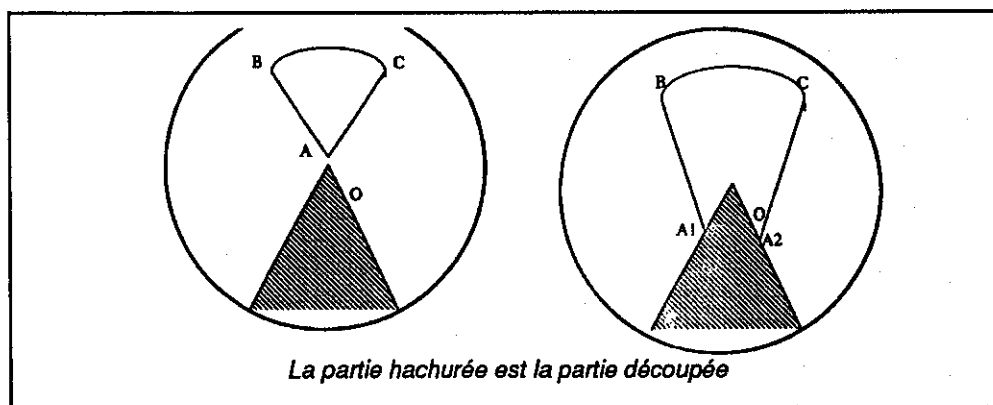


Fig. 2

$OA_1 = OA_2$ et on colle $[OA_1]$ sur $[OA_2]$

Dans la figure 1 la somme des angles du triangle est π . C'est normal car il s'agit d'un triangle ordinaire.

Dans la figure 2 par contre la somme des angles du triangle est

$$B + C + CA_1O + OA_2B = 2\pi - (OA_1A_2 + OA_2A_1)$$

où 2π est la somme des angles du quadrilatère BCA_1A_2 .

$$OA_1A_2 + OA_2A_1 = \pi - \alpha \text{ dans le triangle } OA_1A_2.$$

donc la somme des angles du triangle tracé sur le cône est

$$2\pi - (\pi - \alpha) = \pi + \alpha$$

Ce résultat est cohérent avec le fait de dire que α est la courbure en O.

C'est le seul point du triangle où il y a une courbure non nulle.

ANNEXE : Polyèdres eulériens

Pour un sommet

$2\pi - (\text{somme des angles des faces à ce sommet}) = \alpha_i$

Soit S le nombre de sommets et ω la somme des angles de toutes les faces du polyèdre.

$$2\pi S - \omega = \sum \alpha_i \text{ relation (1)}$$

Pour une face

$$(\text{somme des angles d'une face}) + 2\pi = \pi \times (\text{nombre de sommets de cette face}).$$

Soit F le nombre de faces, A le nombre d'arêtes.

nombre de sommets d'une face

= nombre d'arêtes d'une face.

Si on ajoute les nombres d'arêtes de chaque face on obtient $2A$ car chaque arête appartient à 2 faces donc

$$\omega + 2\pi F = \pi \times 2A \text{ relation (2).}$$

On ajoute (1) et (2)

$$2\pi S + 2\pi F = 2\pi A + \sum \alpha_i$$

$$2\pi (S + F - A) = \sum \alpha_i \text{ donc}$$

$$S + F - A = 2 \iff \sum \alpha_i = 4\pi$$

L'ESPACE en seconde

Y. Bouteiller & M. Dupérier, Irem d'Orléans
(Première partie)

Avec ces fiches et en utilisant le logiciel «Dessiner l'espace», développé par Philippe Bernat et diffusé par l'IREM de Lorraine, nous avons couvert tout le programme de seconde relatif à l'espace.

Ces 6 fiches ont été utilisées pendant 3 séances d'une heure de Travaux Dirigés avec ordinateur. Elles ont été précédées d'un «cours» d'une heure pour mettre en place les principales notions ainsi que les conventions de représentation dans l'espace. Nous avons utilisé des figures fournies sur la disquette et, le plus souvent, fabriqué nos propres énoncés à partir de ces figures.

Pour chaque activité, les élèves :

- chargent la figure de l'exercice indiqué,
- essaient de répondre aux questions posées, tout en prenant des notes pour une rédaction ultérieure,
- reproduisent sur papier la figure obtenue sur écran.

Consignes de travail

Activité 1 (exercice 04)

On donne un tétraèdre (ABCD).

* Marquer les milieux respectifs M, N, P des arêtes [AB], [AC], [AD] de ce tétraèdre.

* Tracer les segments [BP], [CP], [DN], [DM] en respectant la règle des parties cachées.

Les segments [DN] et [CP] se coupent en H et les segments [DM] et [BP] en G.

* Tracer les segments [GH] et [MN].

* Marquer les milieux respectifs I et J des arêtes [BD] et [CD].

* Tracer les segments [AI], [AJ] et [IJ].

Questions, réponses, justifications

Q1. Quels rôles jouent respectivement les points H et G dans les faces (ACD) et (ABD) du tétraèdre (ABCD)? Justifier.

Q2. A quelles droites de la figure, la droite (GH) est-elle parallèle? Justifier.

A quelles droites de la figure, la droite (IJ) est-elle parallèle? Justifier.

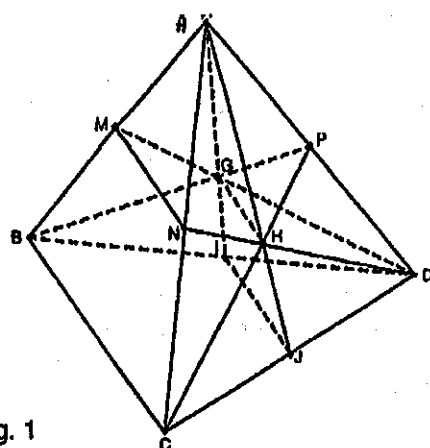


Fig. 1

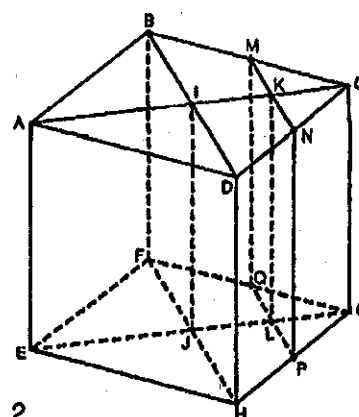


Fig. 2

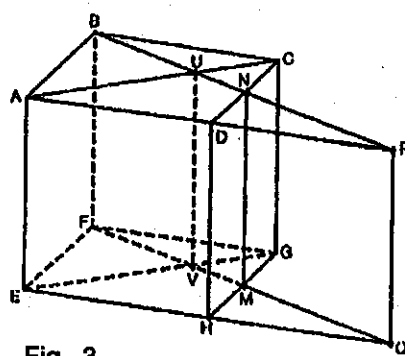


Fig. 3

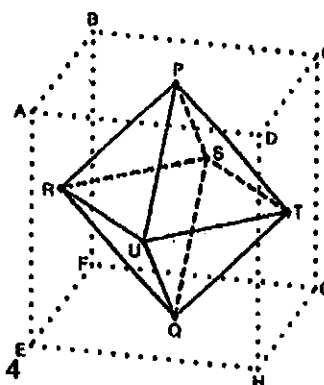


Fig. 4

Consignes de travail**Activité 2 (exercice Ø1)**

On donne un cube (ABCDEFGH).

* Marquer le point I, intersection des segments [AC] et [BD], puis le point J, intersection des segments [EG] et [FH].

* Tracer le segment [IJ].

* Marquer les milieux respectifs M, N, P, Q des arêtes [BC], [CD], [GH], [GF] du cube. Soit (V) le plan qui contient les points M, N, P, Q.

* Tracer l'intersection du plan (V) avec le plan (ACGE).

Questions, réponses, justifications

Q1. A quelles droites de la figure, la droite (IJ) est-elle parallèle? Justifier.

Q2. Expliquer pourquoi les points M, N, P, Q sont coplanaires.

Trouver sur la figure un plan parallèle au plan (V).

Q3. Quelle est la direction de la droite (L), intersection du plan (V) et du plan (ACGE)? Justifier.

Figures

Consignes de travail**Activité 3 (exercice Ø1)**

On donne un cube (ABCDEFGH).

* Marquer le point N, milieu de l'arête [CD].

* Construire la section du cube par le plan (W) qui contient les points B, F, N.

* Marquer le point U, intersection du plan (W) et de la droite (AC), puis le point V, intersection du plan (W) avec la droite (EG).

* Construire l'intersection du plan (W) et du plan (ADHE).

Questions, réponses, justifications

Q1. Justifier la construction de la section du cube avec le plan (W).

Démontrer que le plan (W) coupe le segment [AC] en un point U et le segment [GE] en un point V.

A quelles droites de la figure, la droite (UV) est-elle parallèle? Justifier.

Q2. Quelle est la direction de la droite (L), intersection des plans (W) et (ADHE)? Justifier.

Activité 4. (exercice Ø1)

On donne un cube (ABCDEFGH) en représentation fil de fer.

* Marquer les centres respectifs P, Q, R, S, T, U des faces (ABCD), (EFGH), (ABFE), (BCGF), (CDHG), (DAEH).

* Dessiner les segments [PR], [PS], [PT], [PU], [QR], [QS], [QT], [QU], [RS], [ST],

[TU], [UR] en choisissant un style de tracé respectant la règle des parties cachées.

* Désigner par (O) le polyèdre admettant pour arêtes les douze segments précédents.

Questions, réponses, justifications

Q1. Dénombrer les sommets et les faces du polyèdre (O).

Q2. Démontrer que les points D, E, G, Q, T, U appartiennent à un même plan (W).

En raisonnant dans ce plan, justifier la nature de la face (QTU) du polyèdre (O).

En déduire une qualité de ce polyèdre.

Q3. Comparer les longueurs et les directions des diagonales du polyèdre (O) à celles des arêtes du cube initial.

Qu'en déduit-on? Justifier.

Figures

Activité 5. (exercice Ø2)

On donne une pyramide régulière de sommet S et de base carrée (ABCD).

* Marquer les milieux respectifs M, N, P, Q des arêtes [SD], [SC], [SB], [SA] de cette pyramide.

* Tracer les segments [AM], [BN], [CP], [DQ] en respectant la règle des parties cachées.

* Tracer les segments [IJ], [MN], [PQ].

* Marquer le point T, intersection des droites (AM) et (BN), puis le point R, intersection des droites (CP) et (DQ).

Questions, réponses, justifications

Q1. Quels rôles jouent respectivement les points I et J dans les faces (SAD) et (SBC) de la pyramide (SABCD)? Justifier.

Q2. A quelles droites de la figure, la droite (IJ) est-elle parallèle? Justifier.

Q3. Prouver que les droites (AM) et (BN) sont sécantes ainsi que les droites (CP) et (DQ).

Q4. Les points R, S, T sont-ils alignés? Pourquoi?

Figures

Activité 6. (Fig; exo 6, exercice Ø1)

On a tronqué un cube (ABCDEFGH) en lui otant un coin tétraédrique (AMNP).

* Tracer la section du cube tronqué par le plan (T) qui contient les points C, E, G.

* Tracer la section du cube tronqué par le plan (S) issu du point D et parallèle au plan (MNP).

La droite (PM) coupe la droite (DH) en K et la droite (EH) en L.

La droite (MN) coupe la droite (BC) en Q et la droite (CD) en R.

La droite (NP) coupe la droite (EF) en U et la droite (BF) en V.

* Marquer les points K, L, Q, R, U, V.

Questions, réponses, justifications

Q1. Justifier la construction de la section du cube tronqué par le plan (T).

Q2. Justifier la construction de la section du cube tronqué par le plan (S).

Q3. Démontrer que les points K, L, Q, R, U, V appartiennent à un même plan (W). Représenter ces points en vraie grandeur dans le plan (W).

Apports de l'outil informatique:

Souvent les élèves sont bloqués devant une représentation plane d'une figure de l'espace. Ils ne «voient» pas et ont beaucoup de mal à faire les tracés demandés. Ce logiciel permet, entre autres, de:

- se déplacer autour de l'objet (tourner, s'éloigner, se rapprocher) et donne, pour chaque position de l'observateur, une représentation de la figure en perspective cavalière,
- «voir en vraie grandeur» dans un plan déterminé par trois points,
- tracer l'intersection de 2 droites (si l'élève a donné 2 droites non coplanaires, le logi-

ciel le lui dit).

Lors de la première séance, ces diverses possibilités sont utilisées au maximum pour familiariser les élèves avec les représentations planes de figures de l'espace.

L'utilisation du logiciel:

- les a aidés à reproduire correctement sur papier la figure vue à l'écran en choisissant le point de vue le plus adapté,
- leur a permis d'oser tester des intuitions, faire des constructions, ...
- leur a imposé de désigner clairement les objets qu'ils manipulent (point défini comme intersection de 2 droites par exemple). Une façon de développer, «dans l'espace», l'autonomie de l'élève face à un problème de géométrie dans l'espace et d'améliorer les rédactions de TD, ceci sans avoir passé plus de 8 heures pour couvrir l'ensemble de ce chapitre.

Le logiciel «Dessiner l'espace» est vendu par l'Irem de Lorraine avec 1 disquette programme, une disquette d'exercices et de 92 figures de base et une brochure reprenant ces éléments avec commentaires livrée à part. Prix établissement 800F environ.

(à suivre)

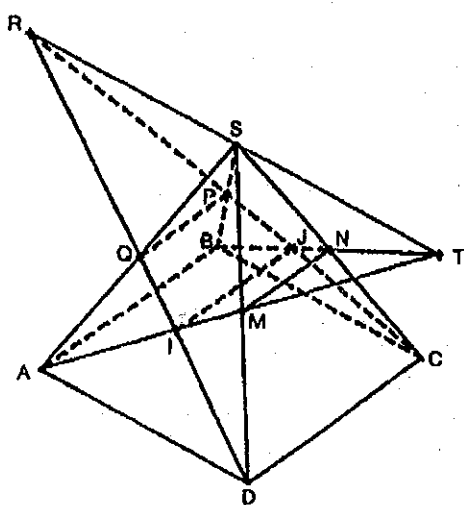


Fig. 5

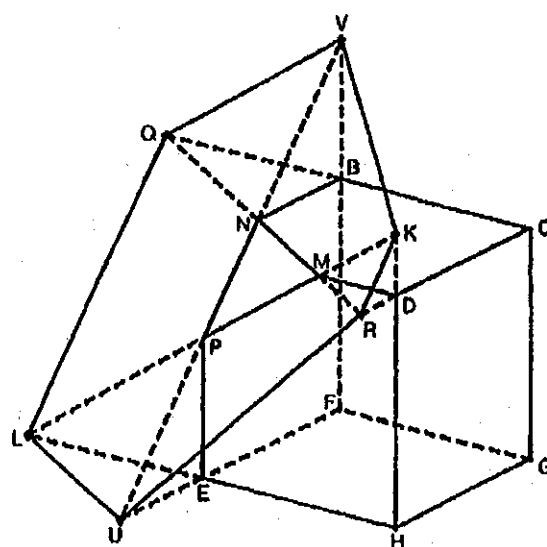


Fig. 6

Comment calculer les polyèdres réguliers et semi-réguliers

Dominique et Philippe MARTIN - Nantes

Introduction

Cette présentation résulte d'un travail de recherche en informatique dans le domaine de la synthèse d'images, entrepris depuis plusieurs années. Ce projet de recherche a pour but d'étudier des techniques informatiques d'obtention d'objets complexes à partir d'une description abstraite assez proche de l'homme, en opposition à une description de bas niveau de l'objet, en termes de coordonnées. Dans ce travail l'univers des polyèdres a été choisi pour sa richesse, tant au niveau des objets qu'il renferme, mais aussi du vocabulaire de description. Ici nous n'aborderons pas l'aspect informatique. Notre objectif est plutôt de montrer comment les mathématiques peuvent intervenir dans la résolution d'un problème concret, et aussi de montrer comment un outil informatique peut faciliter la compréhension d'objets mathématiques complexes comme le sont certains polyèdres. L'un des points clé du logiciel est le calcul des angles dièdres des polyèdres réguliers et semi-réguliers. Nous montrerons ici comment résoudre ce problème de manière numérique pour tous ces objets.

Nous espérons aussi par les quelques images présentées ici, donner l'envie de mieux connaître cet univers des polyèdres semi-réguliers, l'ordinateur permettant de découvrir des formes moins connues que celles des solides de Platon.

Quelques propriétés et définitions relatives aux polyèdres

Nous n'allons pas chercher ici à donner une définition très formelle de ce que l'on entend par «polyèdre». Disons simplement qu'un polyèdre est défini par la donnée d'un ensemble de faces planes qui sont des polygones. Un polygone est une ligne brisée fermée. Chaque segment de cette ligne est un côté du polygone. Des côtés du polygone peuvent se recouper ailleurs qu'en un sommet. Un polyèdre est un recollement de faces polygonales le long de leurs côtés ; les arêtes du polyèdre séparent toujours exactement deux faces. De façon analogue aux côtés des faces, deux faces peuvent se recouper selon une ligne qui n'est pas une arête. Remarquons que ces objets ne définissent pas forcément de façon claire un solide, les notions d'intérieur et d'extérieur pouvant parfois disparaître, comme dans le cas de polygones croisés.

Un polygone est **régulier** lorsque toutes les arêtes sont égales, et tous ses angles au sommet sont égaux.

Un polyèdre est **régulier** lorsque toutes ses faces sont des polygones réguliers égaux (fig. 1).

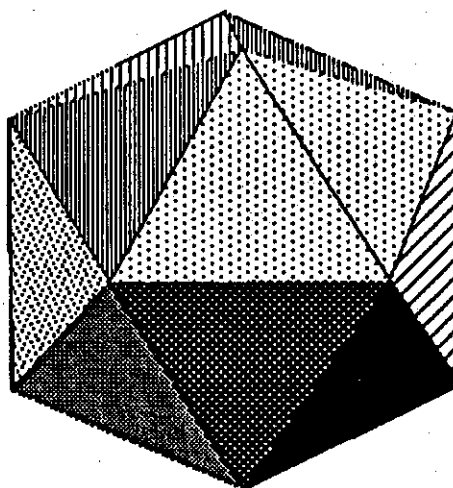
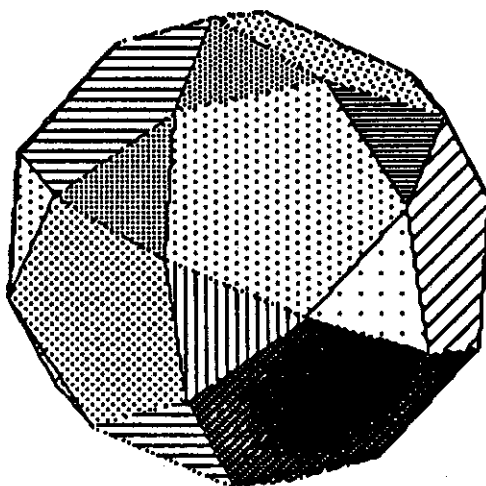


fig. 1. Un polyèdre régulier : l'icosaèdre.

*Méthodes
utilisées
dans
un
système
informatique
de
déduction
de
polyèdres
à
partir
de
propriétés
abstraites.*

Un polyèdre est **semi-régulier** (premier genre) lorsque toutes ses faces sont de polygones réguliers (non nécessairement tous égaux), et que tous les sommets du polyèdre sont identiques (on trouve la même séquence de faces autour de chaque sommet) (fig. 2).



Autour de chaque sommet on trouve la séquence de faces : triangle, pentagone, triangle, pentagone.

fig. 2. Un polyèdre semi-régulier (premier genre) : l'icosidodécaèdre.

De façon analogue, on considère aussi comme semi-régulier (deuxième genre) les polyèdres dont toutes les faces sont égales (mais non nécessairement régulières) et dont tous les sommets sont réguliers (mais non nécessairement égaux) (fig. 3).

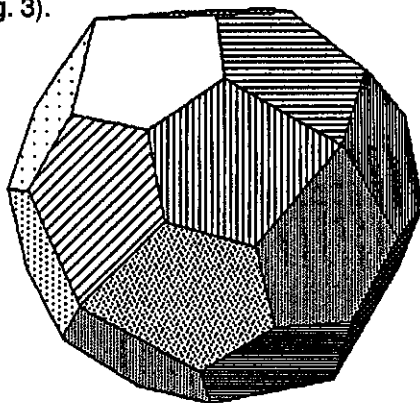


fig. 3. Un polyèdre semi-régulier du deuxième genre : l'icositétraèdre pentagonal.

Un polygone régulier peut être **étoilé** ou **convexe**, selon que ses arêtes se recoupent ou pas. Pour un polygone étoilé on appelle ordre d'étoilement le nombre de tours à effectuer autour du centre pour voir le polygone se refermer. Cet ordre est

aussi le nombre de sommets sautés pour joindre un sommet à un autre, lorsque l'on considère les sommets du polygone régulier convexe de même taille.

Un sommet d'un polyèdre archimédien peut être étoilé, croisé ou convexe, selon que les faces attachées au sommet se recoupent ou pas. En coupant un tel sommet par un plan, on obtient respectivement un polygone étoilé, croisé ou convexe.

Un polyèdre sera dit étoilé lorsque ses sommets sont étoilés ou que l'une de ses faces est étoilée. Il est convexe si toutes ses faces sont convexes et tous ses sommets aussi.

Un polyèdre régulier convexe est appelé solide de Platon (fig. 1.).

Un polyèdre régulier à faces étoilées est appelé solide de Kepler (fig. 4).

Un polyèdre régulier à sommets étoilés est appelé solide de Poincaré (fig. 5 et 6).

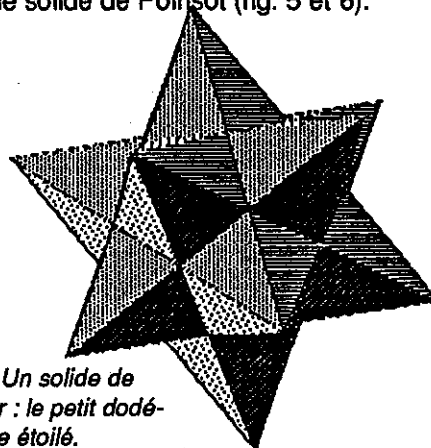


fig. 4. Un solide de Kepler : le petit dodécaèdre étoilé.

Toutes les faces sont des étoiles à cinq branches.
Les sommets sont convexes.

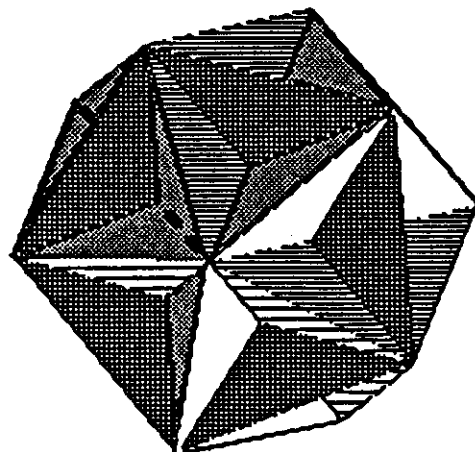


fig. 5. Un solide de Poincaré : le grand dodécaèdre.

Toutes les faces sont des pentagones réguliers qui se recoupent.
Les sommets sont étoilés.

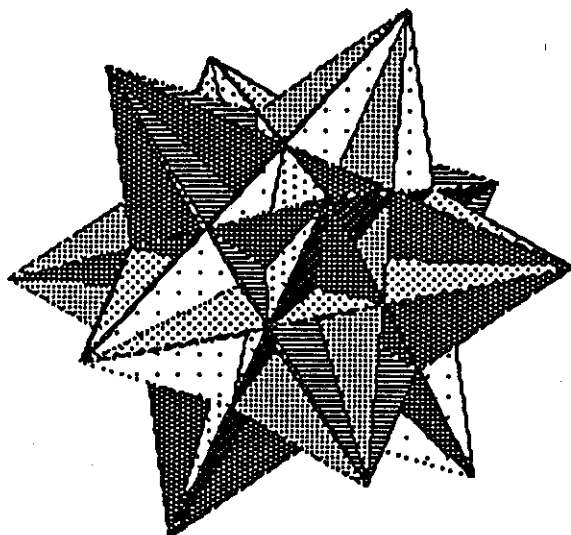


fig. 6. Un solide de Poincaré : le grand icosaèdre.

Toutes les faces sont
des triangles équilatéraux
qui se recoupent.
Les sommets sont étoilés.

La classe des polyèdres semi-réguliers convexes du premier genre comprend les polyèdres archimédiens (fig. 7), déjà connus d'Archimède, et la classe des prismes et antiprismes convexes acceptés par Kepler comme de même nature que les archimédiens. Les prismes et antiprismes sont constitués par deux bases parallèles formées de deux polygones réguliers identiques, reliées par une face latérale constituée de carrés pour les prismes, de triangles pour les antiprismes. Les polyèdres archimédiens sont au nombre de 13 (15 si l'on compte les deux modèles droit et gauche, miroir l'un de l'autre, du cube adouci et du dodécaèdre adouci). Par contre il y a une infinité de prismes et d'antiprismes, puisque les polygones réguliers sont en quantité infinie.

Un polyèdre semi-régulier convexe du deuxième genre est appelé polyèdre de Catalan. Citons l'infinité de bi-pyramides et de trapèzoèdres. Les bi-pyramides sont constituées de deux pyramides recollées par leur base polygonale régulière.

Il existe aussi de nombreux polyèdres semi-réguliers non convexes (fig. 8), dont les faces ou les sommets sont étoilés, ou croisés. En particulier, il existe une infinité de prismes et d'antiprismes à bases étoilées (premier genre) ainsi que de bi-pyramides et trapèzes étoilés (deuxième genre).

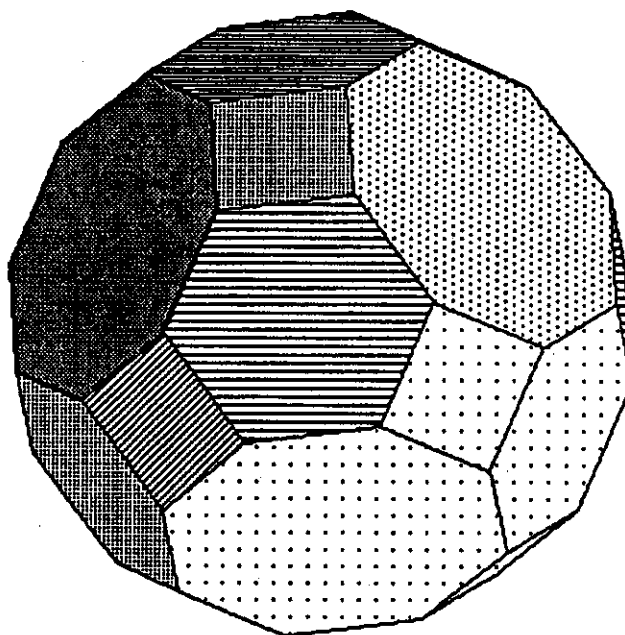


fig. 7. Un polyèdre archimédien : le grand rhombicuboctaèdre.

Autour de chaque sommet
on trouve la séquence
de faces :
carré, hexagone, octogone.

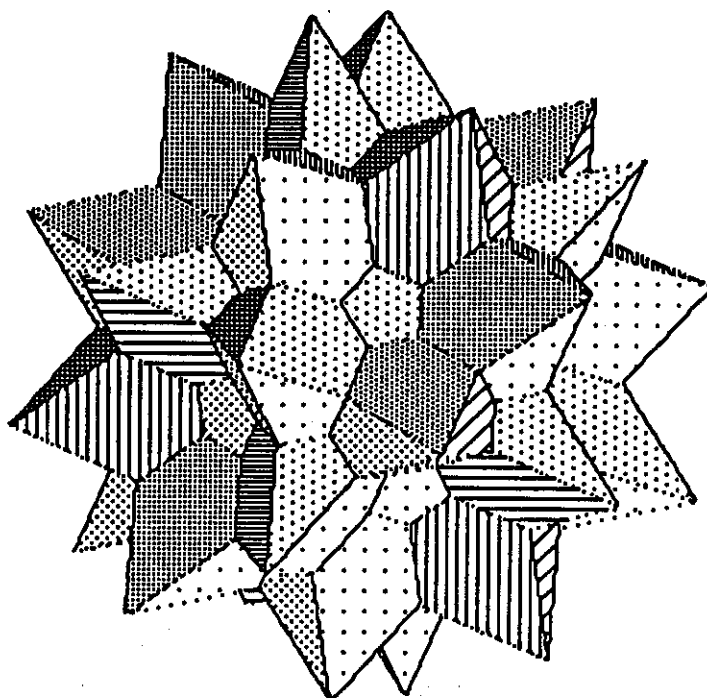


fig. 8. Un polyèdre semi-régulier non convexe du premier genre : le grand icosidodécaèdre.

Autour de chaque sommet on trouve la
séquence de faces :
triangle, étoile à cinq branches, triangle,
étoile à cinq branches.

Pour un polyèdre régulier, tous les angles dièdres sont égaux. Pour un polyèdre archimédien, les angles dièdres sont les mêmes pour deux couples identiques de faces.

Un polyèdre est appelé dual d'un autre, lorsque les sommets du premier peuvent être mis en correspondance avec les faces du second. La relation de dualité entre deux polyèdres est symétrique.

Le dual d'un polyèdre régulier est régulier. Les semi-réguliers du premier genre sont duals des semi-réguliers du deuxième genre (et vice-versa). Le dual d'un prisme est une bi-pyramide, et le dual d'un anti-prisme un trapèzoèdre.

Les semi-réguliers du premier genre sont inscriptibles dans une sphère circonscrite, c'est-à-dire que tous les sommets d'un tel polyèdre sont sur une même sphère.

Les semi-réguliers du deuxième genre admettent une sphère inscrite, c'est-à-dire que toutes les faces d'un tel polyèdre sont tangentes à une même sphère.

Fonctionnement général du logiciel de création de polyèdres.

Au départ l'utilisateur fournit de manière interactive des informations abstraites à l'ordinateur, il déclenche une déduction, et le programme calcule à partir des propriétés de départ tous les polyèdres qui vérifient ces contraintes.

Exemples simples de définition de polyèdres :

1. Propriétés :

- le polyèdre est régulier
- les faces sont des carrés

Réponse :

- le cube.

2. Propriétés :

- le polyèdre est régulier
- les faces sont des triangles
- il y a cinq faces attachées à chaque sommet

Réponse :

- l'icosaèdre,
- le grand icosaèdre.

3. Propriétés :

- le polyèdre est régulier
 - les faces sont des triangles
 - il y a cinq faces attachées à chaque sommet
 - le polyèdre est convexe
- Réponse :
- l'icosaèdre.

4. Propriétés :

- le polyèdre est régulier et convexe

Réponse :

- le cube, le tétraèdre, l'octaèdre, l'icosaèdre, le dodécaèdre.

5. Propriétés :

- le polyèdre est régulier
- les faces sont des hexagones

Réponse :

- aucun.

6. Propriétés :

- le polyèdre est semi-régulier
- la séquence de faces autour d'un sommet est triangle, étoile à cinq branches, triangle, étoile à cinq branches

Réponse :

- le grand icosidodécaèdre.

7. Propriétés :

- dual du cube adouci

Réponse :

- l'icositétraèdre pentagonal.

Techniquement, le logiciel cherche à partir des propriétés de départ à calculer des données numériques caractéristiques du polyèdre. Par exemple à partir d'une forme de face (triangle, carré, etc.) et de la propriété «régulier», le programme calcule l'angle dièdre entre deux faces. Il est alors facile de déduire à partir d'une face, toutes les faces du polyèdre. Ces calculs se font à l'aide de règles de déduction qui se déclenchent en fonction des connaissances déjà acquises par le système. Certaines de ces règles sont assez élémentaires : par exemple déduire les coordonnées de tous les sommets d'une face convexe à partir d'un sommet et du nombre de sommets. Par contre, le calcul de l'angle dièdre n'est pas aussi aisé. Nous allons montrer comment ces difficultés ont été résolues aussi bien pour les polyèdres réguliers que semi-réguliers.

Calcul de l'angle dièdre des polyèdres réguliers

Précisons tout d'abord les données du problème. Il faut disposer de connaissances aptes à fixer la valeur de l'angle dièdre du polyèdre afin d'établir un algorithme de calcul de celui-ci. Dans le cas des réguliers, la connaissance de l'angle au sommet des faces, le nombre de faces que l'on recolle autour d'un sommet, et l'ordre d'étoilement du sommet, déterminent complètement la géométrie de celui-ci.

La règle effectue le calcul de l'angle dièdre d à partir des paramètres s (angle au sommet du polygone), k (ordre d'étoilement), n (nombre de faces autour du sommet). Ces données ont elles-mêmes été calculées par d'autres règles si elles n'étaient pas fournies par l'utilisateur.

Lorsque l'on recolle des faces autour d'un sommet O , on effectue successivement deux rotations :

- l'une d'angle s dans le plan de la face,
- l'autre autour de l'arête de recollement, et d'une valeur égale à l'angle $\pi - d$.

Pour une écriture simple de ces rotations, on choisit le repère (O, x, y, z) orthonormé, l'axe Ox portant l'arête de recollement des deux faces, et l'axe Oz orthogonal au plan de la face (fig. 9).

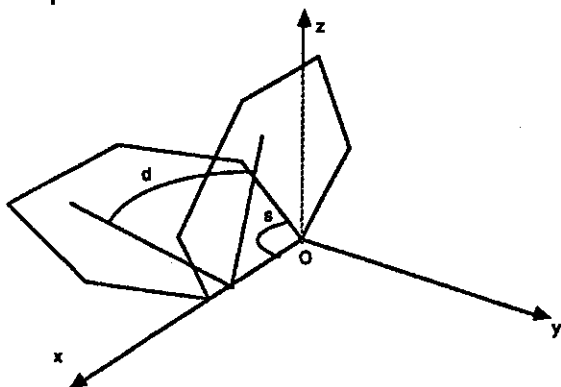


fig. 9. Calcul de l'angle dièdre de deux faces.

La matrice de cette transformation s'écrit :

$$R = \text{Rot}(\pi - d, Ox) \circ \text{Rot}(s, Oz) =$$

$$\begin{pmatrix} \cos(s) & -\sin(s) & 0 \\ -\sin(s)\cos(d) & -\cos(s)\cos(d) & -\sin(d) \\ \sin(s)\sin(d) & \cos(s)\sin(d) & -\cos(d) \end{pmatrix}$$

Dire qu'au bout d'un certain nombre de

faces recollées n , on retrouve la face initiale, signifie que cette matrice R vérifie :

$$R^n = \text{Identité} \quad (1)$$

On suppose n minimal vérifiant cette relation. Une condition nécessaire pour que la relation (1) soit vérifiée est que les valeurs propres de R soient des racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité. Le polynôme caractéristique $P(x)$ de la matrice R est :

$$P(x) = (1 - x)(x^2 - (\cos(s) - \cos(d) - \cos(s)\cos(d) - 1)x + 1)$$

La racine $x = 1$ qui correspond aux invariants dans la rotation R ne nous donne rien ; les deux autres racines sont deux complexes conjugués, dont la somme vaut d'une part :

$$\cos(s) - \cos(d) - \cos(s)\cos(d) - 1$$

et d'autre part :

$$2^* \cos(2k\pi/n)$$

somme des deux racines complexes conjuguées de l'unité.

L'entier k est compris entre 1 et $n-1$. Comme n est minimal, k doit être choisi premier avec n . Inversement, le choix d'un k premier avec n et compris entre 1 et $n-1$, donne une relation :

$$\begin{aligned} \cos(s) - \cos(d) - \cos(s)\cos(d) - 1 \\ = 2^* \cos(2k\pi/n) \end{aligned}$$

permettant de calculer l'angle d à partir de s , k et n , et solution du problème.

On obtient donc finalement :

$$\cos(d) = [-1 + \cos(s) - 2 \cos(2k\pi p/n)] / (1 + \cos(s))$$

Les recollements de faces se font par rotation d'angle $2kp/n$ autour d'un axe qui passe par le sommet. Au bout de n recollements, on a tourné d'un angle de $2k\pi$ et donc effectué k tours autour du sommet. Pour s, k, n donnés, il n'existe pas toujours une valeur pour d , le membre de droite pouvant être plus grand que 1 en valeur absolue. Dans ce cas on produit un message d'erreur.

Une fois en possession de l'angle dièdre, et disposant d'une face et d'une arête qui n'a pas encore de voisine, on est en mesure de calculer une face voisine. Par un calcul de rotation dans l'espace, on peut déduire à partir des sommets de la face connue, les sommets de la face voisine.

Donnons le détail des calculs des transformations géométriques (fig. 10).

Soit (O, i, j, k) le repère dans lequel sont exprimées les coordonnées des entités géométriques. Comme précédemment, on appelle d l'angle dièdre de deux faces. Soient : $M_1(x_1, y_1, z_1)$ et $M_2(x_2, y_2, z_2)$ les sommets de l'arête de recollement.

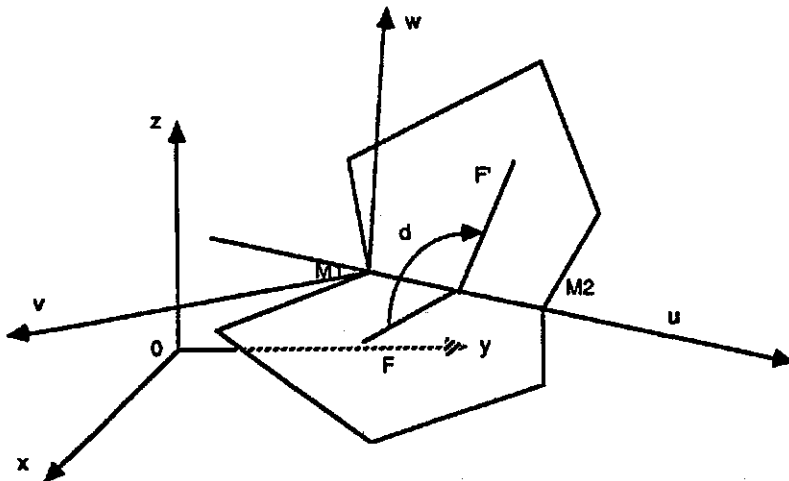


fig. 10. Calcul de la face voisine à l'aide de l'angle dièdre.

La face F' s'obtient à partir de F par rotation d'angle d autour de l'arête M_1M_2 . Pour calculer cette face, il faut déterminer l'image M' de coordonnées (x', y', z') d'un point M de coordonnées (x, y, z) quelconque. Dans un repère orthonormé (M_1, u, v, w) dont l'un des axes est

$u = M_1M_2 / \text{norme}(M_1M_2)$, la rotation s'écrit :

$$\text{Rot} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(d) & -\sin(d) \\ 0 & \sin(d) & \cos(d) \end{vmatrix}$$

Pour obtenir M' dans le repère (O, x, y, z) , on applique les transformations suivantes :

- une translation de vecteur OM_1 ,
- un changement de base unitaire de (O, i, j, k) vers (O, u, v, w) ,
- la rotation Rot ,
- un changement de base unitaire de (O, u, v, w) vers (O, i, j, k) ,
- une translation de vecteur M_1O .

Exprimons la matrice P de changement de base.

On calcule d'abord u comme indiqué :

$$\begin{aligned} \vec{M_1M_2} &= (x_2 - x_1) \cdot i + (y_2 - y_1) \cdot j + (z_2 - z_1) \cdot k \\ &= a \cdot i + b \cdot j + c \cdot k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= M_1M_2 / \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ &= u_1 \cdot i + u_2 \cdot j + u_3 \cdot k \end{aligned}$$

On pose $s = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

P s'écrit :

$$\begin{vmatrix} u_1 & -u_2/s & -u_1u_3/s \\ u_2 & u_1/s & -u_2u_3/s \\ u_3 & 0 & s \end{vmatrix}$$

Comme cette matrice est unitaire, son inverse est simplement la transposée.

Le cas particulier où s est nul signifie que l'arête M_1M_2 est parallèle à l'axe Oz .

Dans ce cas la rotation s'effectue directement autour de Oz , sans nécessité de changement de base. Elle s'écrit donc :

$$\text{Rot} = \begin{vmatrix} \cos(d) & -\sin(d) & 0 \\ \sin(d) & \cos(d) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

que l'on doit composer avec la translation seulement.

Il est important d'engendrer les faces toujours de la même façon, et spécialement de respecter leur orientation. Les calculs de rotation dans l'espace sont conduits de façon à engendrer une face voisine dont l'arête de recollement est orientée en sens inverse de l'arête sur laquelle on recolle. Les coefficients du plan de la face sont eux aussi choisis de manière à fournir une normale orientée toujours de la même façon, ce qui est utile pour la visualisation par exemple. Cette règle met aussi à jour la valeur du centre de la face déduite. Cette information est utile pour le calcul du polyèdre dual.

Calcul des angles dièdres des polyèdres semi-réguliers du premier genre

Contrairement au cas des polyèdres réguliers, l'angle dièdre entre deux faces adjacentes n'est pas toujours le même. Cependant comme nous l'avons mentionné, il est possible de démontrer qu'un poly-

èdre semi-régulier est inscriptible dans une sphère. Il en résulte que si l'on considère un sommet, la connaissance de la séquence de faces recollées autour de ce sommet et de son ordre d'étoilement, définit de manière unique la géométrie du sommet, et donc tous les angles dièdres entre chaque couple de faces. Comme pour un polyèdre semi-régulier, les sommets sont identiques, on est alors capable de calculer la totalité de celui-ci.

Nous appelons angle au sommet du polyèdre, l'angle d'une arête issue d'un sommet avec la droite passant par ce sommet et le centre du polyèdre. Dans un premier temps nous établissons d'abord la relation qui relie l'angle au sommet s avec les autres données du polyèdre. Ensuite le calcul des angles dièdres s'effectue facilement à partir de s .

Sur le schéma de la figure 11 les points O, A, B, C sont des sommets du polyèdre, et donc sont situés sur une sphère. O désigne le sommet du polyèdre autour duquel sont recollées les faces. OA, OB, OC sont trois arêtes appartenant à deux faces voisines du polyèdre, et attachées en O. Soit O' le point d'intersection du plan passant par A, B, C, et perpendiculaire au rayon de la sphère circonscrite au polyèdre et passant par O. Les angles au sommet des faces de plan AOB et BOC sont notés respectivement α et β , tandis que leurs projections sur le plan O'AB sont notées α' , β' . L'angle t est celui que fait le plan O'AB avec les arêtes OA, OB, OC du polyèdre.

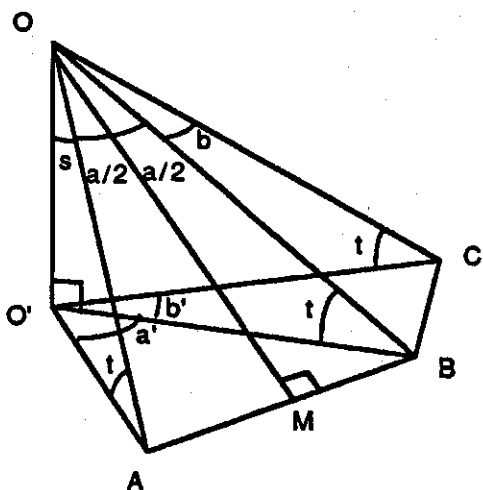


fig. 11.

On a

$$\sin(a/2) = AM/OA$$

et

$$\sin(a'/2) = AM/O'A$$

done

$$\sin(a/2)/\sin(a'/2) = \sin(b/2)/\sin(b'/2) \\ = \dots = \cos(t) = \cos((\pi/2)-s) = \sin(s)$$

On en déduit :

$$\sin(a'/2) = \sin(a/2)/\sin(s)$$

ei

$$a' = 2 \cdot \text{ArcSin}(\sin(a/2)/\sin(s))$$

De même pour b' , c' , etc.

La somme des a' , b' , c' , ... ainsi obtenue est égale à un nombre entier de tours soit $2k\pi$, où k est l'ordre d'étoilement du polyèdre.

On a donc la relation :

$$k\pi = \text{ArcSin}(\sin(a/2)/\sin(s)) + \text{ArcSin}(\sin(b/2)/\sin(s)) + \dots$$

Ce qui permet d'avoir une relation entre les angles au sommet des faces et l'angle s du polyèdre. Il faut en déduire une valeur de s si elle existe. Pour cela on considère la fonction

$$f(x) = k\pi - (\text{ArcSin}(\sin(a/2)/x) + \text{ArcSin}(\sin(b/2)/x) + \dots)$$

Trouver s revient à trouver les zéros de f . L'étude de cette fonction montre qu'elle est définie sur $[\text{Max} .. 1]$, où Max représente le plus grand nombre entre $\sin(a/2)$, $\sin(b/2)$, ...

La courbe de f est monotone croissante. Pour trouver les zéros de f on utilise la méthode de Newton. Comme la courbe est monotone croissante (fig. 12), de concavité tournée vers le bas, on est assuré de la convergence en prenant un point de départ situé entre la valeur «Max» et la racine, point caractérisé par une valeur de f négative.

On recherche pour le point de départ la première valeur de f négative en effectuant une dichotomie sur l'intervalle $[Max ..1]$. La somme des angles au sommet de chaque face doit être inférieure à $2k\pi$, puisqu'en projection cette somme est égale à $2k\pi$. Donc $f(1)$ est obligatoirement positif. Pour que la racine s existe, il faut donc que $f(Max)$ soit négatif. Lorsque la fonction f ne change pas de signe sur $[Max ..1]$, il n'existe aucune valeur de s . Il y a impossi-

bilité de construire le polyèdre dans ce cas. Un message d'erreur est alors produit.

A partir de l'angle s , on peut calculer le point A, puis avec les angles au sommet des faces, on détermine B et C. Les vecteurs OA, OB, OC donnent des vecteurs normaux aux plans OAB et OBC, et le

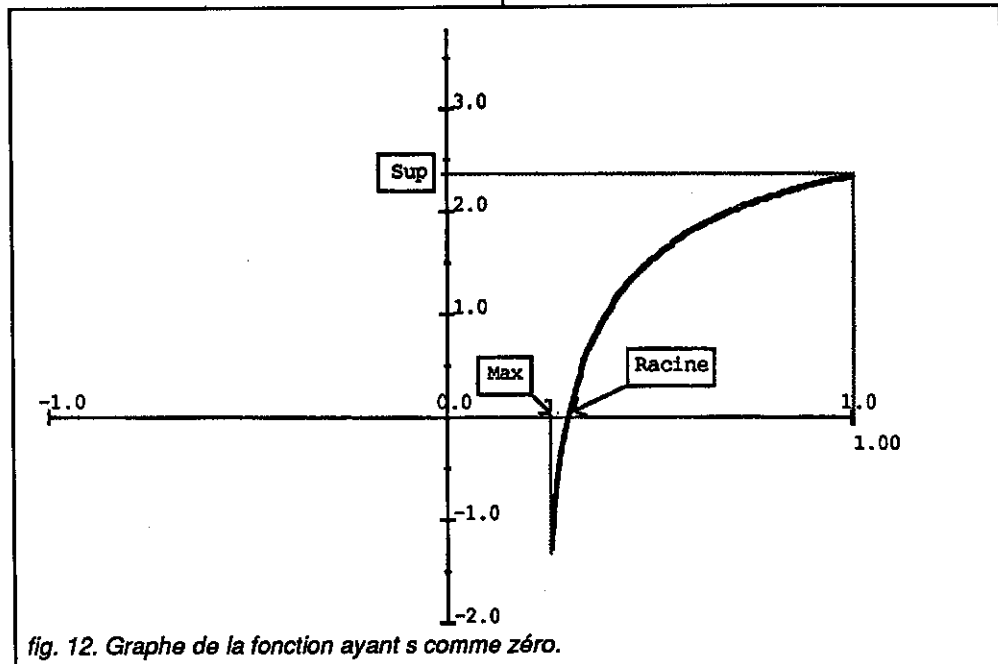


fig. 12. Graphe de la fonction ayant s comme zéro.

produit scalaire de ces vecteurs normaux donne le cosinus de l'angle dièdre. Les angles au sommet des faces sont non orientés, donc toujours positifs.

Pour initialiser le calcul, on peut par exemple prendre A de coordonnées $(OA \cdot \sin(s), 0, OA \cdot \cos(s))$

Les coordonnées de B sont obtenues en écrivant qu'il se déduit de A par rotation d'angle a' autour de OO' :

$$(OA \cdot \cos(a') \cdot \sin(s), OA \cdot \sin(a') \cdot \sin(s), OA \cdot \cos(s))$$

Et C s'obtient de manière analogue par une nouvelle rotation d'angle b' autour de OO' .

Pour le calcul du cosinus et du sinus de l'angle a' , on utilise les formules trigonométriques suivantes :

$$\sin(a') = 2\sin(a'/2)\cos(a'/2)$$

$$\cos(a') = 1 - 2\sin^2(a'/2)$$

ainsi que la relation établie précédemment :

$$\sin(a'/2) = \sin(a/2)/\sin(s).$$

Conclusion

Ce travail comporte bien des aspects non mentionnés, et en particulier l'aspect informatique qui n'est pas abordé ici. Toutes les images de polyèdres ont été obtenues par le logiciel PolyForme, en cours de développement sur Macintosh. Il comporte actuellement une centaine de règles de déduction permettant d'explorer les formes polyédriques citées dans le texte. Il nous a semblé intéressant de présenter cette facette mathématique de notre travail pour plusieurs raisons. D'une part il est remarquable de voir que des problèmes, d'énoncés fort simples, peuvent amener à des difficultés mathématiques non négligeables, et même aboutir à des problèmes impossibles à résoudre de manière exacte et nécessitant l'utilisation de méthodes numériques. D'autre part, on trouve très peu d'informations concrètement utilisables pour le calcul des paramètres des polyèdres remarquables. L'attrait et la richesse des images obtenues met bien en évidence que les méthodes employées ne sont pas uniquement de pures abstractions. ■

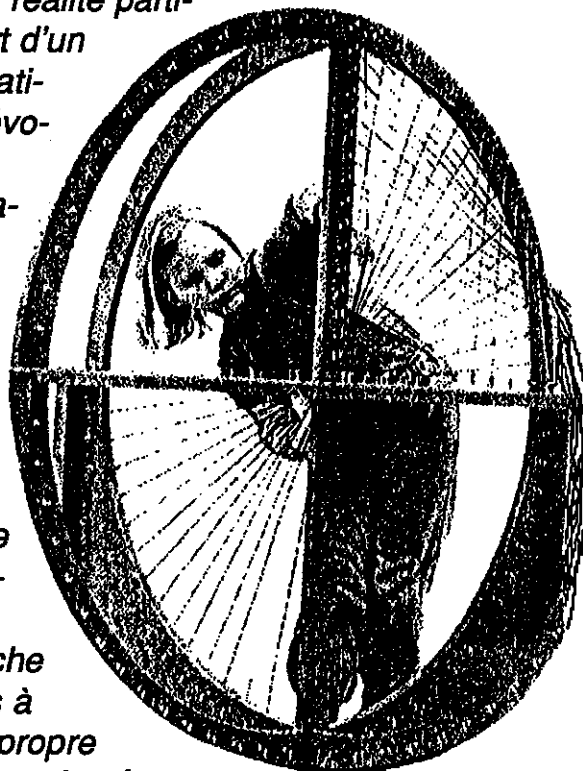
Démonstration, perception et évocation

A. Taurisson.Toulouse

Faire des mathématiques part d'une évocation de la réalité particulière au mathématicien⁽¹⁾, tout comme dessiner part d'un regard particulier de l'artiste. Enseigner les mathématiques consiste en grande partie à développer cette évocation différente.

À l'intérieur de l'activité mathématique, la démonstration joue un rôle clé. Pourtant l'enseignement de la démonstration est une des tâches les plus difficiles. La démonstration ne demande pas seulement de faire, mais de se regarder faire. Elle demande à la fois d'utiliser ce qu'on voit mais aussi de voir plus, autre chose et autrement. Elle demande à la fois imagination et maîtrise totale de sa démarche et de son expression. Au delà de la conviction personnelle elle impose l'obligation de convaincre l'autre par l'intermédiaire d'un langage particulier.

Dans cet article, je vais tenter de décrire une approche de la démonstration qui viserait à amener les élèves à développer cette évocation particulière de la réalité propre au mathématicien, à l'utiliser et à «gérer mentalement» les étapes essentielles de la démonstration. Auparavant je dois définir quelques termes que j'emploierai par la suite.



(1) par mathématicien, je veux dire élève qui veut faire des mathématiques.

Évocation, perception, gestes mentaux.

Les définitions que je vais en donner proviennent directement des travaux d'Antoine de la Garanderie.²

Perception et évocation

Le sens donné dans la suite à ces deux mots ne correspond pas au sens qu'on leur donne souvent dans la littérature.

-je me promène dans la rue, mon regard passe sur ce qui m'entoure. Je ne recherche rien de particulier. Ce regard va peut être laisser en moi, entre autres, des traces visuelles. Ces impressions visuelles sont le résultat de la perception que j'ai eu de la rue dans laquelle je me trouvais.

-Imaginons que je sois dans la même rue et que je veuille savoir quand cette rue a été construite. Je regarde la rue mais je reviens activement sur ce que je perçois pour trouver des indices qui vont me permettre de dater ces maisons. Ce retour actif sur ce que je perçois constitue une évocation. Il nous est tous arrivé de lire un article d'un journal sans avoir la moindre idée de son contenu. La perception de l'article s'est faite, mais le retour actif sur ce qui a été lu ne s'est pas fait et nous n'avons pas pris conscience du sens. Quand nous lisons quelque chose de facile et d'habituel, l'évocation se fait sans effort et presque instantanément. Dès que le texte est plus difficile, le temps de l'évocation est plus nettement distingué du moment de la perception.

Au moment de l'évocation, ce qui est perçu est transformé: un texte peut être trans-

(2) en particulier dans "Les profils pédagogiques" Le Centurion - Paris

formé en images visuelles, un schéma est décrit par une voix intérieure, la sienne propre ou celle d'un autre. La lecture se trouve doublée par la voix de celui qui lit, les images qui traversent l'esprit peuvent représenter directement ce qui est lu mais elles peuvent naître aussi d'associations génératrices d'une certaine signification. La compréhension provient toujours de cet écho construit et non pas simplement d'un calque de la réalité. Le sens apparaît au moment où l'évocation produit un objet mental, une représentation qui n'est pas une impression laissée par l'objet réel mais une reconstruction mentale effectuée à partir de l'impression laissée par la perception.

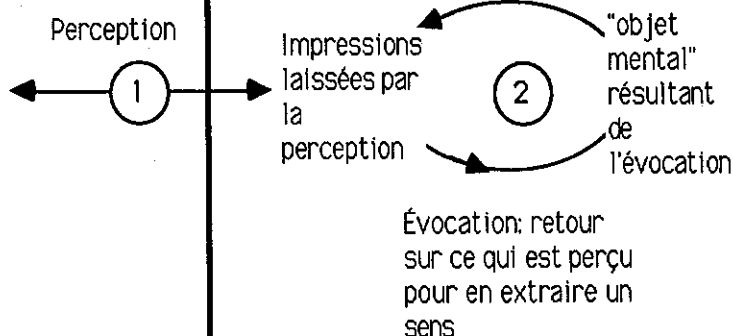
que j'ai apprise la veille: autant de gestes mentaux très élémentaires qui me permettent de rattacher «3 fois 5» à quelque chose de familier. A. de La Garanderie définit un geste mental comme un mouvement structuré de l'esprit, mouvement portant sur des images, des mots, des sons. Ce «mouvement de l'esprit» permet d'effectuer de transformer des objets mentaux, de les associer de les comparer. On peut parler de transformations virtuelles sur des objets mentaux. Un geste mental peut donc porter sur l'impression laissée par la perception, mais aussi porter aussi sur un ou plusieurs «objets mentaux».

L'importance de la nature du geste mental.

Voici une expérience simple qui nous montre l'importance de la nature du geste mental sur ce que nous comprenons; prenons un texte et lisons-le à voix haute à un élève de la façon suivante: après chaque membre de phrase significatif, arrêtons-nous et demandons lui de faire une évocation visuelle de ce qui vient d'être lu. Une fois le texte terminé, demandons-lui de nous redire le texte. Faisons ensuite une lecture du même genre de ce texte mais en demandant à l'élève cette fois d'écouter dans le silence qui suit chaque partie lue une voix redire ce qui vient d'être lu. Demandons ensuite à l'élève de raconter l'histoire. Terminons par une troisième lecture du texte en demandant cette fois à l'élève de se laisser aller à associer librement dans le silence qui suit chaque membre de phrase lue. Demandons encore de nous redire le texte. Chaque évocation différente apporte des éléments de compréhension différents. Pour certains élèves une ou deux des évocations précédentes ont été inutiles. Pour d'autres elles se complètent parfaitement. Certains élèves vont même garder des éléments complètement différents des deux premières lectures et ne pas faire le lien entre les deux formes d'évocation. Ce petit exercice permet de mettre en évidence les différences individuelles d'une part et le rôle de la nature de l'évocation sur la compréhension: la compréhension s'appuie sur ce qui est évoqué et non pas sur ce qui est perçu. L'évocation étant un processus individuel, il faut apprendre à chacun à pratiquer l'évocation la plus effi-

Monde extérieur

Monde intérieur



La prise de conscience du sens se fait au temps 2, c'est à dire au moment du retour sur ce qui est perçu, les objets mentaux construits à cette occasion peuvent être de nature très différente des objets perçus.

Un geste mental

Au moment d'évoquer, on peut se donner l'image visuelle de ce que l'on entend. Ce mouvement de l'esprit constitue un geste mental. Alors que j'écoute quelqu'un parler, je peux me réexprimer à partir de mon vocabulaire ce qu'il dit, et le rattacher à mon expérience personnelle. Voici un autre geste mental. Alors que j'entends «3 fois 5», je me donne l'image de 3 rangées de cinq carrés, ou je me redis mentalement 3 fois en écoutant le son imaginé de ma voix, ou je me redonne l'image de la table par 3

cace pour lui. Le but de l'intervention pédagogique est d'amener les élèves à évoquer ce qu'on leur donne à percevoir.

Le rôle de l'intention.

C'est l'intention qui nous permet d'agir sur l'évocation que l'on fait de la réalité: la lecture d'un texte pour en faire un résumé va conduire à un travail mental fort différent de celui auquel nous conduirait la lecture du même texte avec l'intention de jouer du rythme de la phrase. On sait bien en mathématiques que des élèves ayant une très bonne capacité de compréhension en français semblent incapables de donner le moindre sens au texte d'un problème. Ils se jettent sur la première opération venue en faisant confiance à leur étoile parce qu'il n'ont pas la même intention en français et en mathématiques: en français on doit comprendre pour répondre à des questions sur le sens et en mathématiques on doit faire une opération juste. L'intention de lecture qu'ils ont en mathématiques fait qu'ils ne peuvent comprendre l'énoncé du problème. L'intention peut être beaucoup plus précise: je vais lire ce texte pour me le raconter, pour le voir comme à la télé, pour le résumer sous forme de schéma etc... Ces intentions plus précises peuvent conduire à des compréhensions plus particulières et surtout peuvent être adaptées à un individu plutôt qu'à un autre.

Reformulation du problème de l'enseignement de la démonstration en terme de gestion mentale.

Ce préambule permet de reformuler de façon plus précise notre approche de la démonstration.

- Pour démontrer, quelle intention doit avoir un élève.
- Comment l'amener à avoir cette intention.
- Quelles sont les caractéristiques de «l'évocation mathématique» et comment la provoquer
- Comment poser un problème de démonstration en termes d'évocation particulière

de la réalité, -Comment avoir l'idée d'une solution.

-Comment «enseigner» pour permettre à chacun de pratiquer l'évocation mathématique qui lui convient.

-Quels sont les gestes mentaux qu'un élève doit faire pour mener à bien une démonstration.

Je vais présenter d'abord quelques activités dont le but est d'amener l'élève préciser les caractéristiques propres de l'activité mathématique et à développer «l'évocation du mathématicien». Ensuite je tenterai la présentation de la démonstration d'un théorème vu en quatrième en m'appuyant sur cette intention de l'élève et sur cette évocation. Je m'en tiendrai à des exemples tournant autour de la symétrie centrale et mettant en jeu des parallélogrammes.

Qu'est-ce que l'activité mathématique?

Si les élèves pensent que «faire des maths» c'est seulement calculer et produire des résultats, il est inutile de leur parler de démonstration. Il va d'abord falloir leur enseigner que l'activité mathématique c'est aussi autre chose. Voici quelques activités et une possible façon de les gérer en classe devant permettre aux élèves de prendre conscience de ce que peut être l'activité mathématique.

Présentation en quatre temps

Quand nous aurons un point important à présenter aux élèves, dans le but d'amener les élèves à évoquer ce qu'on leur dit ou leur montre, nous le ferons en distinguant 4 temps dans la présentation.

(1)-On présente aux élèves, dans le silence, de courts textes ou des schémas sur le retroprojecteur. On leur demande de les regarder avec l'intention de les reproduire ensuite sur leur cahier.

(2)- On masque le retroprojecteur après une quinzaine de secondes et on demande à ce moment là seulement d'écrire ou de dessiner sur le cahier. Ce qui est reproduit sur le cahier n'est pas forcément le décalque de ce qui était sur le retroprojecteur. Ce peut être une interprétation per-

sonnelle de l'élève

(3)-On découvre de nouveau le rétroprojecteur pour que les élèves puissent comparer le sens du message initial et l'interprétation qu'ils en ont donné.

(4)-Ensuite l'enseignant peut poser des questions ou commenter ce qui a été montré.

Cette activité de mémorisation à court terme demande à l'élève de se donner un codage mental personnel de ce qu'on lui présente (1) et de vérifier qu'il est bien conforme à la réalité (3). Ceux qui pratiquent des évocations plus visuelles peuvent profiter du silence et de l'image [temps (1)] pour s'en faire une représentation mentale visuelle. Les autres pourront en faire une traduction verbale qu'ils préciseront au [temps (4)]. Le processus de compréhension pourra partir dans les deux cas d'une évocation de la réalité qui corresponde à chaque type d'élève.

Activités d'exploration

L'activité suivante peut être présentée à partir de la sixième. Il s'agit de trouver une méthode pour calculer l'aire d'un parallélogramme. Ce problème a déjà été abordé au primaire, aussi faut-il bien préciser aux élèves le but du travail : il s'agit de comprendre comment un «mathématicien» agit, ce qui est important pour lui, ce qu'il recherche et ceci dans le but d'avoir l'intention de travailler comme lui pour résoudre certains problèmes.

On peut présenter «en quatre temps» le texte suivant:

On sait calculer l'aire d'un rectangle. En utilisant seulement cette connaissance, comment calculer l'aire d'un parallélogramme?

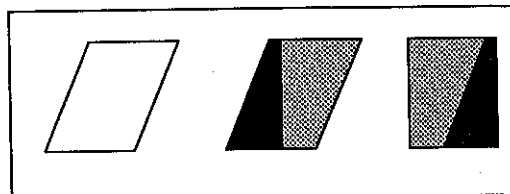
Ensuite, de la même façon:

Une autre façon de reformuler le même problème.
Comment transformer un parallélogramme en un rectangle de même aire?



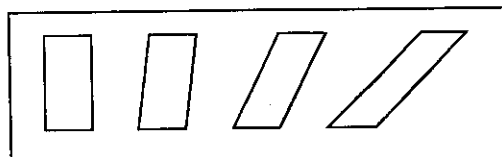
On précise ensuite oralement le but de l'activité que l'on va entreprendre.

Le problème ayant été résolu dans des classes inférieures, on peut se borner à présenter «en quatre temps» l'image suivante:



Le commentaire consiste à animer ces trois images et à imaginer que le parallélogramme est coupé et que les deux morceaux sont permutés. On fera préciser comment le partage en deux se fait: perpendiculairement à la base. On a donc, semble-t-il, un bon moyen de transformer un parallélogramme en rectangle.

Demandons maintenant de combien de façon on peut faire subir la transformation précédente à chacun des parallélogrammes suivants:



On demande aux élèves de faire la transformation mentalement et de n'avoir recours au papier-crayon que pour vérifier et ceci dans le but de manipuler mentalement des transformations visuelles.

-Le premier parallélogramme est aussi un rectangle. Il y a une infinité de façon de faire une transformation au demeurant inutile pour faire un calcul d'aire.

-Il y a aussi une infinité de façon de couper le second.

-Il n'y a qu'un façon de couper le troisième.

-On ne peut faire subir au dernier la même transformation.

-On verra que même en sixième ou en cinquième un certain nombre d'élèves s'arrangeront pour couper le dernier parallélogramme en «oubliant» la perpendicularité à la base.

La recherche du procédé le plus général possible

Le procédé que nous avons trouvé n'est donc pas général. Bien sur, on pourrait retourner le parallélogramme et se débrouiller, mais en temps que «mathématiciens» nous préférierions trouver un procédé général, donc plus simple, qui nous permettrait dans tous les cas de transformer un parallélogramme en un rectangle d'aire équivalente.

Nous avons à faire à une très grande difficulté chaque fois que l'on résout un problème: comment se dégager de la solution que nous avons envisagée pour en trouver une nouvelle, à partir de considérations sans doute complètement différentes.

Il nous faut «regarder» le problème d'une autre façon.

L'évocation ou l'œil de l'artiste

Repartons du point de départ: un parallélogramme et le rectangle équivalent dans un cas où nous savons le construire. Plaçons-les côte à côte. Le rectangle a été obtenu à partir du parallélogramme par découpage. Les bases et les hauteurs des deux figures sont donc égales.



Le spectateur ordinaire voit deux figures. Il leur donnera des noms: un rectangle, un parallélogramme. Il en restera là. C'est là que peut entrer en jeu «l'œil de l'artiste». L'intuition, la «créativité» dans la démarche mathématique est souvent de nature visuelle. Pour trouver quelque chose de nouveau, il faut «voir» d'une autre façon. Cette vision nouvelle n'est pas dans les objets eux-mêmes mais dans l'évocation que l'on fait de ces objets. L'évocation d'un artiste a ses caractéristiques propres: par exemple pour reproduire l'image précédente non seulement il faut regarder les formes noires, mais aussi les espaces

«négatifs» entre ces formes. Pour faire un dessin exact, il faut voir le trapèze entre les deux formes noires. C'est lui qui nous permet de placer les deux formes l'une par rapport à l'autre.

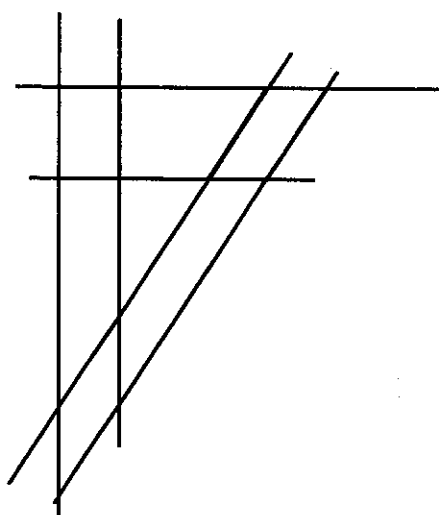


Cette évocation se fait en regardant le dessin globalement et en se laissant aller à voir des formes autres que celles qui sont nommées. Ce «regard» se fait souvent sans parler en se laissant pénétrer par les formes et les rapports des lignes entre elles.

On peut alors voir d'autres parallélogrammes dans cette figure:



On peut aussi «laisser les lignes se prolonger». Apparaissent alors 3 couples de droites parallèles.



Les formes initiales se sont dissoutes. Les lignes qui ne faisaient que souligner les contours deviennent les éléments principaux du dessin.

Cette évocation de la réalité est bien la même que celle d'un dessinateur qui pour dessiner un œil, cesse de voir l'œil pour ne voir que l'entrecroisement des lignes qui le compose, ou encore va dessiner autant les espaces négatifs que les formes elles-mêmes. Pour provoquer cette évocation de l'artiste dessinateur, on peut par exemple retourner un dessin que l'on veut reproduire, le dessin n'est plus qu'un réseau de lignes et les formes identifiables disparaissent. Le dessin effectué ainsi à l'envers est d'une qualité bien supérieure au dessin fait à partir du modèle à l'endroit.³ Retourner le dessin à reproduire force à évoquer non plus en reconnaissant les objets, comme un spectateur, mais comme le fait un dessinateur.

Peut-être certaines de ces formes construites à partir du dessin initial ne nous aideront pas. Elles constituent en tout cas un nouveau matériel, plus riche que le dessin initial.

Dans une classe, on peut guider une telle recherche en fixant le but: on recherche des formes nouvelles à partir de la représentation initiale. Ces formes nouvelles nous aiderons à faire des liens.

On donne quelques moyens d'y parvenir:

-On place le dessin initial devant soi. On tente de s'en imprégner globalement et de laisser les formes apparaître sans se parler.

-Si cela paraît impossible ou très difficile, ajouter des lignes au dessin initial puis le regarder globalement, ajouter d'autres lignes et le regarder à nouveau. Dès que le dessin est trop chargé, refaire le dessin initial et recommencer.

On peut résumer à la fois le but poursuivi et les moyens utilisés en disant que l'on observe la figure avec «l'œil de l'artiste». On fait ensuite le bilan des formes trouvées.

L'enseignant sait où il veut mener sa classe. Il a besoin des trapèzes pour mettre en



évidence une relation entre le parallélogramme et le rectangle. Il va donc sélectionner ces deux figures et simplement indiquer qu'elles vont nous être utiles:



Ensuite sur un retro-projecteur, on place la figure ci-dessous:



Sur une autre feuille transparente, on a dessiné le trapèze ci-dessus en noir.



On fait glisser cette deuxième feuille sur la première dans un mouvement de va-et-vient de la façon suivante:



Pendant ce glissement sans rotation le trapèze noir découvre alternativement le rectangle et le parallélogramme. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que les bases du parallélogramme et du rectangle soient de même longueur.

Certains vont bien *sentir* que l'on établit ainsi une relation entre le rectangle et le parallélogramme. Elle demeure cependant incertaine pour la plupart des élèves. On leur demande de tenter de la formuler. Bien peut-être vont-ils pouvoir le faire.

-On donne des noms aux aires respectives des rectangle, parallélogramme et trapèze, soit R, P, et T.

L'aire perçue sur le dessin (1) est $T + P$

L'aire perçue sur le dessin (3) est $R + T$

Dans les deux cas, l'aire $T + P$ comme l'aire $R + T$ est égale à l'aire de la figure formée par la réunion du rectangle, du parallélogramme et du trapèze les reliant.

On peut présenter le schéma suivant en « quatre temps » pour amener les élèves à prendre conscience de cette relation.

l'œil du spectateur, qui voit des objets et des actions à une autre évocation de la même réalité, une évocation qui cherche à rendre explicite des relations que le spectateur n'éprouve pas le besoin de clarifier.

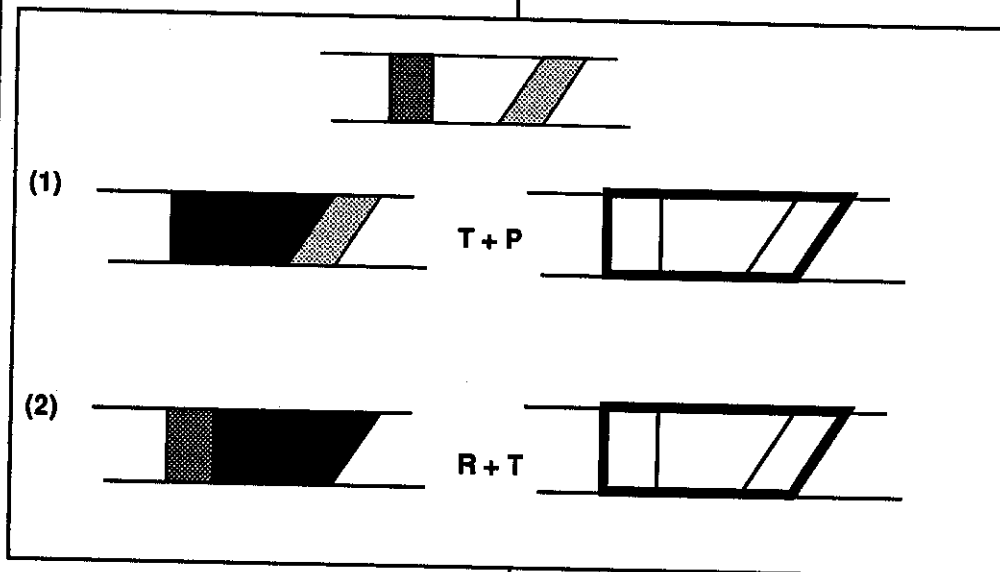
Pour forcer le passage de l'œil du spectateur à cet œil naissant du mathématicien, on peut poser des questions du genre::

-Pourquoi le mouvement du trapèze dégage-t-il tout le rectangle quand il cache tout le parallélogramme et inversement?

-Comment décrire le parallélogramme en fonction des éléments du rectangle?

-Que nous apporte le calcul par rapport à la simple observation du mouvement?

Nous venons de trouver un autre moyen d'associer l'aire du rectangle et celle du parallélogramme sans avoir recours au découpage: ce moyen est-il plus général? Quelque soit le parallélogramme, on peut maintenant lui associer un rectangle d'aire égale



Ceci fait, on peut écrire:

$$T + P = R + T$$

Ou encore

$$T + P = T + R$$

Ce qui entraîne

$$P = R$$

Cette représentation symbolique de la situation (1) et (2) et le calcul qui suit permet de faire le lien entre le déplacement du trapèze et l'égalité des aires du rectangle et du parallélogramme. La traduction symbolique ne garde que l'essentiel et permet de mettre en évidence l'équivalence des aires. Nous sommes passés de

**Vers une généralisation plus grande:
à quoi notre nouvel outil pourrait-il servir?**

Une des caractéristique de l'activité mathématique est de tendre à une généralisation la plus grande possible des résultats obtenus. Notre but comme enseignant est que les élèves intègrent cette intention dans leur «projet» quand ils font des ma-

thématiques. C'est cette quête de généralisation qui nous a conduit à rechercher un autre moyen que le découpage pour transformer le parallélogramme en rectangle. On peut maintenant se demander si le procédé que l'on vient de trouver ne s'appliquerait pas à une classe plus grande de figures que les parallélogrammes.

Le procédé que nous venons de trouver consiste à cacher le parallélogramme pour dégager le rectangle et inversement. Peut-on modifier la forme de notre «cache» et transformer d'autres figures que le parallélogramme en rectangle?

Au lieu de ce «cache»....



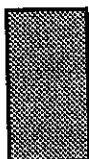
...on peut imaginer un cache ayant cette forme:



Quelles sont maintenant les figures transformables en rectangles?

On peut poser la question aux élèves et leur demander de décrire cette classe de figures.

À partir de ce nouveau cache, on peut faire l'association entre ces deux figures:



Quel cache faudrait-il construire pour trouver le rectangle équivalent à cette figure?



Comment décrire les figures dont l'aire peut se ramener à celle d'un rectangle par le procédé précédent?

Là encore, à partir de l'œil du spectateur, le mathématicien va tenter de voir des relations ou des transformations virtuelles qu'il pourra énoncer: pour cela, il lui faudra généraliser la notion de parallélisme des droites à des courbes non rectilignes, définir la hauteur de cette classe de figures «bizarres» pour le spectateur.

Les moyens pour arriver à exprimer ces relations ou ces définitions peuvent être différents d'un élève à l'autre: certains par exemple exprimeront le parallélisme à partir de la transformation qui a permis de générer les deux côtés non rectilignes de la figure. D'autres seront gênés par le mouvement et voudront faire une description de la figure telle qu'elle est sans référence au mouvement. Certains auront besoin de garder la figure devant eux et de la raconter. D'autres au contraire devront enlever la figure de leur vue et en décrire l'image qu'ils auront intériorisée. Toutes ces différences dans la manière de trouver des énoncés à propos d'une figure donnée dépendent largement de la nature des évocations faites par les élèves. Ce travail est le premier pas vers la formation de l'œil du mathématicien.

(à suivre)

L'EVOLUTION HISTORIQUE DES DESSINS

Bernard PARZYSZ - Paris

L'EVOLUTION HISTORIQUE DES DESSINS DANS LES OUVRAGES DE GEOMETRIE DE L'ESPACE

Les dessins de géométrie, tels qu'ils figurent actuellement dans les manuels de l'enseignement secondaire long, offrent de telles analogies, à la fois horizontalement (d'un ouvrage à l'autre) et verticalement (dans le temps), qu'il n'est pas exagéré de parler à leur propos de représentations stéréotypées (voir à ce sujet BERDONNEAU 1981, p. 62 sq.). Ceci vaut bien sûr, en particulier, pour les dessins de la géométrie de l'espace (PARZYSZ 1989, p. 53 sq.), et cette «tradition» iconographique remonte en l'occurrence au moins à la fin du 19^e siècle. Les dessins relatifs à l'espace ressortissent sans ambiguïté à la perspective parallèle, même si certains (PARZYSZ 1989, p. 70 sq.) s'en écartent parfois, volontairement ou non (certains auteurs ont parfois recours à des effets de «pseudo» perspective linéaire, et une bonne part des représentations relatives aux corps ronds «mélangent divers points de vue» : voir plus loin).

Puisque tradition il y a donc, il peut être intéressant de rechercher les éléments sur lesquels s'appuie cette tradition, et en conséquence de s'intéresser aux dessins, relatifs à l'espace, figurant dans les livres anciens. L'étude qui suit est basée sur 17 ouvrages, édités entre 1600 et 1900, dont voici la liste dans l'ordre chronologique (dans la suite, ils seront simplement désignés par la date de leur parution, entre crochets) :

- 1605 Charles de BOUELLES : *Géométrie pratique*. Ed. D. Cavellat, Paris.
- 1658 Alphonso BORELLI : *Euclides restitutus, sive prisca geometriae elementa, brevius et facilius contexta...* Ed. F. Honophri, Pise.
- 1660 Stephano degli ANGELI : *Miscellaneum geometricum*. Ed. J. La Noù, Venise.
- 1675 François MILLIET DECHALES : *Elementorum Euclidis libri octo, ad facilitatem captum accommodati*, 3^e éd. Ed. Vve Coral, Lyon.
- 1685 R.P. Bernard LAMY : *Les éléments de géométrie ou de la mesure des corps*. Ed. A. Pralard, Paris.
- 1709 Angelo de MARCHETTIS : *Euclides reformatus, sive plana et solida geometriae elementa*. Ed. J. Valsis, Livourne.
- 1741 Alexis CLAIRAUT : *Eléments de géométrie*. Ed. David fils, Paris.
- 1753 Joseph SAUVEUR : *Géométrie élémentaire, revue, corrigée et augmentée par M. Le Blond*. Ed. Rollin, Paris.
- 1765 Alexis CLAIRAUT : *Eléments de géométrie*. Ed. Durand, Paris.
- 1772 Abbé Nicolas de la CAILLE : *Leçons élémentaires de mathématiques*. Nouvelle édition. Ed. Desaint, Paris.
- 1777 Frédéric de CASTILLON : *Eléments de géométrie ; ou les six premiers livres d'Euclide, avec le onzième et le douzième. Traduction nouvelle*. Ed. C.F. Himburg, Berlin.
- 1794 Adrien-Marie LE GENDRE : *éléments de géométrie, avec des notes...* Ed. F. Didot, Paris.
- 1798 John BONNYCASTLE : *Elements of geometry, containing the principal propositions in the first six, and the eleventh and twelfth books of Euclid*. 2d ed. Ed. J. Johnson, Londres.
- 1814 Sylvestre-François LACROIX : *Eléments de géométrie, à l'usage de l'Ecole des Quatre-Nations*. 10^e éd. Ed. Vve Courcier, Paris.
- 1840 LEFEBURE DE FOURCY : *Leçons de géométrie analytique*. 4^e éd. Ed. Bachelier, Paris.
- 1855 Sylvestre-François LACROIX : *Eléments de géométrie*. 17^e éd., par M. Prouhet. Ed. Mallet-Bachelier, Paris.
- 1871 Adrien-Marie LE GENDRE : *Eléments de géométrie, avec additions et modifications par M.A. Blanchet*. 14^e éd. Ed. F. Didot, Paris.

Notons pour commencer que la qualité graphique des dessins, jusqu'au début du 19^e siècle, n'est pas toujours très bonne (c'est ainsi, par exemple, que dans [1675], ouvrage de petit format, la taille des dessins ne dépasse guère le centimètre). Il en est ainsi pour des raisons évidemment matérielles, mais également aussi, sans doute, parce que le besoin d'un graphisme plus précis ne se faisait pas sentir, le dessin n'étant en fait destiné qu'à illustrer le discours qu'il accompagne, afin de fixer les idées, c'est-à-dire de faciliter la constitution d'une image mentale chez le lecteur ; il ne s'agit en aucun cas d'un dessin « technique », dont la réalisation serait fondée sur des principes bien définis.

Dans les ouvrages consultés, nous nous sommes plus particulièrement intéressés à certains points : la représentation du plan, celle des polyèdres et des corps ronds, ainsi qu'aux conventions de dessins utilisées plus ou moins systématiquement.

1 - Le plan :

Dans tous les cas (à partir de [1658], car [1605] ne comporte pas de dessins de plans), le plan est représenté par un quadrilatère. Il s'agit la plupart du temps d'un parallélogramme, éventuellement rectangle, dont deux côtés sont, soit horizontaux (le plus souvent), soit verticaux : **dessins 1A et 1B** d'après [1658] pp. 254 et 255, **dessin 1C** d'après [1675] p. 290, et **dessin 1D** d'après [1658] p. 258. Comme nous l'avons déjà indiqué ailleurs (Parzysz 1988 et 1989), un rectangle restitue l'image conforme du rectangle représentant lui-même le plan (préservation du « savoir »), mais il présente l'inconvénient de manquer de relief (cf. **dessin 1B**). Le parallélogramme pallie cet inconvénient, en se rapprochant du rectangle tel qu'il se présente habituellement au regard (préservation du « voir »), mais en abandonnant en contrepartie l'orthogonalité des côtés (perte de « savoir »). (Au fil du temps, d'ailleurs, le rectangle originel sera complètement perdu de vue et, si l'on continue aujourd'hui à représenter les plans par des parallélogrammes, le fait qu'il s'agit en fait du dessin d'un rectangle est souvent totalement ignoré).

Enfin, contrairement à ce que l'on pourrait croire, le rectangle, représentation « primitive » (au sens étymologique) de plan,

quoique minoritaire par rapport au parallélogramme, subsiste très longtemps : on le retrouve encore dans [1871], p. 175 (**dessin 2**).

Venons-en maintenant à la latéralisation des parallélogrammes à côtés horizontaux, c'est-à-dire à l'orientation des obliques (la latéralisation est dite droite (resp. gauche) si les obliques « montent vers la droite » (resp. gauche)). On peut observer, chez certains auteurs, une préférence parfois nette :

- droite dans [1658], [1685], [1753] ;
- gauche dans [1675], [1777].

Ainsi, la tradition actuelle d'une latéralisation droite très fortement majoritaire n'est pas encore établie. Cette étude nous a d'ailleurs suggéré une hypothèse sur une cause possible de la prédominance acquise par la latéralisation droite sur l'autre ; il s'agirait de la conjonction de deux phénomènes :

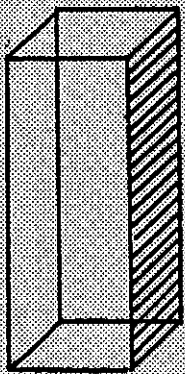
– le premier tenant aux directions de tracé privilégiées (Van Sommers 1984) : il est plus facile, pour un droitier, de tracer une oblique montant vers la droite qu'une oblique montant vers la gauche (ou descendant vers la droite) ;

– le second tenant au fait suivant : jusqu'au tiers du 18^e siècle, la coutume était de placer le dessin en regard du texte, en le reproduisant au besoin (une fois, deux fois...) si la lecture du texte de référence obligeait à tourner la page. Or, à partir de cette époque, et pendant un siècle environ, l'usage se répandit de regrouper les dessins en planches, repliées et regroupées en fin d'ouvrage. Les raisons en sont vraisemblablement à la fois techniques (procédé de gravure), économiques (coût de fabrication) et pratiques (la planche une fois dépliée, les dessins restent visibles en permanence lors de la lecture). Quoi qu'il en soit, ce regroupement des dessins sur une même feuille favorise (gain de place, esthétique) l'uniformisation des parallélogrammes, éléments essentiels des planches consacrées à la géométrie de l'espace (ceci est particulièrement net dans [1753], pour la planche I correspondant au « livre quatrième » : de la rencontre des lignes et des plans).

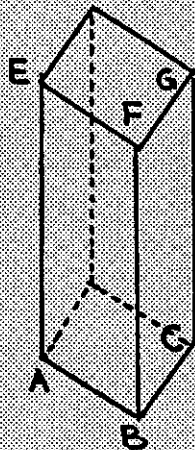
Il ne s'agit toutefois là, rappelons-le que d'une hypothèse, qui nécessiterait une



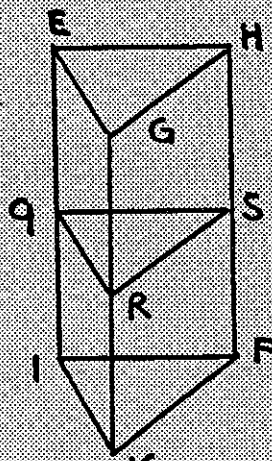
PLANCHE I



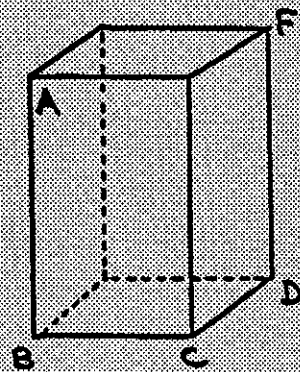
Ⓐ



Ⓑ

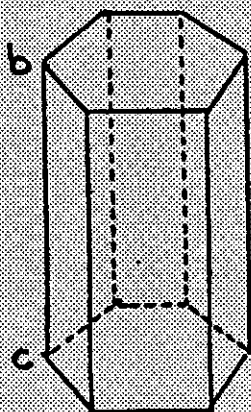


Ⓒ

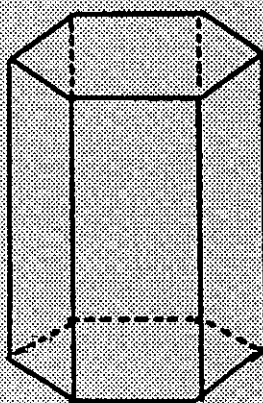


Ⓓ

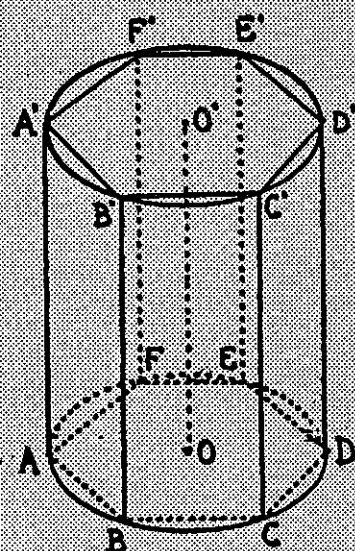
DESSIN 4



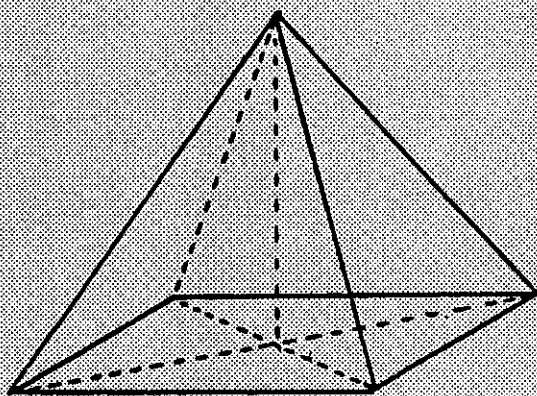
DESSIN 5



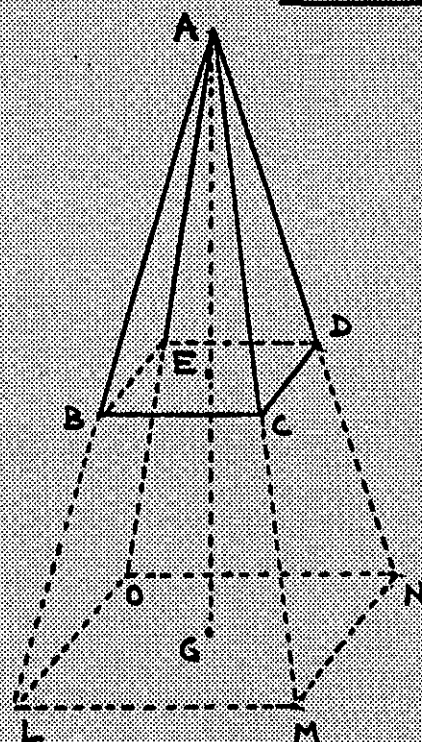
DESSIN 6



DESSIN 7



DESSIN 8



DESSIN 9

étude plus exhaustive. D'autre part, les obliques sont constamment redressées sur la verticale (angle avec l'horizontale de l'ordre de 60-70°), ce qui est encore le cas actuellement : phénomène que nous avons déjà expliqué comme résultant de la nécessité de ne pas trop occuper de place dans la page, comme ce serait le cas avec des obliques moins redressées, lesquelles cependant auraient l'avantage de favoriser la «lecture» souhaitée (horizontale) du plan.

Nous signalons plus haut la présence — qui est relativement rare — de représentations de plans qui n'étaient pas des parallélogrammes : ce sont en fait des trapèzes, parallélogrammes transformés par un effet de fuyantes, de façon volontaire et non pas par suite d'une imprécision de tracé (dessins 3A, 3B, 3C et 3D, d'après [1685] p. 169, [1709] p. 171, [1741] pl. XI fig. 7 et [1871] p. 166 respectivement). Il s'agit là simplement d'une «pseudo» perspective linéaire, car par exemple dans le dessin 3B les obliques (censées représenter des parallèles) n'ont pas un point de fuite unique. Notons que cette pratique était encore en usage naguère dans certains manuels scolaires, avec toutefois un effet de fuyantes presque imperceptible (cf. Parzysz 1989, pp. 58-59).

2 - Les polyèdres :

Les prismes sont pratiquement toujours — et ceci dès le début — représentés en perspective parallèle stricte (dessins 4A, 4B, 4C, et 4D d'après [1605] p. 152, [1658] p. 272, [1675] p. 358, [1685] p. 181 respectivement). Lorsqu'exceptionnellement il n'en est pas ainsi (par exemple dans [1753] 2e partie livre VII pl. I fig. 4, dessin 5) il s'agit selon toute probabilité, non d'une volonté consciente d'avoir recours à une perspective linéaire, mais plutôt du désir de réaliser un dessin aussi lisible que possible : en effet, une version correcte, en perspective parallèle, du dessin précédent serait celle du dessin 6, dans lequel des arêtes différentes sont représentées par des segments de même support, ce qui est préjudiciable à une bonne lecture ; cette pratique est encore attestée actuellement (dessin 7, in Desbats 1951, p. 166).

Les représentation de pyramides sont plus

intéressantes en ce qui nous concerne, en ce sens qu'elles sont davantage sujettes à variations. Nous avons déjà étudié précédemment les desins que produisent les lycéens dans le cas de la pyramide régulière à base carrée (Parzysz 1989, p. 193 sq.). La représentation «classique» aujourd'hui dans les manuels pour ce type d'objet est la perspective cavalière : la pyramide est supposée posée sur un plan horizontal, deux des arêtes de la base étant parallèles au plan vertical de projection (dessin 8). Mais à l'époque il n'en allait pas de même ; ce type de représentation était excessivement rare (dessin 9 d'après [1741] pl. XII fig. 10), et les dessins étaient plus variés (dessins 10A, 10B, 10C, 10D, 10E et 10F d'après [1658] p. 320, [1685] p. 279, [1709] p. 201 et p. 243, [1753] 1ère partie livre 5e pl. V fig. 49, [1777] p. 411 respectivement). Comme on le voit, les représentations dominantes consistent alors à donner, soit à la base une forme carrée ou rectangulaire, soit à la face avant une forme isocèle. Il s'agit là de dessins que nous avons retrouvés en proportion non négligeable chez les lycéens, et que nous avons interprétés comme provenant d'un souci de préserver sur le dessin le savoir relatif à l'objet ; on peut sans doute attribuer la même cause aux représentations des ouvrages anciens. Pour en terminer avec les polyèdres, notons que dans [1605] les cinq solides platoniciens sont uniquement représentés sous forme de développements (patrons), complets ou partiels (dessin 11).

3 - Les corps ronds :

Avec les corps ronds, nous sommes maintenant confrontés au problème du «cercle en perspective». On sait depuis Apollonius que la section, par un plan, d'un cône ou d'un cylindre à base circulaire est une conique et, puisque la lumière se propage en ligne droite, il en résulte que, aussi bien en perspective linéaire qu'en perspective parallèle, un cercle sera représenté par une ellipse. Mais ceci nécessite au moins que l'on ait fait le lien entre vision et projection, ce qui n'est apparemment pas le cas dans la plupart des ouvrages que nous avons étudiés.

Nous mettrons à part le cas de la sphère, qui est invariablement représentée par un cercle. Nous pouvons sans difficulté justi-

fier cette pratique en remarquant que, lorsque l'on regarde une sphère, on dirige son regard vers elle, ce qui fait que le faisceau lumineux qui lui correspond est sensiblement un cône de révolution, et que l'impression visuelle sera en conséquence à peu près celle produite par un disque.

Les représentations de cônes et de cylindres sont plus variables, et relèvent essentiellement de deux types, différant par la forme de leurs bases :

— base (à peu près) elliptique : **dessins 12A, 12B, 12C, et 12D**, d'après [1605] p. 148, [1658] p. 272, [1685] p. 181, [1753] 1ère partie livre 6e pl. I fig. 9 respectivement ;

— base lenticulaire : **dessins 13A, 13B, 13C, 13D et 13E**, d'après [1605] p. 151, [1658] p. 293, [1685] p. 234, [1753] 1ère partie livre 6e pl. I fig. 10, [1798] p. 243 respectivement.

Remarquons que, dans les deux types, se pose théoriquement le problème du tracé du contour apparent du cône, ou du cylindre lorsqu'il n'est pas droit (cf. par exemple le **dessin 12C**) : normalement, les génératrices qui devraient être dessinées devraient être celles qui correspondent au contour apparent qui sont représentées, et non, comme c'est le cas, celles qui sont situées dans le plan frontal ; mais, outre que celles-ci sont plus commodes à dessiner et en général voisines du contour apparent, elles permettent également de faire apparaître une section (le savoir) en même temps qu'une vue plausible de l'objet (le voir).

Les exemples indiqués ci-dessus montrent (nous les avons bien sûr choisis à dessein) la coexistence constante, et souvent dans un même ouvrage, entre les deux types de représentation (lenticulaire ou elliptique), coexistence qui va à l'encontre de la prise de conscience d'une contradiction. Quelles peuvent être les raisons de cette coexistence ? Il faut d'abord, comme nous l'avons dit, ne pas faire la relation entre vision et perspective. Ensuite, le cercle se présente à nous sous plusieurs aspects, selon les points de vue : subcirculaire dans une vue plongeante, le contour s'aplatit de plus en plus lorsque le point de vue s'abaisse, jusqu'à se réduire à un segment. Bien sûr, nous savons, pour l'avoir appris, que ce contour

reste elliptique dans tous les cas, mais qui — s'il n'est pas prévenu — peut faire la différence, à l'œil, entre une ellipse aplatie et une lentille ? Le contour elliptique et le contour lenticulaire pourraient donc ne correspondre qu'à une référence mentale à des points de vue différents.

Nous proposons, pour cette dernière représentation, l'explication suivante (nous prenons le cas du cône comme exemple) : lorsque l'on regarde, sous un angle de vue habituel, un cône posé sur un plan horizontal, on n'en voit que la moitié (ce qui est sensiblement exact si l'on n'est pas situé trop près). De plus, on sait qu'il en existe une moitié symétrique, qui est cachée à nos yeux. Il n'est donc pas invraisemblable que la production des contours lenticulaires corresponde à une démarche du type suivant, alliant voir et savoir :

1° tracé de la partie visible, avec un contour courbe pour la base (**dessin 14A**)

2° complètement de ce tracé par symétrie (**dessin 14B**).

Le même phénomène a lieu pour les sections de sphères, où le même principe explicatif peut également s'appliquer (**dessins 15A et 15B**, d'après [1753] 2e partie livre VII pl. 1 fig. 7 et [1840] pl. I fig. 35 (QR est l'équateur), ce dernier exemple étant le plus tardif que nous ayons trouvé).

4 - Les conventions graphiques :

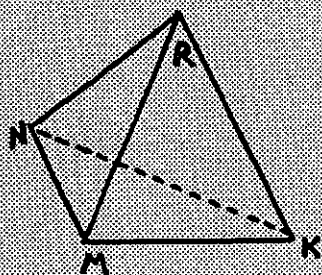
Dans les manuels actuels de l'enseignement secondaire long, nous en avons recensé cinq principales (Parzysz 1989, p. 65 sq.) :

- la pseudo perspective linéaire
- l'épaississement de traits
- l'ombrage de surfaces
- la discontinuité de lignes
- la semi-transparence.

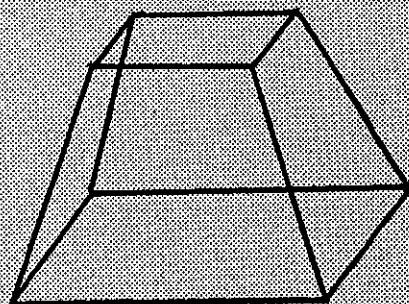
Voyons ce qu'il en est dans les ouvrages étudiés.

a) **La pseudo perspective linéaire** : nous l'avons déjà évoquée ci-dessus, et n'y reviendrons donc pas.

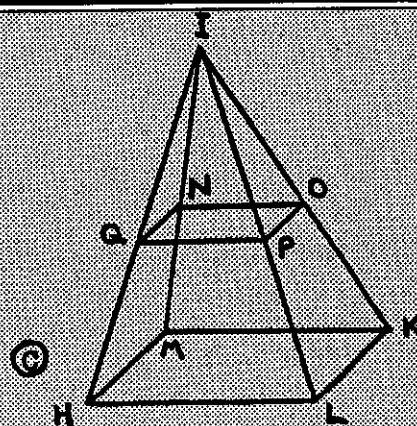
b) **L'épaississement des traits** : il s'agit du surcroît d'épaisseur donné à deux segments consécutifs du tracé d'un plan, et qui est destiné à lever l'ambiguïté théo-



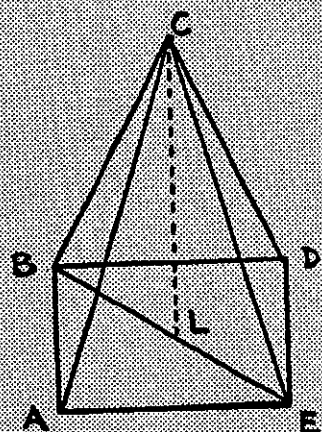
(A)



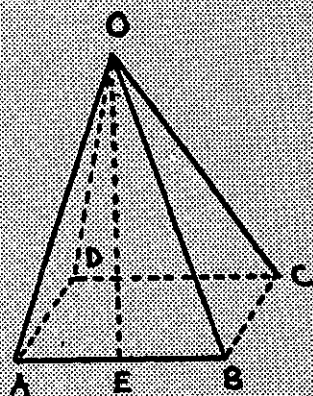
(B)



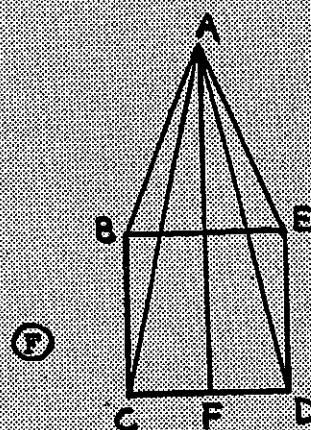
(C)



(D)

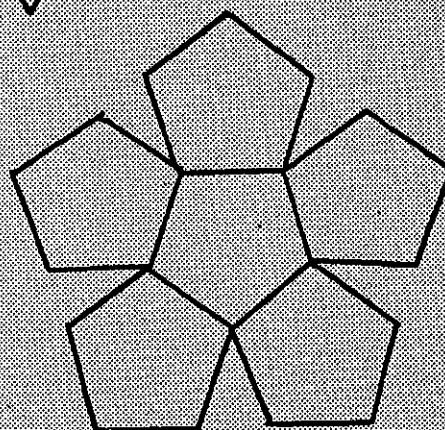
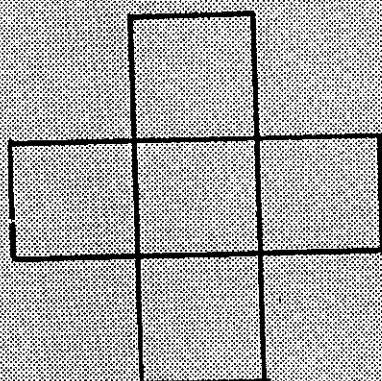
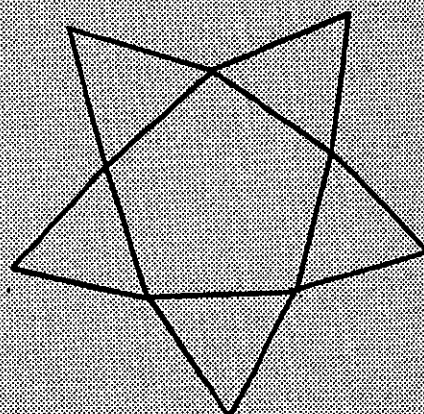
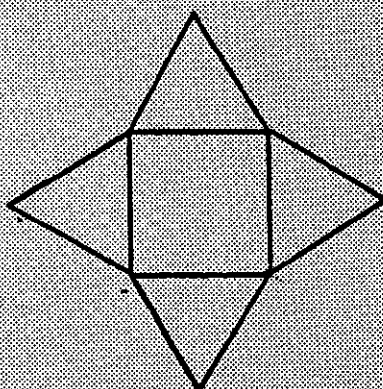
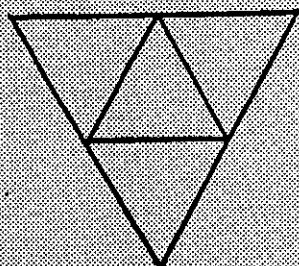


(E)

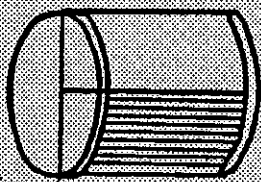


(F)

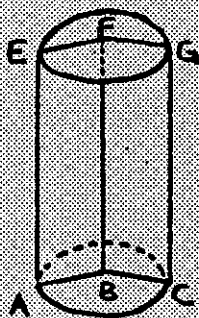
DESSIN 10



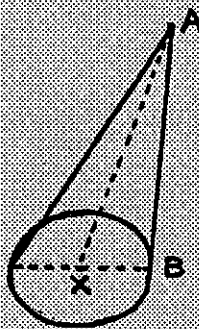
DESSIN 11



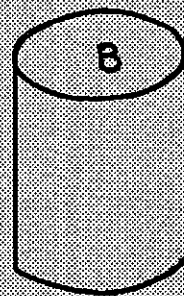
(A)



(B)

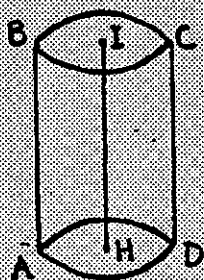


(C)

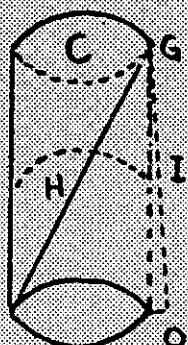


(D)

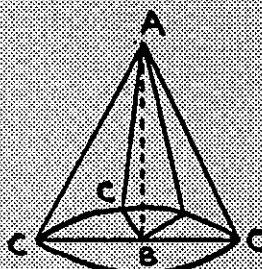
DESSIN 12



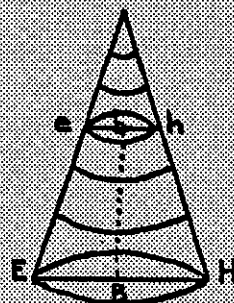
(A)



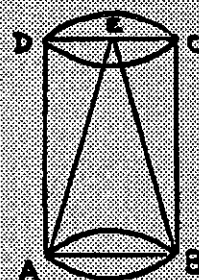
(B)



(C)

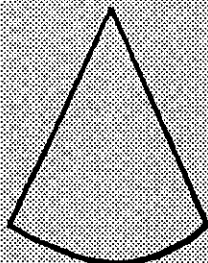


(D)

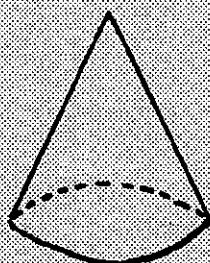


(E)

DESSIN 13

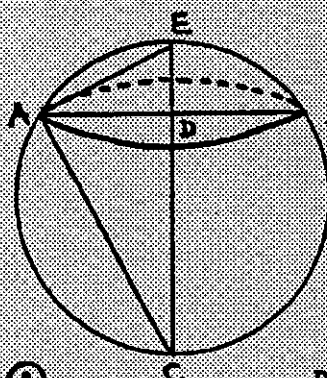


(A)

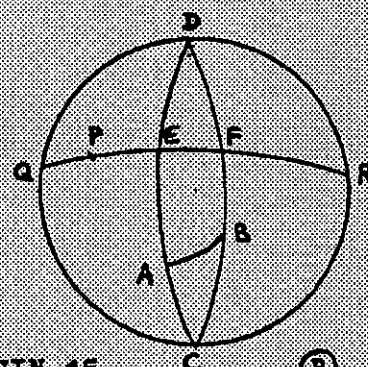


(B)

DESSIN 14

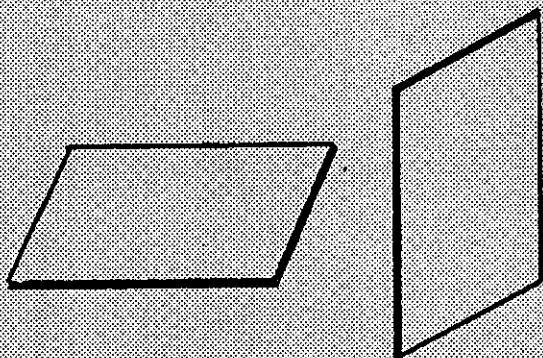


(A)

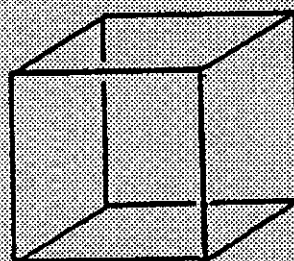


(B)

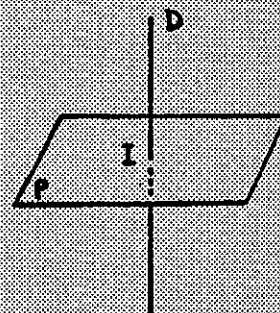
DESSIN 15



DESSIN 16



DESSIN 17



DESSIN 18

rique de la représentation en suggérant l'un des deux «points de vue possibles» (en fait, la vue de dessus) : voir **dessin 16**. Nous n'avons trouvé ce procédé que dans [1753] ; il sera réutilisé plus tard, de la fin du 19^e siècle aux années 1960.

c) L'ombrage de surfaces : il consiste à hachurer tout ou partie des surfaces de l'objet représenté, de façon

- soit (type 1) à suggérer un éclaircissement de cet objet (hachures régulières, plus ou moins serrées selon les faces),
- soit (type 2) à suggérer une perspective (hachures se resserrant vers le «fond»).

Dans un cas comme dans l'autre, le but est évidemment de favoriser la perception de la troisième dimension. Nous avons trouvé le type 1 dans [1605], [1741], [1753], [1765], [1772], et le type 2 dans [1772], [1794] et [1814]. La présence «précoce» de ce procédé dans un ouvrage de 1605 n'est pas si étonnante qu'il y paraît : il s'agit en effet d'une «géométrie pratique», et les objets dont on traite sont censés être des objets réels (cf. le «ronde colonne» du **dessin 12A**). Mais, quoi qu'il en soit, cette floraison au 18^e siècle, suivie d'un étiolement au 19^e et d'une disparition aux alentours de 1900 ressemble fort à un phénomène de mode.

d) La discontinuité de lignes : nous n'en avons pas trouvé trace dans les ouvrages consultés. Rappelons qu'il s'agit du procédé consistant à interrompre une ligne lorsqu'elle est censée se trouver «derrière» une autre pour le «point de vue» ainsi suggéré (**dessin 17** dans le cas d'un cube-squelette). Ceci tend à confirmer l'hypothèse que nous avons émise précédemment (Parzysz 1989 p. 68), à savoir que cette pratique serait d'introduction récente (aux environs de 1960).

e) La semi-transparence : d'une utilisation constante aujourd'hui, cette convention graphique consiste à représenter en pointillés les lignes situées «derrière» une surface, pour le «point de vue» supposé (**dessin 18**).

(N.B. : Dans les manuels actuels, les pointillés (en fait, ce sont souvent des tirets) sont utilisés, non seulement pour représenter les lignes «cachées», mais également pour dessiner certains traits auxiliaires).

Pour les manuels étudiés, nous avons rassemblé dans le tableau ci-après les résultats observés par rapport à quatre pratiques :

- transparence totale de l'objet (T)
- opacité totale de l'objet (O)
- semi-transparence (ST)
- traits auxiliaires en pointillés (P).

Bien entendu, ces divers procédés peuvent être utilisés concurrentiellement.

	T	O	ST	P
1605	*	*		
1658	*	*	*	*
1660	*			
1675	*	*		
1685	*	*	*	*
1709	*	*	*	*
1741	*	*	*	*
1753	*	*	*	*
1765	*	*	*	*
1772	*	*		*
1777	*			
1794	*			

	T	O	ST	P
1798	*			
1814	*		*	
1840	*			*
1855			*	*
1871	*		*	*

Ce tableau appelle les constatations suivantes :

- l'opacité des objets disparaît avant la fin du 18^e siècle : son existence s'expliquait par la nature «concrète» de ces objets (solides), mais elle est difficile à gérer.
- la transparence perdure tout au long de la période considérée : elle introduit un risque de mauvaise interprétation (par exemple : a-t-on affaire à des lignes ou à des surfaces ? Quelles sont les positions relatives des objets ?...) mais offre l'avantage, sur l'opacité, de tout montrer.

- la semi-transparence apparaît vers le milieu du 17^e siècle et, malgré une courte éclipse à la fin du 18^e, est reprise sans interruption jusqu'à nos jours, où elle a totalement supplanté la transparence et est devenue un procédé constant de représentation. Il faut dire qu'elle offre, sur la transparence, l'avantage de suggérer un «point de vue», et par conséquent de lever

Pour aller plus loin

BERDONNEAU Catherine (1981) : Quelques remarques sur l'introduction à la géométrie démontrée, à travers les manuels en usage dans l'enseignement post-élémentaire en France au vingtième siècle. Thèse de 3^e cycle. Université Paris-7

DEFORGE Yves (1981) : Le graphisme technique. Son histoire et son enseignement. Ed. Champ Vallon 01420 Seyssel.

DESBATS J. (1951) : Géométrie et géométrie cotée. Classes de Première (section C et moderne). Ed. de l'Ecole, Paris.

PARZYSZ Bernard (1988) : "Knowing" us "seeing". Problems of the plane representation of space geometry figures. Educational studies in mathematics. Vol. 19 pp. 79-92.

PARZYSZ Bernard (1989) : Représentations planes et géométrie de l'espace au lycée. Contribution à l'étude de la relation voir/savoir. Thèse de diplôme de doctorat. Université Paris-7.

VAN SOMMERS Peter (1984) : Drawing and cognition. Descriptive and experimental studies of graphic production processes. Cambridge University Press, New-York.

certaines ambiguïtés, tout en montrant, contrairement à l'opacité, la totalité des éléments du dessin ; c'est-à-dire qu'elle représente une gestion optimale du voir et du savoir.

(Notons cependant que, tout au moins à ses débuts, la semi-transparence n'a pas toujours été utilisée de manière cohérente, comme le montre l'exemple du dessin 1D).

En conclusion, cette étude nous aura permis de découvrir quelques aspects des représentations qui sont aux origines du mode actuel de représentation de l'espace en géométrie : la référence à un principe (la perspective parallèle) n'apparaît jamais, quoique, formellement, les dessins des ouvrages anciens y fassent indubitablement penser (sauf en ce qui concerne les corps ronds). Ce genre de pratique remonte d'ailleurs au Moyen-Age, avec au moins deux origines possibles : «au 15^e siècle, on trouve plusieurs exemples de perspectives s'apparentant à ce que l'on nomme aujourd'hui «perspective isométrique» ; on ne sait pas s'il s'agit d'une simplification de la perspective naturelle à point de vue unique avec apparition d'un concept de rayons visuels parallèles, ou d'une perspective artificielle basée sur une méthode de construction euclidienne à plat» (Deforge 1981, p. 82). Mis à part le fait que l'auteur utilise ici l'expression «perspective isométrique» dans le sens plus général de «perspective parallèle», précisons que la première possibilité évoquée est celle qui apparaît dans certains croquis rapides de Léonard de Vinci, dessins perspectifs dans lesquels les fuyantes sont dessinées parallèles et non concourantes (perspective «schématique» en quelque sorte), tandis que la seconde est celle des perspectives dites «stratégiques» qui, à partir d'un plan au sol, «se font en élevant des perpendiculaires, à l'échelle du plan, sur tous les points significatifs et en traçant des fuyantes obliques parallèles» (Ibid.). La première hypothèse est sans doute la plus vraisemblable dans le cas qui nous occupe ici, étant donné la nature des objets représentés, mais il s'agit

peut-être moins d'une simplification réfléchie (comme chez Léonard) que d'un désir de représenter certaines caractéristiques, jugées importantes, de l'objet figuré. Quoiqu'il en soit, il apparaît que ce n'est que récemment que le lien a été fait entre ces dessins et la perspective (projection) parallèle, et que par exemple il a fallu attendre le courant du 19^e siècle pour que les «cercles en perspective» commencent à être représentés systématiquement sous forme d'ellipses (même si le dessin de ces ellipses n'est pas toujours cohérent avec celui d'autres éléments). En fait, ces dessins ont eu, à l'origine, un rôle analogue à celui des schémas figurant dans les actuels manuels de sciences : illustrations permettant de se représenter les objets dont il est question dans le texte, de faire à la fois voir et savoir, sans trop s'occuper des moyens utilisés. Ainsi c'est le souci de préserver le savoir qui explique la conservation du parallélisme sur les dessins, par exemple, bien plus qu'une utilisation de la perspective parallèle. Diverses modifications ont certes été apportées au fil du temps, qui ont abouti à la constitution de l'actuelle «tradition» ; certaines ont constitué d'indéniables progrès (la semi-transparence), d'autres n'ont pas eu d'effet appréciable (la latéralisation à droite). Les insuffisances que nous avons relevées dans ces dessins anciens (et dont certaines ont perduré jusqu'à aujourd'hui) ne semblent guère avoir créé de gêne. Ce qui n'est pas surprenant, dans la mesure où ce n'est que lorsque l'on veut travailler sur un dessin pour y réaliser des constructions que l'on risque d'y rencontrer des incompatibilités, montrant la nécessité d'une systématisation (de nature nécessairement géométrique), préoccupation qui semble n'être apparue que récemment (il n'est que de constater le nombre élevé de dessins de manuels où se révèlent des incohérences). Pour résumer notre opinion à l'issue de cette étude, nous dirions plutôt que le dessin de géométrie de l'espace, tel qu'il existe aujourd'hui, est plus un schéma amélioré qu'un véritable dessin. ■

Représentations de solides

Dominique Beaufort. Chartres
Formation IUFM

Comment représenter un objet de l'espace sur une feuille de papier?

Les solutions à ce problème ne sont pas simples, même si nos habitudes culturelles nous ont rendu familières

certaines représentations. Depuis les Grottes de Lascaux jusqu'aux images de synthèses, les tentatives sont multiples:

perspective centrale (Peintres de la Renaissance),

perspectives cylindriques (géométrie projective),

projections orthogonales sur plusieurs plans (dessin technique),

topologie, anamorphoses,...

Il s'agit toujours d'un point de vue particulier sur un objet, choisi en fonction de l'information (l'émotion)

que l'on souhaite communiquer.

Cette activité, proposée à des élèves-instituteurs, a pour objectifs de les sensibiliser au caractère conventionnel des représentations qu'ils utilisent - et feront utiliser par leurs élèves -, à la variété des solutions et à leurs intérêts respectifs selon l'objectif de communication visé.

Nous avons choisi pour cela de placer les étudiants dans la situation de produire une représentation d'un solide complexe, puis d'en évaluer la pertinence dans une activité de lecture pour construire un solide semblable.

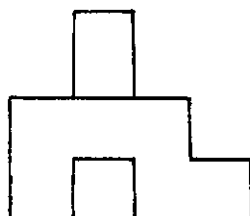
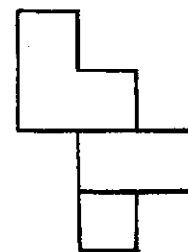
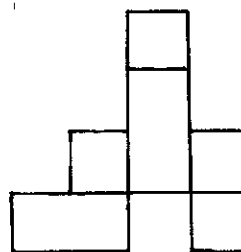
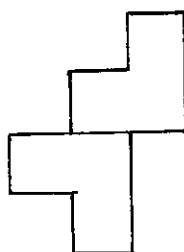
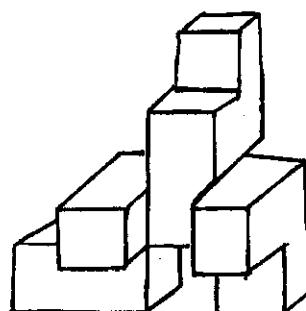
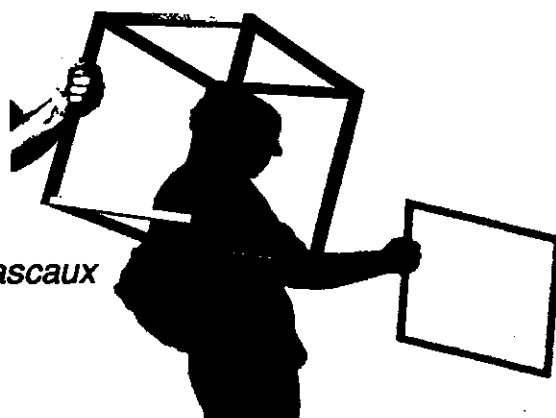
1ère phase:

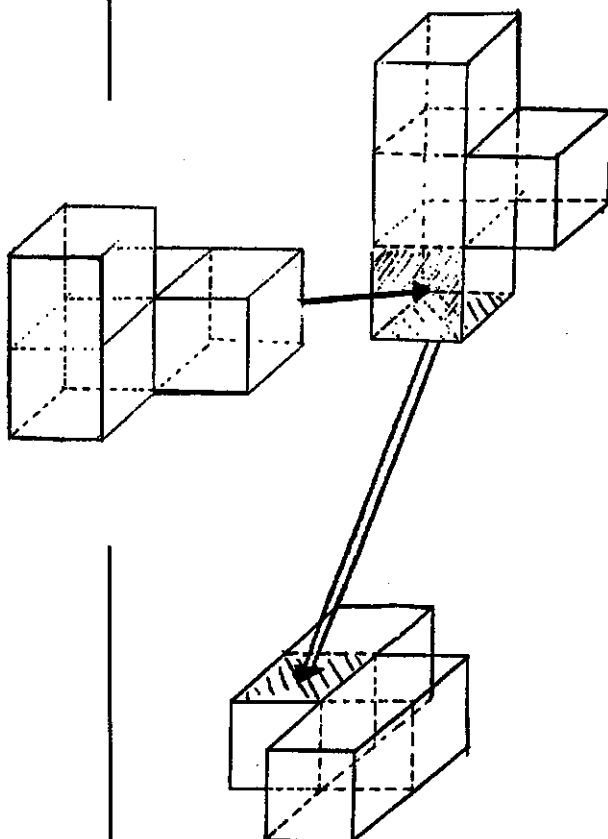
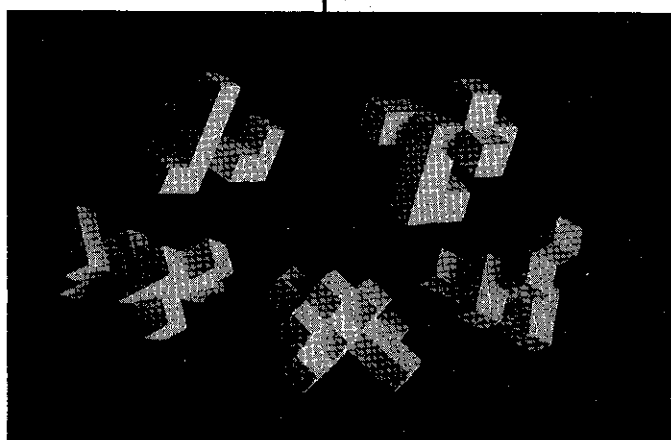
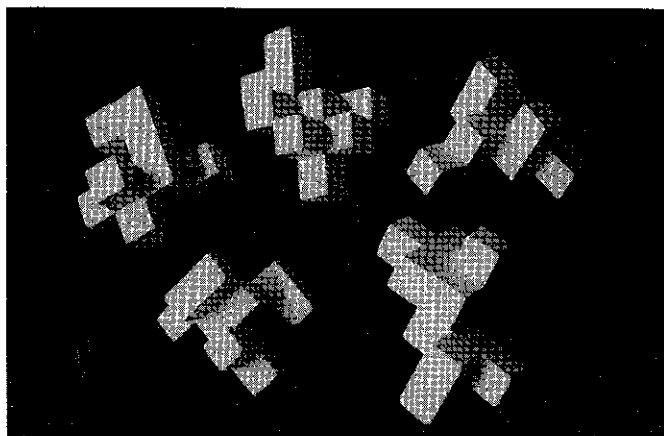
Elaboration d'une représentation

La classe est divisée en groupes de 4 ou 5. Chaque groupe reçoit un solide (tous les solides sont différents) et une grande feuille de papier (format (A3)).

La consigne est d'élaborer un message sous forme d'un ou plusieurs dessins permettant à un autre groupe de reconstruire un solide analogue. On précisera en cours de travail qu'on ne s'attachera pas aux dimensions réelles de l'objet.

Chaque groupe analyse le solide, le pose sur la table dans la position qui lui semble la plus appropriée (ce point de vue n'est





pas identique pour tous les membres du groupe !), se met d'accord sur un moyen de le représenter: perspective(s), sections, vues géométrales,... Selon le système choisi, les étudiants collaborent à la réalisation, essaient au brouillon, exécutent une vue particulière.

2ème phase

Construction d'un solide à l'aide d'un message

Les productions sont échangées d'un groupe à l'autre, et chaque groupe reçoit une collection de cubes emboîtables (matériel pour l'enseignement de la numération). Ils doivent construire, à l'aide de ce matériel, un solide selon les indications fournies par le message.

Remarque: les cubes emboîtables ne sont fournis qu'à ce moment de l'activité, afin de ne pas induire des modes de représentations trop particulières dans la première étape.

3ème phase

Comparaison des solides construits aux originaux

La non conformité peut provenir:

- soit d'une lecture erronée de la représentation: codage mal interprété, lecture fausse,...
- soit d'une représentation ambiguë, insuffisante.

4ème phase

Confrontation des systèmes utilisés

Chaque groupe présente à l'ensemble de la classe le mode de représentation qu'il a utilisé, tandis que le groupe receveur indique la plus ou moins grande facilité avec laquelle il a construit le solide. Cette phase permet de prendre conscience de la variété des solutions au problème de construction et de rechercher les causes d'erreur.

5ème phase

Classification des systèmes

Cette activité permet d'établir une première classification des systèmes de représentation utilisés: perspectives, projections orthogonales sur plusieurs plans,... Le travail se poursuit alors par une étude plus systématique des principaux modes conventionnels de représentation: perspectives cylindriques (cavalière, axono-

métrique), perspective centrale, vues géométrales.

Exemples de productions

1- Perspectives

Ces représentations (parfois mal maîtrisées) ne permettent pas, seules, de fournir toutes les informations nécessaires à la construction. Elles donnent par contre une vue globale du solide.

2- Vues géométrales et perspectives

Les conventions de représentation ne sont pas entièrement respectées mais conduisent à une reproduction aisée du solide.

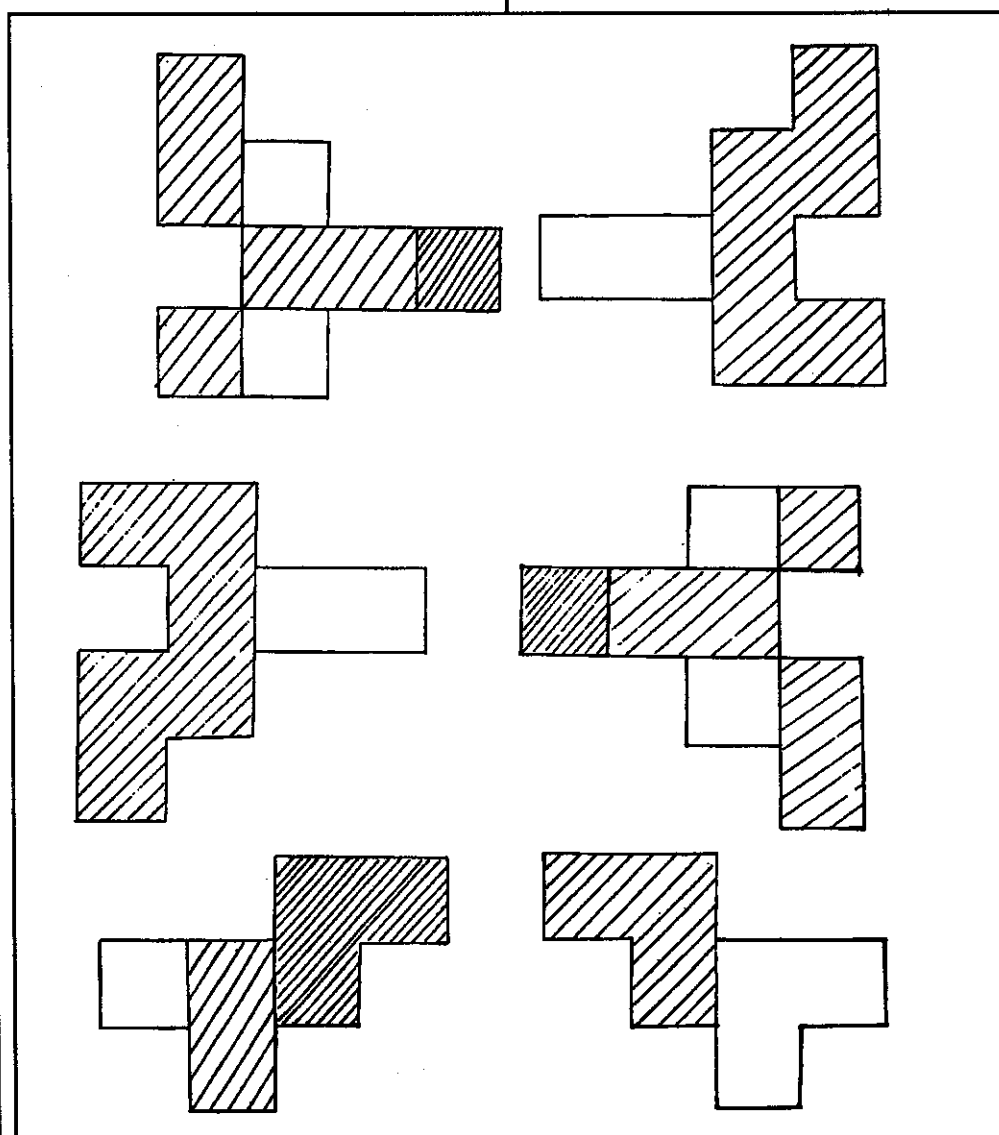
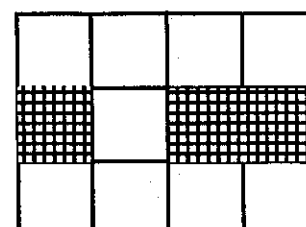
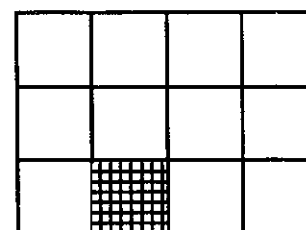
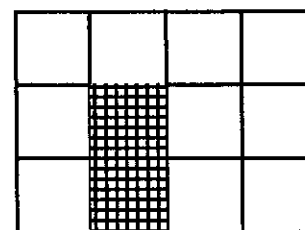
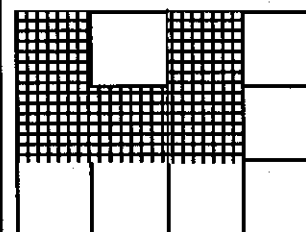
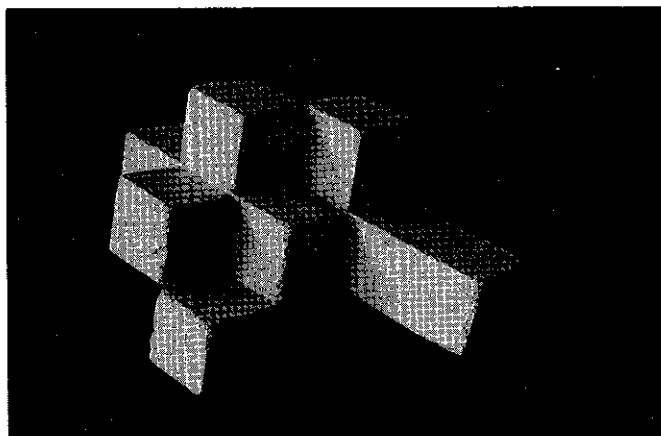
3- Vues éclatées en perspective, avec plan de montage

4- Vues géométrales et indication de différents niveaux

5- Sections du solide en surimpression de la vue de dessus

6- Sections et plan de montage

7- Sections sur un seul dessin avec légendes des différents niveaux



L'ESPACE ET L'ENSEIGNEMENT

Gerard VATON - Abidjan

Première partie : La perception de l'espace.

Il est difficile de développer du matériel simple et facilement diffusable, surtout en Afrique.

Gérard Vaton décrit ici le matériel qui est fabriqué et diffusé auprès des enseignants de la Côte d'Ivoire par le SDEACP d'Abidjan.

Particularité : tout ce matériel est réalisé de façon à être exploité rapidement par les enseignants. Petits cubes, cylindres, ...le tout en bois. Fiches tirées par offset en format 21 x 29,7 cm pour être facilement reproduites et surtout constituer des mini-panneaux de présentation pour toute la classe.

Toutes les fiches qui vous sont présentées ici sont des exemples en réduction de fiches-panneaux et de fiches-élèves. Le format réel est chaque fois indiqué.

EXERCICE RELATIF A LA PERCEPTION DE L'ESPACE

Perspectives du cylindre

1. Le panneau «énoncé».

Format : 65 x 92 cm

Il se présente de manière analogue au document «élèves». Toutefois, le texte des questions n'y figure pas.

Pour assembler les deux parties constituant le repérage des sept points de vue, il faut aligner le trait mixte fin de la vue n° 3

et faire le raccord pour avoir la succession des traits longs de 40 mm et des traits courts de 5 mm, avec des intervalles de 10 mm.

Il restera alors à achever les tracés pour les points de vue n° 1 / 2 / 4.

Feuilles au format A4 pour les élèves

2. Les questions

On veut dessiner 7 vues du cylindre posé sur sa base ($\varnothing$ 150 mm, H = 200 mm).

- Quelles sont les 2 vues qui manquent ?
- Dessinez les vues manquantes à l'échelle 0,1.
- Identifiez les vues A, B, C, D, et E.
- Découpez et placez les sept vues dans l'ordre, de 1 à 7.

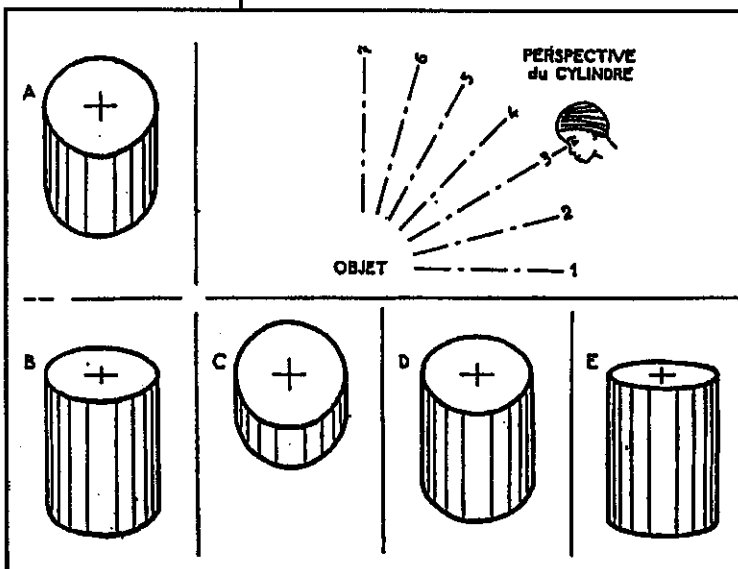
3. Le panneau «solutions».

Format : 65 x 92 cm.

Découper, assembler et coller :

- les deux parties du titre ;
- les sept feuilles «A 4» de dessins réalisés à l'échelle 0,7 ;
- les quatre feuilles «A 4» de dessins réalisés à l'échelles 0,4 ;

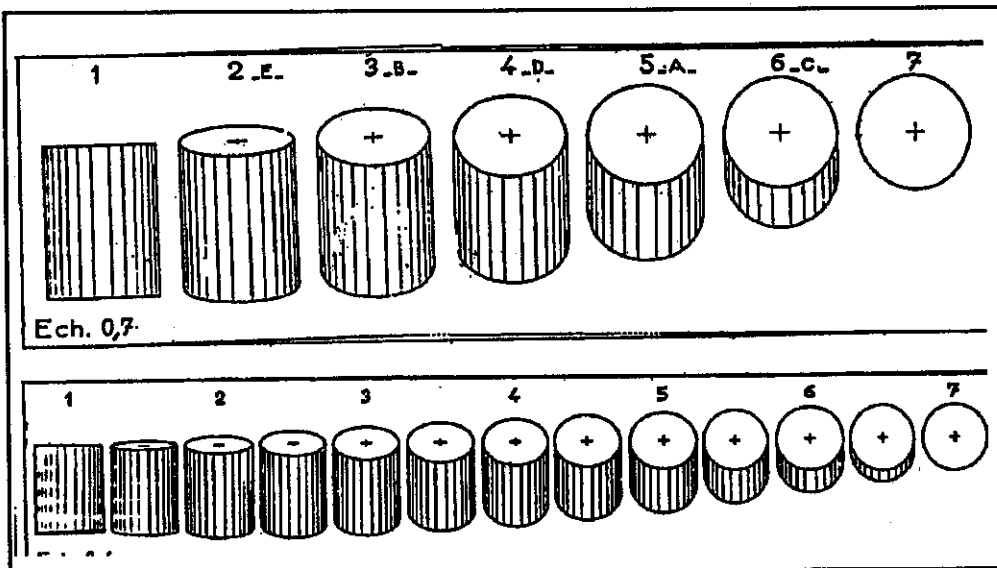
Des traits verticaux de repérage ont été prévus pour faciliter le positionnement des dessins : la jonction entre deux feuilles consécutives est correcte lorsque ces traits sont superposés. Après collage, ces traits seront masqués à l'aide de gouache blanche (du «blanco»).



Feuilles au format «A 4»
pour les élèves.

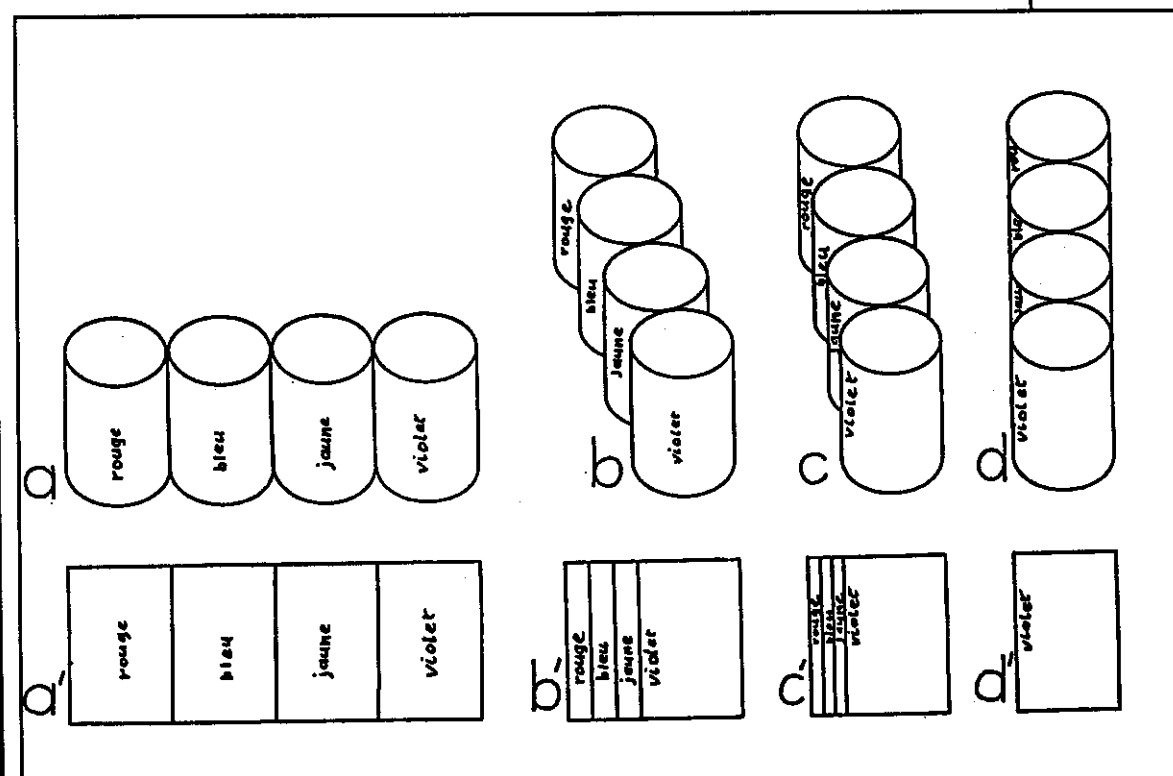
4. Les deux vues indépendantes à l'échelle 1, correspondant aux points de vue n° 1 et 7.

– deux feuilles au format «A 4» –

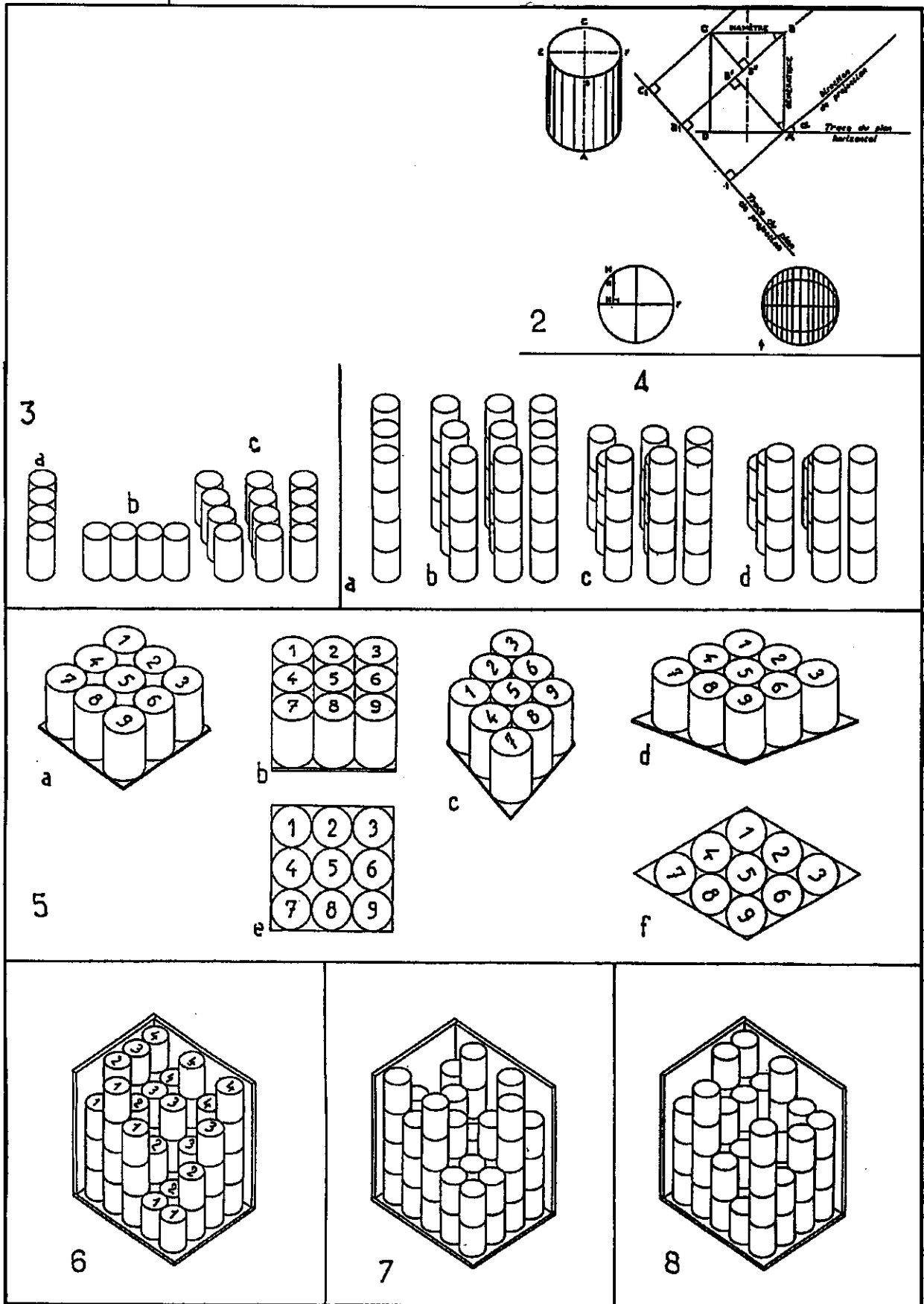


ALIGNEMENTS DE CYLINDRES

MODELES pour réaliser les deux PANNEAUX par collage des documents «A 4» sur des feuilles de 65 x 92 cm.

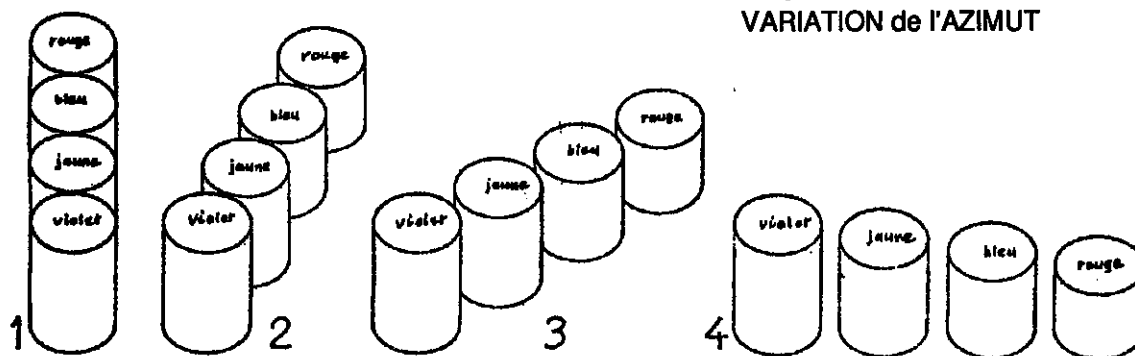
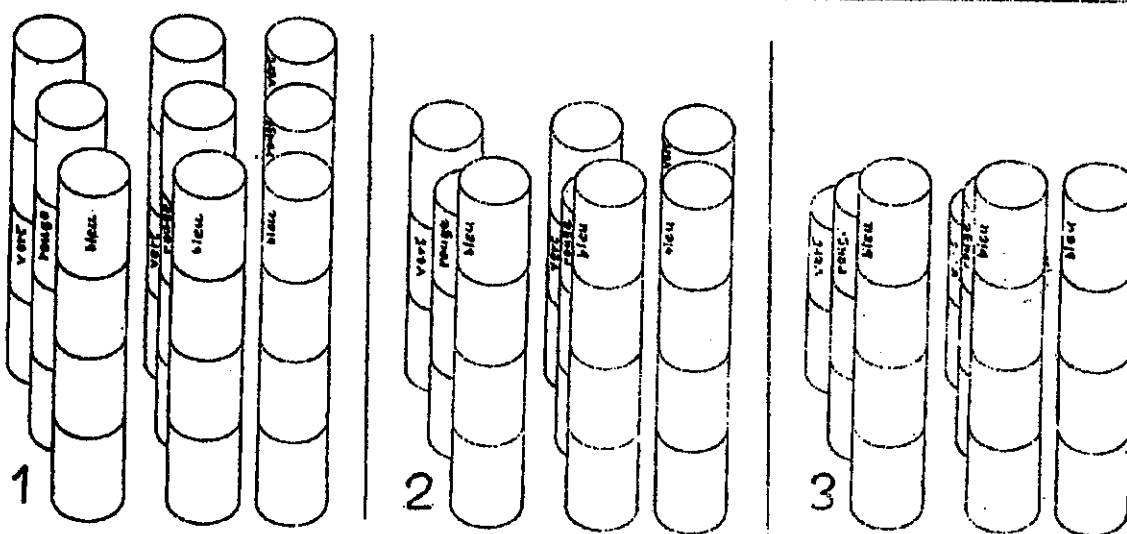
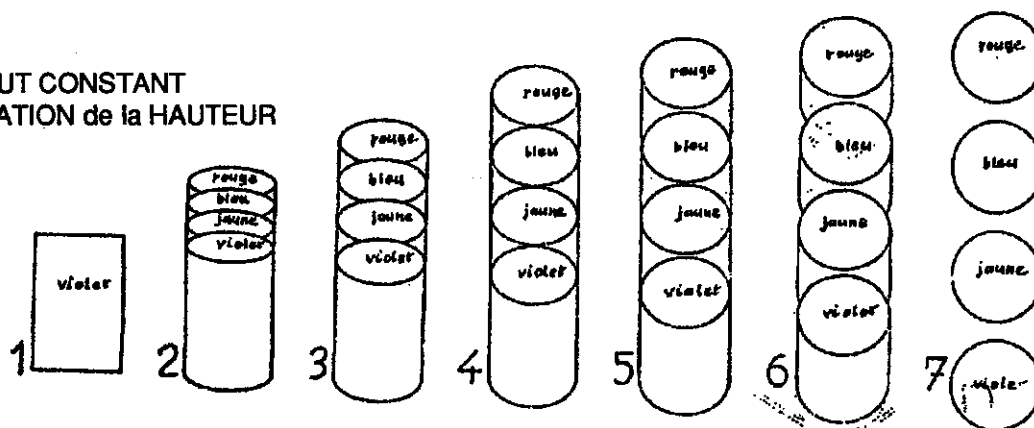


ASSEMBLAGE DE CYLINDRES (suite)



ALIGNEMENTS DE CYLINDRES

Détails vus - Détails cachés

HAUTEUR CONSTANTE
VARIATION de l'AZIMUTAZIMUT CONSTANT
VARIATION de la HAUTEUR

Le journal PLOT - Tarifs 1991

Nom et prénom
ou établissement

Adresse complète

Code postal et ville

Pour les 4 numéros de :

1986 ☐ 1990 ☐
1987 ☐ 1991 ☐
1988 ☐ 1992 ☐
1989 ☐ 1993 ☐

Ecole élémentaire ☐

Collège ☐

Lycée ☐

Supérieur ☐

Autre ☐

	Tarif normal et établissements*	Réabonnements et Adhérents Apmep	Supplément avion	Total à payer
Pour un an	120 F	90 F	+ 40 F	
Par année supplémentaire	+ 90 F	+ 70 F	+ 40 F	

Co-abonnement :

	Tangente	Jeune Archimède	Tangente & J.A.	Suppl' avion	Total à payer
Pour un an	215 F	150 F	275 F	+ 85 F	
Par année supplémentaire	195 F	130 F	255 F	+ 85 F	

* 2 exemplaires pour les établissements

Règlement à envoyer à l'APMEP Orléans-Tours — BP 6759, 45067 Orléans-Cedex 2 — CCP La Source 144009X

10%, 20% de RÉDUCTION* si vous êtes abonné au PLOT pour 1 an, 2 ans...

Les
Dossiers
et
Matériels
du PLOT
— Tarifs 91 —

Prix unitaire normal

(nombre) Coût
Total

50 F	Kit matériel Polyèdres n°1			
50 F	Kit matériel Polyèdres n°2			
50 F	Dossier Polyèdres dans l'espace			
50 F	Papiers accrochés (dossier et matériel)			
50 F	Plages et mathématiques (dossier matériel)			
50 F	Les Dossiers "Ludi-Math" 3 et 4	n° 3	n° 4	
50 F	Catalogue exposition : Mosaïque Mathématique			
100 F	Dossiers Spécial II			
200 F	La cassette vidéo TANGENTE			
10 F	Affiches pour la classe : Format minimum 40 x 60 cm			
10 F	1. Horizons Mathématiques	2. L'esprit informatique		
10 F	3. Volume impossible	4. Polyèdres dans l'espace		
10 F	5. Pavage hyperbolique(1)	6. Pavage hyperbolique (2)		
20 F	7. Triangles (1) ou (2)	8. Cercles et sphères		
20 F	Pour envoi des affiches roulées dans un tube (en option)			
50 F	Pochettes pour rétroprojecteur n° 5 à 10, 12 à 14			
100 F	Pochettes de diapositives n° 1 à 6			
100 F	Géode - miroir ☐	Sphère - image ☐		
	Sous total			
	Réduction pour les abonnés au Plot	pour 1 an 10% ☐	pour 2 ans 20% ☐	
	Frais d'envoi forfaitaires*			20 F
	TOTAL A PAYER			

NOM :

Adresse :

Code Postal :

* 20% pour les écoles élémentaires.

* Frais d'envoi par avion à compter en plus

Règlement à envoyer à l'APMEP Orléans-Tours — BP 6759, 45067 Orléans-Cedex 2 — CCP La Source 144009X

Bon de commande en souscription (1)

Le Secret des Pavages
116 pages. 80 F

nom:

adresse:

Maths en pièces,
116 pages. 80 F

ville :

Les deux : 150 F (franco de port)

(1) Adressez votre commande
accompagnée de son règlement à:

ADECUM B.P. 6759
45067 - ORLEANS - Cedex 2

