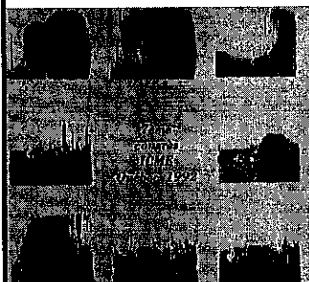


PLOT N° 592^{ème} trimestre 92

40 F

Directrice de publication
Marie-Laure Darche-Giorgi

Comité de Rédaction
Jacques Borowczyk,
Daniel Boutté, Gérard Chauvat,
Jacqueline Collet, Roger Crépin,
Luce Dossat, René Gauthier,
Georges le Nezet, Ginette Mison,
Serge Parpay, Raymond Torrent,
Michel Mirault, René Metregiste.

Rédaction
Michel Darche, Michel Clinard

Secrétariat
Madeleine Schlienger

Ventes
Patrick Marthe, Pierre Daudin

Publicité
Pascal Monsellier

Abonnements
PLOT APMEP
Université, BP 6759
45067 Orléans-Cédex 2

Prix d'abonnement
120 FF pour 4 numéros par an
Adhérent APMEP : 90 F.
Abonnement étranger : 120 F.

**Photocomposition
et maquette**
i.c.e.
Limoges

Photogravure et impression
Fabrègue - Limoges

Commission paritaire
63181 - ISSN 0397-7471

Editeur
Associations régionales
de l'APMEP de Poitiers,
Limoges, Orléans-Tours,
Nantes, Rennes, Rouen, Toulouse
Brest, Caen, Clermont-Ferrand et
La Réunion

Diffusion
Adecum (Association pour le
développement de l'enseignement
et de la culture mathématique).
Publié avec le concours
du Centre National des Lettres et
du Ministère de la Coopération

SOMMAIRE



" Spécial ICME VII "

éditorial	01
L'enseignement des maths à l'approche de l'an 2000.	
J.P. Kahane, président de la CIEM	02
La Formation mathématique des jeunes au Québec.	
R. Pallascio, Montréal	16
Réalités virtuelles et virtualités réelles.	
J.F. Colonna, LACTAMME Palaiseau	21
Forme-t-on de bons scientifiques au Lycée?	
J.P. Bourguignon, Palaiseau	26
Glossaire de didactique.	
Guy Brousseau, Bordeaux	28
Peut-on enseigner les mathématiques aux enseignants ?	
André Delessert, Genève.	33
Le concept d'ethnomathématique.	
Paul Gerdes, Mozambique	41
Abonnements	48

EDITORIAL

1992 ➡ 7^{ème} congrès international sur l'enseignement des mathématiques à Québec – du 16 au 23 août 1992

➡ 1^{er} congrès européen des mathématiques – La Sorbonne – du 6 au 11 juillet 1992

➡ 1^{er} congrès mathématique Junior – Cité des Sciences – 6 - 7 - 8 juillet 1992

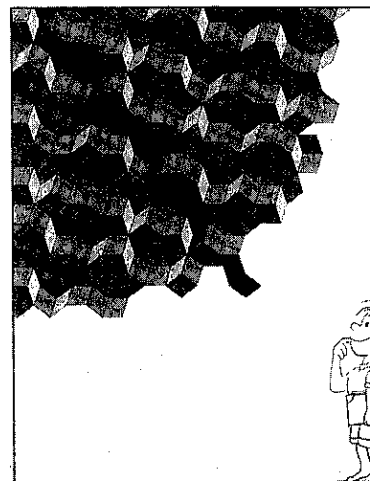
➡ Journées nationales de l'APMEP – Strasbourg – 24 - 25 - 26 octobre 1992

AN 2000

Année mondiale des mathématiques

MATHÉMATIQUES À VENIR

QUELS
MATHÉMATICIENS
POUR
L'AN 2000 ?



Prochain numéro :
mathématiques sans frontières

L'enseignement des mathématiques à l'approche de l'an 2000

Jean-Pierre KAHANE
Université Paris-Sud



Jean-Pierre Kahane est président de la Commission internationale sur l'éducation mathématique.

Ce texte est tiré d'une conférence qu'il a faite devant les professeurs de mathématiques du Québec et qui a déjà été publié dans "Mathématiquement Votre !" défis et perspectives mathématiques,

ARC éd.
distribué en France par ESKA,
27 rue Dunois, 75013 Paris.

La plupart des gens ne savent pas que les mathématiques sont une science vivante. Même chez ceux qui ont fait des études scientifiques, l'idée dominante est qu'en mathématiques tout est déjà trouvé; qu'au mieux, les mathématiques sont un exercice de l'esprit et un langage utile à connaître.

Il me paraît important de rectifier cette idée. Dans la première partie de cet exposé, je vais donc vous entretenir des mathématiques comme science vivante, participant au mouvement général des sciences, mais avec ses caractères spécifiques, et je tenterai de vous indiquer les tendances qui me semblent se développer ou s'annoncer.

Dans la seconde partie qui sera plus longue, il sera question de l'enseignement des mathématiques: de ses tendances actuelles, et de quelques contradictions essentielles qui expliquent la difficulté de cet enseignement. Je terminerai par quelques questions ouvertes.

Les mathématiques comme science

Quelques données

Les mathématiques participent au mouvement général des sciences. Actuellement, il paraît chaque année plus de 100 000 articles de mathématiques donnant des résultats originaux, recensés par les Mathematical Reviews. En chimie, c'est environ 800 000 articles qui sont recensés par les Chemical Abstracts. Dans toutes les sciences, il y a progression exponentielle de la production scientifique: un doublement environ tous les 10 ans. Il en est ainsi en mathématiques: au cours des 40 dernières années, on est passé de 2 500 à 100 000 articles, une multiplication par 2,5 tous les 10 ans. Cette progression exponentielle me paraît devoir se poursuivre encore longtemps, quel que soit le support de la communication scientifique, sauf accident majeur dans l'histoire humaine. En effet, de nouveaux sujets appa-

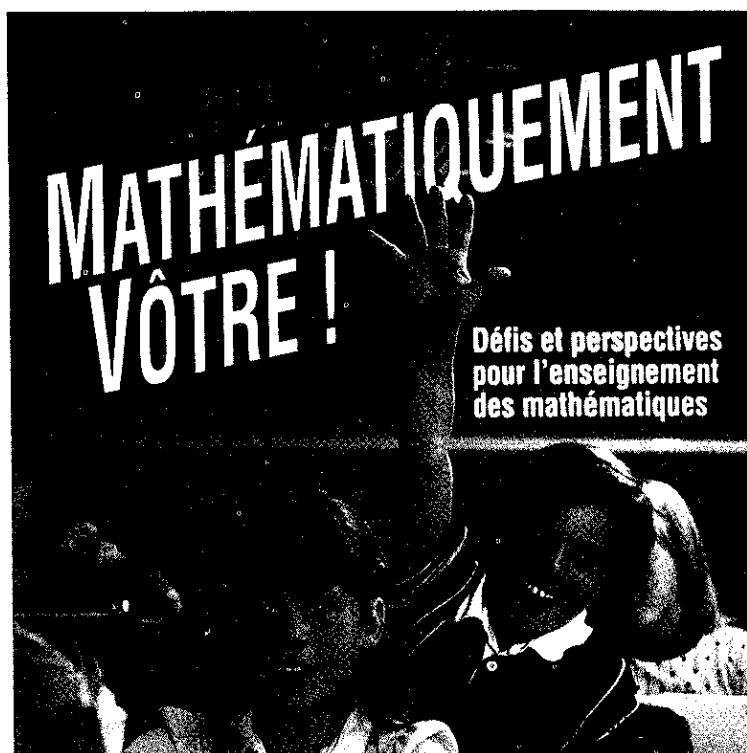
raissent, entraînant de nouvelles théories, exprimant de nouveaux problèmes. En parallèle se développent de nouvelles méthodes d'attaque, qui permettent de revisiter les problèmes non résolus ou les théories oubliées. D'autre part le nombre de pays participant à la production mathématique augmente. Ainsi rien ne permet de prévoir, actuellement, que cette progression exponentielle s'arrête.

Quelques caractères spécifiques...

Si les mathématiques participent bien au mouvement général des sciences, c'est avec des caractères spécifiques sur lesquels il vaut la peine de s'attarder. J'en distinguerai trois: 1. la généralité de leur objet; 2. le lien à leur histoire; 3. le lien à leur enseignement.

... leur généralité

Le propre des mathématiques n'est pas d'opérer sur des concepts abstraits: toutes les sciences introduisent et traitent leurs propres concepts, et ceux de la physique moderne sont particulièrement abstraits. Ce qui distingue les concepts mathématiques, c'est leur généralité. Les nombres et les formes peuvent avoir leur origine dans des activités de dénombrement ou de mesure; leur portée est de comprendre une multitude de processus naturels et d'activités humaines, et d'intervenir dans toutes les sciences. Les mêmes méthodes mathématiques interviennent dans des sciences et des technologies très diverses, comme outillage intellectuel commun. Elles peuvent être appelées par une science, et s'appliquer dans une autre; je pense à la théorie de l'information, issues des télécommunications, élaborée mathématiquement, et jouant un rôle essentiel dans la création de la biologie moléculaire. La rançon de cette efficacité, c'est l'éloignement de l'expérience commune; je pense aux espaces de toutes sortes qu'étudient les mathématiciens, et qui n'empruntent que quelques éléments à l'espace ordinaire. C'est pourquoi, souvent, les découvertes mathématiques sont difficiles à expliquer. Les mathématiques ne s'écartent cependant de l'expérience commune que pour découvrir et organiser les propriétés les plus générales et les plus universelles des représentations abstraites par lesquelles nous pouvons comprendre le monde et agir sur lui. C'est ce qui justifie la floraison contemporaine, et qui



pose en même temps un grave problème sur lequel je reviendrai, celui de son assimilation sociale.

... le lien à leur histoire

Les mathématiques ont un lien particulier avec leur histoire. Ce n'est pas seulement parce que c'est la plus ancienne des sciences. C'est aussi parce que leur passé n'est jamais mort - et c'est l'un des points où elles s'apparentent aux beaux arts. Les grands problèmes historiques (la quadrature du cercle, le problème de Fermat, l'hypothèse de Riemann, les problèmes de Hilbert en 1900) sont une référence constante pour les mathématiciens. Quand ils sont résolus (comme la quadrature du cercle, et la plupart des problèmes de Hilbert), c'est la preuve la plus éclatante du progrès des méthodes d'attaque. Quand ils résistent, ils constituent un défi du passé à l'avenir. Il est courant de voir dans des articles de mathématiques des références anciennes, alors que c'est très rare dans les autres sciences. Des mathématiciens d'aujourd'hui peuvent encore trouver des idées nouvelles en lisant des ouvrages du passé. Un exemple actuel est la résurrection des ensembles de Fatou et de Julia, admirablement étudiés en 1920, tombés dans l'oubli pendant 50 ans, explorés avec les moyens de l'informatique graphique depuis une dizaine d'années sous l'impulsion de Benoît Mandelbrot, objets de nouvelles études utilisant les mathémati-



ques les plus modernes, et jouant un rôle de paradigme dans la théorie des systèmes dynamiques. Il est d'ailleurs bon de souligner que l'intérêt actuel pour les systèmes dynamiques vient des biologistes et des physiciens. Cet exemple n'est pas isolé mais au contraire typique: les outils informatiques et les méthodes mathématiques modernes permettent de revisiter les oeuvres du passé et d'en extraire des idées neuves. J'ajoute que la lecture de grandes oeuvres du passé apporte aux mathématiques l'aspect humain qui leur manque parfois. Les mathématiques ont été créées par des hommes, souvent aussi intéressants à connaître que les grandes figures des littératures et des arts.

... le lien à leur enseignement

Je ne m'attarderai pas sur le lien des mathématiques à leur enseignement, parce que ce sera le thème de la seconde partie de cet exposé. Une raison de fond est que les mathématiques sont inséparables de leur mise en forme. Au départ, Bourbaki a été conçu comme un ouvrage de haut enseignement. Les grands traités d'analyse qui l'ont précédé en France sont issus de cours à l'École Polytechnique. Certains ouvrages fondamentaux d'Euler ou de Poincaré sont des rédactions de cours. Ainsi, recherche et enseignement ne s'opposent pas, mais s'appellent mutuellement. Cela dit, il faut observer que la recherche mathématique est le fait de quelques dizaines de milliers de gens dans le monde, tandis que l'enseignement des mathématiques implique des dizaines de millions d'enseignants et, virtuellement, des milliards d'élèves. Ce changement d'ordre de grandeur nous crée des problèmes et des devoirs spécifiques. Il nous faut, comme ailleurs, articuler enseignement, recherche, besoins sociaux, et c'est encore plus important et plus difficile que dans les autres branches du savoir.

Tendances actuelles dans la science

Revenons à ce mouvement des sciences auquel les mathématiques participent. Peut-on y déceler un sens, des tendances, des perspectives? Naturellement, ce terrain est glissant. Pour nous assurer, prenons quelque recul, et regardons la situation dans les années 1950.

La dominante des années 50: les structures

La tendance dominante en mathématiques était celle des structures. Je vous rappelle le titre de la première partie des *Éléments de mathématique* de Bourbaki: les structures fondamentales de l'analyse. La théorie des ensembles était la base. Ensuite se développaient les structures algébriques et topologiques: groupes, anneaux, corps, espaces vectoriels d'un côté, espaces topologiques, uniformes, métriques de l'autre. Les *Éléments* se déployaient comme un arbre, avec les trois grandes branches: structures algébriques, structures topologiques, fonctions d'une variable réelle. Sur le fondement de la théorie des ensembles, les mathématiques, longtemps dispensées en sous-disciplines, retrouvaient leur unité dans une puissante élaboration des structures. De façon significative, les *Éléments de mathématique* s'écrivent sans «s» final: ce sont les éléments fondamentaux de la mathématique.

Cette tendance était loin d'être propre aux mathématiques. Dans le langage scientifique de l'époque, les structures interviennent constamment: structures de la matière, structures sociales, structures de la pensée. Par exemple, en psychologie, Piaget dégagait une genèse des structures mentales très proches des structures algébriques. C'est une grande époque de la science. En mathématiques, c'est l'aboutissement des efforts menés pendant un siècle pour échapper aux ambiguïtés et aux paradoxes, et pour retrouver la simplicité dans l'écheveau des résultats accumulés. Il serait tout aussi injustifié de dire aujourd'hui «à bas Bourbaki» qu'en d'autres temps «à bas Euclide».

La dominante des années 80: les interactions et les modèles

Cela dit, la tendance dominante aujourd'hui n'est plus celle des structures. En mathématiques, le sentiment très profond qu'ont tous les chercheurs de l'unité de leur science n'est plus fondée sur le socle intangible de la théorie des ensembles. Au contraire, la théorie des ensembles s'est avérée une théorie mathématique comme les autres, avec différentes axiomatiques possibles, et des variations selon les applications. L'unité de l'arbre n'est plus dans les racines. Elle est dans le fécondement croisé des différentes branches, dans l'interaction souvent imprévue de méthodes d'origines diverses pour attaquer et pour résoudre un problème. L'unité n'est plus dans les racines et les structures, mais dans l'entrelacement des rameaux, des bourgeons et des fleurs.

Et cela, encore une fois, n'est pas propre aux mathématiques. L'interaction entre disciplines est un trait de notre époque. Les mathématiques n'interagissent pas seulement en leur sein, mais avec l'ensemble des autres sciences, de façon impétueuse. Elles retrouvent là une grande tradition, celle de Newton et de Laplace. Mais aujourd'hui, ce n'est pas seulement avec la physique que les mathématiques interagissent; c'est aussi avec la biologie, la chimie, l'économie (comme il n'y a pas de Prix Nobel en mathématiques, il se trouve que les mathématiciens titulaires du Prix Nobel le sont au titre de l'économie ou de la chimie), et surtout l'informatique, qui donne des outils aux mathématiques comme à toutes les sciences, mais qui est aussi pour les mathématiciens une mine d'idées et de problèmes.

L'interaction entre les mathématiques et les autres sciences ou technologies se traduit surtout, actuellement, par la construction de modèles mathématiques. Ces modèles sont indispensables, en particulier, aux grandes industries - le cas typique est l'industrie spatiale. On trouve maintenant des modèles dans toutes les sciences, comme naguère on y trouvait des structures. Dans certains cas - je pense au modèle cosmogonique standard en astrophysique - le modèle est une véritable théorie, élaborée sous forme d'hypothèses, de déductions, et de confrontation à la réalité. Cependant, en général, le modèle



a une portée locale, il permet des simulations sur ordinateurs, il est adopté ou rejeté suivant que ces simulations correspondent aux observations et aux expériences, et il permet lorsqu'il est validé des prévisions à plus ou moins court terme. La modélisation est indispensable et elle est partout. Cependant elle n'est pas sans danger. D'une part, pour étudier un phénomène, il est souvent économique de construire un modèle et de faire des simulations sur ordinateur, plutôt que de mener une expérimentation sur l'objet lui-même. Mais alors c'est le modèle qu'on étudie, et pas le phénomène. D'autre part, il est souvent plus facile d'essayer un modèle que de bâtir une théorie. Et en effet, on peut craindre un déclin de la pensée théorique si les conceptions liées aux modèles prennent une trop grande part dans la pensée scientifique.

Une tendance qui émerge: un renouveau de la pensée théorique

Heureusement, déjà des signes s'annoncent d'un renouveau de la pensée théorique. En effet, les modèles locaux ne peuvent se substituer à un effort théorique d'ensemble quand il s'agit de l'intégration de phénomènes complexes, comme les systèmes biologiques, les systèmes économiques, les relations entre productions industrielles et environnement, ou les changements globaux au niveau de notre planète. Il se peut que l'interaction des sciences soit le signe avant-coureur d'une nouvelle réflexion théorique, aussi profonde que celle du début du siècle, et mariant les acquis des structures et des



modèles dans une approche plus globale de la réalité.

Ainsi reviennent à l'ordre du jour des questions philosophiques anciennes. Je pense à la relation entre le déterminé et le prévisible, sur laquelle Hadamard il y a un siècle puis Poincaré avaient apporté des lumières qui mériteraient de passer dans la conscience commune. Je pense aussi à la nature du travail du mathématicien, et à celle des objets mathématiques. Les objets mathématiques sont-ils une création de l'esprit humain, donc un produit de l'histoire humaine, ou une réalité extérieure à l'homme, comme le proclamait Platon? Ce débat traverse tous les entretiens entre le biologiste Jean-Pierre Changeux et le mathématicien Alain Connes, publiés récemment sous le titre ingénieux et ambigu: Matière à pensée. Les mathématiciens sont-ils des inventeurs ou des découvreurs? Pour résoudre des problèmes, ils forgent des outils, et ces outils deviennent eux-mêmes objets et matière à problèmes. Est-ce là l'origine des objets mathématiques, ou l'origine est-elle ailleurs?

Ces questions ne sont pas nouvelles. Mais ce qui est nouveau, c'est l'intérêt du milieu scientifique pour ces questions, et le retentissement qu'elles commencent à avoir dans l'opinion publique.

Tendances actuelles dans l'enseignement

Une crise au plan mondial

Il est temps d'attaquer la seconde partie de cet exposé, c'est-à-dire ce qui se dessine pour l'enseignement des mathématiques.

Il faut d'abord revenir sur cette donnée: l'enseignement des mathématiques et une activité sociale qui est le fait de dizaines de millions d'enseignants et qui intéresse des milliards d'enfants et de parents dans le monde. Cette activité dépend des conditions sociales, des langues, des particularités nationales. Le seul trait commun à tous les pays, c'est qu'elle est en crise. Les enseignants ne font plus face aux besoins. Dans les pays où la croissance démographique est la plus importante, les effectifs d'enfants augmentent, les capacités d'accueil et de formation ne suivent pas, l'analphabétisme progresse. Dans les pays les plus développés, les carrières de l'enseignement sont moins attractives que celles de la production, du marketing ou de la finance, et cela touche particulièrement les étudiants qui pourraient se destiner à l'enseignement des mathématiques. Dans les deux cas, on manque d'enseignants, et la situation s'aggrave. Les récents bouleversements à l'Est de l'Europe vont étendre cette situation de crise à des pays qu'elle avait jusqu'ici relativement épargnés.

Je ne me joindrai pas à ceux qui disent qu'avec moins on doit faire plus et mieux. Il faut simultanément faire mieux, faire plus, et obtenir plus. Les mathématiques, à cause même de leur généralité et de leur universalité, doivent être un bien commun à toute l'humanité.

Quelques aspects universels...

... langage

L'histoire a fait que c'est un langage universel. Si j'écris $93 + 6 = 99$ l'important

n'est pas tant que c'est vrai; c'est que c'est compris de la même façon partout, et que c'est beaucoup plus parlant que l'expression de cette égalité en langue naturelle.

... sport

C'est aussi un sport universel. Les problèmes mathématiques sont un excellent exercice de l'esprit; c'est sans doute le plus proche de l'activité professionnelle de recherche scientifique. Les compétitions mathématiques nationales ou internationales peuvent jouer un rôle analogue aux compétitions sportives, pour stimuler des jeunes et stimuler les opinions publiques, et aussi pour l'essor des nations.

... unité sociale

Cependant, dans le choix des matières à enseigner et dans celui des méthodes d'enseignement, le plus important selon moi est l'utilité sociale. Qu'est-ce qui, aujourd'hui, entre le plus en résonance avec les besoins sociaux? Je me bomerai à quelques exemples.

Le choix des matières...

... la géométrie

L'origine de la géométrie est la mesure de la terre, l'arpentage, la division des champs, la triangulation nécessaire à la navigation. En première approximation, la terre est plate, et la géométrie qui s'impose est la géométrie plane. Cependant, dès l'antiquité, la géométrie de l'espace s'introduit, en relation avec l'astronomie et avec l'architecture. Aujourd'hui, la terre est ronde pour tout le monde: c'est la planète bleue que les enfants voient à la télévision. Il est étrange que la géométrie de la sphère ait si peu de place dans notre enseignement. Mais surtout, les changements d'échelle sont constants. L'enfant de Baudelaire rêvait devant les cartes et les estampes. Aujourd'hui, les enfants passent en un instant de leur chambre à des images de pays lointains ou d'exploration spatiale. Leur environnement n'est plus seulement la famille et le quartier: c'est la planète, l'univers, et aussi les microbes, le sida, le microscopique et l'invisible. Comment s'y retrouver? Les images mentales les plus efficaces sont les images géométriques: les images classiques de la géométrie plane, les triangles, les cercles, avec l'infinie richesse de



leurs propriétés; les images de base de la géométrie de l'espace, le cube, la sphère; les symétries, les déplacements et les transformations de ces figures; les similitudes qui permettent de traduire les changements d'échelle en une sorte de zoom intellectuel.

Des images géométriques plus abstraites sont aussi nécessaires dans la vie courante. À l'occasion des déclarations de revenus pour les impôts, Laurent Schwartz me faisait part récemment d'une observation que lui avait faite Georges Poitou, le directeur de l'École Normale Supérieure, décédé il y a quelques mois. On donne aux contribuables français des formules qui leur permettent de calculer leur impôt en fonction de leur revenu, convenablement normalisé. Il y a différentes tranches de revenu, et, dans chaque tranche, la formule de l'impôt est une fonction affine du revenu, du type $y = ax + b$. Naturellement, après avoir calculé leur impôt selon cette formule, il arrive que les contribuables s'inquiètent: que se passerait-il si je changeais de tranche? Mon impôt augmenterait-il, diminuerait-il? S'ils appliquent à leur revenu la formule concernant une autre tranche, ils constatent régulièrement qu'ils auraient à payer moins: la formule donnée pour leur tranche leur est ainsi la plus défavorable. Tout cela est un grand mystère si l'on ne dit pas la chose simple: l'impôt est une fonction continue, croissante et convexe du revenu, affine par morceaux. Si l'on se représente son graphe, le mystère disparaît, et la raison d'être des formules apparaît. Poitou trouvait que cette application de la notion



géométrie de convexité aurait bien sa place dans l'enseignement obligatoire en France.

L'utilité sociale de la géométrie est évidente. Si je me suis attardé sur ce thème, c'est que la géométrie a été malmenée dans les programmes des années 1970, que les élèves ne savent plus de géométrie, et que leurs professeurs en sont au même point. C'est un domaine où la rectification est urgente. Il faut varier les approches, développer l'intuition, donner l'usage de la rigueur. Comme on ne peut pas tout enseigner, des aperçus historiques pourraient permettre de situer ce qu'on enseigne dans un ensemble plus vaste. Tout cela est difficile et nécessite, dans chaque pays, beaucoup de réflexion et d'efforts.

... les probabilités

Je serai bref sur le second exemple. Il s'agit des probabilités, dont l'enseignement pose également des problèmes redoutables. À tous les niveaux, individuel ou collectif, qu'il s'agisse d'accidents de voiture, d'inondations, d'accidents dans les centrales nucléaires, de catastrophes géologiques, l'évaluation des risques est devenue une nécessité. La notion de probabilité est l'outil conceptuel de ces évaluations. Il faut savoir reconnaître et utiliser l'indépendance des événements. La nature, la société, les jeux de hasard organisés, donnent en permanence des séries d'événements indépendants ou de

variables aléatoires indépendantes. Il faut comprendre que le passé ne donne alors aucune information sur le futur, et que cependant, sous certaines hypothèses simples, le comportement futur de ces séries obéit à des lois, qu'on peut pour une part découvrir expérimentalement, et qu'on peut établir en toute rigueur. Le simple jeu de pile ou face est une mine inépuisable de résultats mathématiques profonds. Là encore, l'intuition et la rigueur sont tous deux à cultiver. Il s'agit, au plan social, d'un élément clé pour le développement de l'esprit critique. Le complément culturel nécessaire d'un enseignement de probabilités, c'est donc une analyse de phénomènes naturels ou sociaux où elles interviennent: les séries chronologiques, les jeux, les sondages, les statistiques, les assurances. La simulation du hasard sur ordinateur pose d'ailleurs des questions fascinantes: il n'y a rien de plus dissimilable qu'une suite automatique, parfaitement déterministe, et une suite aléatoire, parfaitement non-déterministe. Et pourtant, dans la pratique, on utilise des suites automatiques pour simuler des suites aléatoires. L'analyse des suites automatiques est relativement récente, mais il est possible, à titre de récréation mathématique, d'en voir quelques-unes.

... les algorithmes

Mon troisième exemple est la pratique des algorithmes. Dans la production et dans les services, l'informatisation et l'automatisation transforment les métiers en accroissant la part de programmation et de contrôle. L'outil conceptuel de la programmation est l'algorithme, c'est-à-dire une procédure systématique de résolution d'une classe de problèmes. L'algorithme d'Euclide, sous son double aspect de mesure de longueurs, et de recherche du plus grand commun diviseur, est le paradigme des algorithmes. Il est d'ailleurs intéressant de noter comme la mode évolue. Il y a 30 ans, la théorie du pgcd était faite par la méthode brillante des idéaux, qui est très rapide mais non constructive. Aujourd'hui de nouveau, c'est l'algorithme d'Euclide, l'algorithme des divisions successives, qu'on enseigne. La raison en est qu'un tel algorithme passe immédiatement sur n'importe quelle calculatrice, et qu'il est donc pratique et efficace. Dans l'enseignement, il est important de faire choix des bons algorithmes et de laisser tomber tout ce qui vieillit. Quand j'étais

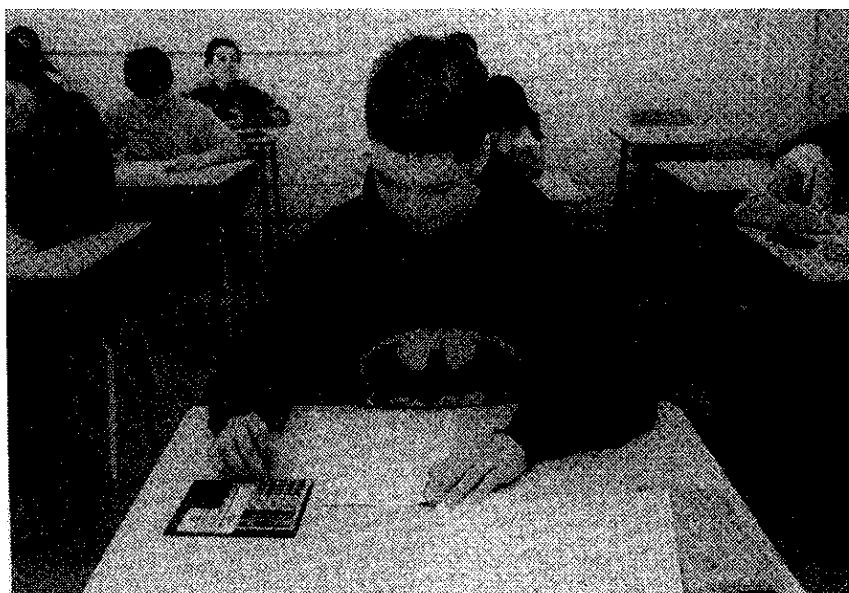
jeune, on apprenait un algorithme d'extraction des racines carrées, qui est tout juste bon pour la poubelle. Pour la répartition des sièges après les élections, on utilise encore des algorithmes du début du siècle, qui convenaient bien au calcul manuel, et qu'il faudrait remplacer par des algorithmes de résolutions d'équations, très faciles à programmer. Les algorithmes sont un moyen d'exprimer la puissance de la pensée, aidée par les machines. Leur actualité vient évidemment de l'informatique.

... les calculatrices

Je terminerai ces exemples en évoquant l'influence des calculatrices. Les calculatrices peuvent être dans la poche de tous les élèves. Il faut bien les choisir et bien les utiliser. Des progrès remarquables ont été faits à cet égard en peu d'années. Les calculatrices permettent de renouveler le stock des problèmes de calcul en travaillant sur des données numériques réelles. L'important n'est plus de savoir multiplier ou diviser, mais de savoir s'il faut multiplier ou diviser. L'usage des calculatrices est donc, fondamentalement, propice au raisonnement. De plus, les calculatrices sont loin de supprimer le besoin du calcul mental. Au contraire, le calcul mental rapide, l'évaluation des ordres de grandeur, deviennent un moyen indispensable pour devancer la machine et pour la contrôler. L'écriture des nombres en virgule flottante est une double initiation à l'écriture décimale des nombres réels, et à la fonction exponentielle. Les possibilités de programmation permettent d'introduire diverses techniques d'approximation des nombres réels par des rationnels, et en particulier les fractions continues. L'usage des calculatrices pousse à la théorie.

Quelques contradictions essentielles

Dans ce choix que je viens de faire - géométrie, probabilités, algorithmes, calculatrices - il y a une grande part d'arbitraire. Je n'ai parlé ni d'algèbre, ni d'analyse, ni de logique, ni de mathématiques discrètes, ni de modélisation, ni de l'interaction avec les autres disciplines scientifiques et avec les technologies modernes. Doit-on éliminer de l'enseignement toutes ces branches? Certainement pas. Peut-

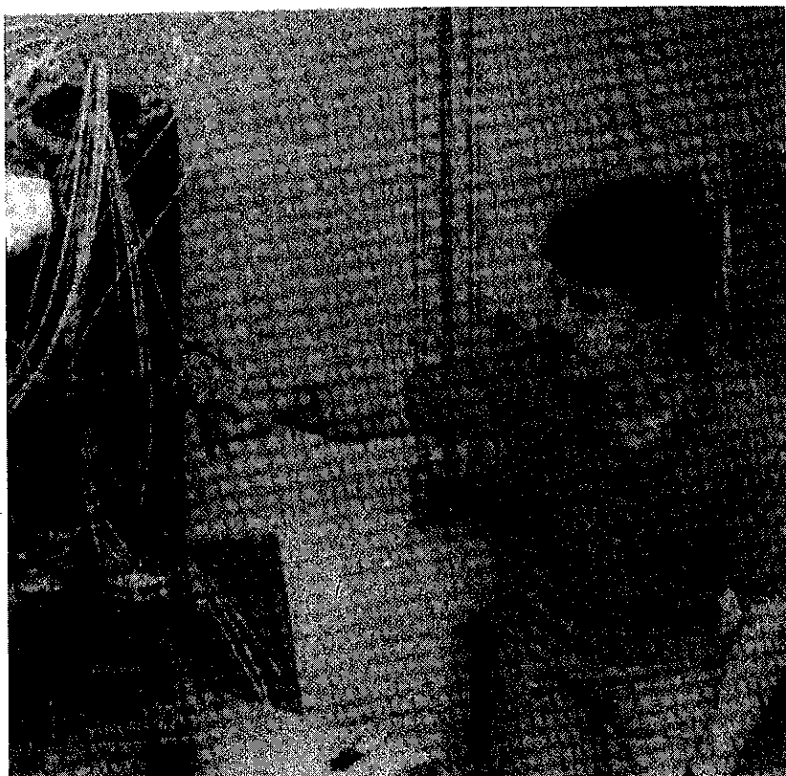


on éviter de faire un choix? Non plus.

Première contradiction:

on doit tout enseigner, on ne peut pas tout apprendre

Nous nous heurtons ici à une première contradiction, sur laquelle je désire insister. Il faut tout enseigner, et on ne peut pas tout apprendre. Pourquoi faut-il tout enseigner? J'entends, évidemment, tout ce qui constitue un progrès significatif des connaissances et des méthodes de la science. Parce que la raison d'être de la science est son assimilation par la société. Rien par exemple, dans ce que produisent actuellement les mathématiciens, ne doit rester tabou, secret, inaccessible. Il y aurait grand péril, et pour la science, et pour les citoyens, si la recherche scientifique avait pour résultat social de créer, comme Paul Langevin le redoutait déjà en 1945, une avant-garde perdue et une arrière-garde traînante. On sait que le péril est sérieux en mathématiques, et c'est un thème de réflexion sous-jacent à la dernière étude menée par la CIEM, sur la vulgarisation (popularisation) des mathématiques. En fait, la vulgarisation renvoie à l'enseignement. Tout ce qui est important a vocation à être enseigné, et la quantité des choses importantes et nouvelles croît exponentiellement. Comme la capacité de chacun est limitée, il faut admettre que tout le monde n'apprendra pas les mêmes choses. Il n'y a donc pas à faire un choix, mais plusieurs, en fonction de la destination des études. Au niveau des recherches actuelles, si l'on veut que les résultats puissent être assimilés par la société, un immense effort est à faire: il



faut des articles de synthèse, des traités, des cours avancés, et naturellement un nombre d'étudiants avancés bien plus grand qu'aujourd'hui. Pas plus que les autres, ceux qui enseignent les mathématiques ne sont capables de tout savoir en mathématiques. Mais plus encore que les autres, ils ont besoin qu'on leur ouvre les portes du savoir, qu'on les initie à des choses nouvelles, et qu'aucune curiosité ne leur soit interdite. C'est ainsi qu'ils peuvent le mieux se préparer aux évolutions à venir des programmes et du métier.

Heureusement, la progression des mathématiques ne se fait pas seulement par accumulation, mais aussi par refonte et simplification. La formule de résolution de l'équation du second degré est le résumé, en une ligne, de gros livres arabes et de siècles d'efforts. La notion de groupe, dont l'axiomatique est si simple, réunit une foule d'objets mathématiques dont les théories s'étaient développées séparément. L'axiomatique de Kolmogorov pour les probabilités a aisément triomphé de toutes les approches antérieures parce qu'elle est à la fois facile et puissante. On peut multiplier les exemples. L'enseignement, naturellement, doit tirer parti de ces refontes et simplifications.

Deuxième contradiction:
on ne peut enseigner la science sans trahir la démarche scientifique

Or là apparaît une seconde contradiction. Enseigner la science devrait être initier à la démarche scientifique. Mais la démarche scientifique est lente, faite d'erreurs, de tâtonnements. Il est impossible, simplement impossible, de faire découvrir aux élèves ce que des siècles d'efforts des meilleurs esprits ont fini par dégager. On ne peut enseigner la science qu'en inversant l'ordre de la découverte, en partant de la simplicité laborieusement acquise pour aller, au moyen de la théorie, à la rencontre de la multitude des faits isolés qui, au fond, justifient la théorie. C'est ce qu'on appelle la transposition didactique. Cela n'est pas propre aux mathématiques. Tout enseignement scientifique prend pour point de départ l'aboutissement historique d'efforts innombrables. On a raison d'enseigner aux élèves que la Terre tourne autour du Soleil en pivotant sur elle-même, à condition qu'on leur montre soigneusement comment cela explique les jours et les nuits, les saisons, les mouvements des astres. On a raison d'enseigner les électrons et les atomes, les photons, le code génétique, sans chercher à faire découvrir tout cela aux élèves. L'important est d'aller assez loin pour rejoindre l'expérience commune. En mathématiques cependant, cette transposition didactique prend une forme extrême. On part de définitions apparemment très simples, de règles bien précises, on construit la théorie pas à pas, soigneusement, sans laisser de trou. Même une machine serait capable de comprendre... et nos élèves ne comprennent pas. C'est que justement nos élèves ne sont pas des machines. Ils sont en attente du moment où la théorie rejoindra leur curiosité et leurs intérêts. Nos définitions si simples sont, au fond, très difficiles à comprendre, parce qu'elles sont un élixir de réflexions théoriques; c'est au niveau des définitions et des axiomes que, selon J. L. Massera, se dissimule la dialectique propre aux mathématiques. Il est aisé de voir, dans l'histoire contemporaine des mathématiques, comment naissent des concepts: pour résoudre un problème, on a besoin de forger des outils; au delà de la solution du problème, l'outil (le lemme) peut avoir d'autres usages et mérite de devenir théorème; pour exposer le théorème et l'énoncer simplement, on introduit des définitions. Le concept est désormais figé dans la définition, mais la définition, d'emblée, est riche de la théorie qui, historiquement, lui a donné naissance. Qu'on

songe, plus simplement, à la définition du cercle par Euclide. Elle ne s'impose que lorsqu'on en a vu la richesse des conséquences. Dans les cercles que voient ou que font les élèves, il est assez rare que le centre apparaisse; en particulier, quand ils se tiennent par la main et font une ronde, ils commencent par embrasser la plus grande surface possible, et quand ils se mettent en mouvement ils s'arrangent pour ne pas rompre la chaîne; cette expérience élémentaire ne leur sera jamais restituée dans l'enseignement de la géométrie élémentaire, puisqu'il s'agit de la propriété extrême du cercle dans le problème des isopérimètres et de la propriété de courbure constante.

On ne peut pas et on ne doit pas échapper, en mathématiques, à la démarche hypothético-déductive. Mais il faut savoir qu'elle est contraire à l'expérience commune, et contraire à la démarche de la découverte. Il est très important de la rendre attrayante, c'est-à-dire de montrer rapidement sa puissance: la géométrie, là encore, donne d'excellentes possibilités. Mais aussi, il faut compléter la démarche hypothético-déductive par d'autres approches plus voisines de la recherche et de la découverte. Heureusement, l'enseignement des mathématiques a une grande tradition des problèmes, au point qu'on peut transformer chaque pas de la démarche hypothético-déductive en problème: c'est ce que nous a très bien montré Polya, en observant que chez Euclide même, chaque théorème est un défi, et chaque démonstration la réponse à ce défi. Dans l'étude d'un problème mathématique, chaque enfant peut trouver une partie de la concentration, des souffrances et de la joie qu'éprouvent tous les mathématiciens en situation de recherche. Un autre correctif à la démarche hypothético-déductive, c'est d'humaniser la chose. L'histoire de certains sujets peut être la meilleure façon de voir la démarche scientifique dans son ensemble, et de comprendre qu'en mathématiques comme ailleurs on hésite, on erre, mais qu'au total on progresse et on progressera.

**Troisième contradiction:
pour apprendre, il faut savoir
désapprendre**

Ainsi donc, les mathématiques poussent à l'extrême la transposition didactique, et en même temps donnent d'excel-



lents antidotes à ses effets. Cela dit, j'ai opéré une simplification abusive en laissant entendre que, dans l'enseignement des mathématiques, on devait partir des notions les plus simples, les plus générales, les plus puissantes, qui constituent le résultat le plus précieux du progrès de la science. C'a été, pour une part, l'illusion des années 1970. Or ici apparaît une troisième contradiction. Il est séduisant d'essayer de partir du plus simple et du plus général, pour avoir d'emblée le meilleur cadre de pensée. C'est ainsi que de bons esprits se sont égarés en pensant qu'on devait enseigner la géométrie affine avant d'enseigner la géométrie euclidienne. Mais ce n'est pas ainsi que procède l'esprit humain. S'agissant non plus de figures mais de nombres, il est évident qu'on ne pourra apprendre les nombres complexes qu'après les réels, les réels après les rationnels, les rationnels après les entiers. À chaque stade, les notions nouvelles intègrent les anciennes. Mais, très souvent, les représentations mentales, les habitudes, les réflexes associés à la notion ancienne entrent en contradiction avec la notion nouvelle. Ce qui rendait opératoire la notion ancienne devient un obstacle pour acquérir la notion nouvelle; c'est exactement ce que Bachelard, dans l'analyse des révolutions scientifiques, appelle un obstacle épistémologique. Par exemple, lorsque des enfants ont acquis une bonne habitude des nombres entiers écrits sous forme décimale, ils éprouvent ordinairement des difficultés avec les nom-



au contraire parce qu'ils se trouvent très bien avec ce qu'ils savent, et que les choses nouvelles dérangent. Les obstacles épistémologiques sont vraisemblablement la cause de nombreux retards ou échecs dans l'apprentissage des mathématiques. C'est pour lever ces obstacles que des leçons particulières peuvent paraître s'imposer. Et il se peut que, dans l'avenir, la pédagogie des mathématiques doive intégrer le diagnostic des blocages, et l'aide individuelle aux élèves qu'arrêtent ces obstacles.

Résumé et premières conclusions

Il est bon d'avoir conscience des difficultés inévitables que nous rencontrons dans l'enseignement des mathématiques. Je résume. Il y a contradiction entre la croissance exponentielle de la production scientifique à assimiler et la capacité limitée d'assimilation de chacun. Il y a contradiction entre l'ordre de l'exposé et l'ordre de la découverte. Il y a contradiction entre les notions nouvelles à acquérir et le système de représentations lié aux notions précédemment acquises. Ce n'est pas parce que les professeurs sont mauvais ou parce que les élèves sont mauvais qu'il y a tant d'écart entre les besoins et les réalisations, tant d'incompréhensions, de retards et d'échecs. C'est parce que ces contradictions n'ont pas encore été prises en compte de manière suffisante. Il nous faut, face à la première contradiction, un plus grand nombre d'étudiants, de meilleurs instruments pour la culture mathématique, et des parcours variés pour l'apprentissage des mathématiques. Face à la seconde, il nous faut être attentifs à ce que Brousseau appelle le contrat didactique, veiller à préserver la phase d'institutionnalisation des raisonnements et des résultats, mais aussi donner aux élèves la pratique et le goût des problèmes, et leur montrer, par des exemples bien choisis, que le progrès des mathématiques est une partie de la grande aventure humaine. Face à la troisième, il faut que les enseignants connaissent bien les blocages possibles, qu'ils aient l'œil critique pour diagnostiquer ces blocages lorsqu'ils apparaissent chez les élèves, et qu'ils soient assez nombreux et disponibles pour leur prêter une aide personnalisée si c'est nécessaire. □

bres décimaux. Une expérience classique est de demander à une classe, deux ou trois semaines après l'introduction des nombres décimaux, quel est le plus grand, 2,714, ou 3,17; pour la moitié des élèves, le résultat est ce que vous devinez: le plus grand nombre est celui qui s'écrit avec le plus de chiffres.

Or, nous enseignons aujourd'hui beaucoup plus de notions mathématiques qu'autrefois. Il y a deux siècles, Lazare Carnot, qui était ingénieur et mathématicien avant de devenir révolutionnaire, considérait que les nombres négatifs ne devaient pas être appelés des nombres. Aujourd'hui, les enfants connaissent les nombres négatifs dès qu'ils lisent un thermomètre. Il y a un siècle, les puissances de 10 étaient affaire d'ingénieurs ou de savants. Aujourd'hui, avec les calculatrices, c'est une connaissance commune. Enseigner plus de choses n'est pas un choix, mais une nécessité. Il faut donc s'attendre à des obstacles, à des blocages de la part de nos élèves. Ils peuvent être réticents à apprendre des choses nouvelles non parce qu'ils sont paresseux ou n'ont rien dans la tête, mais

Quelques questions ouvertes

Ce pourrait être là ma conclusion. Cependant il est dangereux de conclure par un résumé, et plus encore d'apporter des réponses aussi péremptoires aux questions que j'ai soulevées. Je préfère donc, en conclusion, me tourner vers vous et vous faire part de quelques problèmes dont je suis loin de deviner la solution.

... les parcours

1. Admettons que, pour favoriser l'assimilation des mathématiques et pour répondre aux besoins des divers métiers, il faille des parcours variés. Comment en assurer la cohérence? Comment marier cela avec l'exigence d'un langage commun et de références communes? Quel est donc la partie commune à assurer? Si l'on renonce à la formule d'un tronc commun et de branches qui en sortent, comment varier les approches en maintenant la rigueur? Comment éviter de tronçonner les matières et de faire disparaître l'unité de la mathématique? Comment assurer une progression des connaissances à partir de portes d'entrée différentes? Comment choisir ces portes d'entrée, les méthodes à suivre, les résultats à atteindre?

... les choix

2. Admettons qu'il y ait des choix à faire, éventuellement des choix multiples, et que les matières à enseigner ne soient pas intangibles. Admettons que ces choix reposent sur la confrontation entre les possibilités qu'ouvre la recherche mathématiques et les besoins sociaux exprimés ou pressentis. Qui va faire les choix? Qu'apporte la didactique des mathématiques quand il s'agit de matières non encore enseignées, ou de méthodes non encore pratiquées? Quelle est la collaboration à mettre en oeuvre pour que les didacticiens participent avec les mathématiciens à l'expérimentation et à la définition de nouveaux programmes ou de nouvelles filières? Qu'y a-t-il comme exemples à cet égard ici, en France, et dans tous les pays du monde?

... la culture

3. Admettons que les choix soient évolutifs. Pour les appliquer, les enseignants ont alors besoin d'une bonne culture mathématique. D'où peut leur venir cette culture? Comment peuvent-ils entretenir un lien avec la science vivante? De quels documents disposent-ils à cet effet? Quels contacts ont-ils avec les mathématiciens professionnels et avec les utilisateurs des mathématiques? N'y a-t-il pas une mission à rappeler à la communauté des chercheurs mathématiciens, celle de la diffusion des connaissances acquises, et tout particulièrement de cette diffusion auprès des professeurs de mathématiques de tous les niveaux?

Et pour conclure, tout ce faisceau d'interrogations ne constitue-t-il pas une bonne conclusion?

Quelques références

• Les mathématiques comme science

Les données (sous une forme légèrement différente: comparaison entre 1958 et 1988) et la plupart des idées se trouvent dans mon article Mathématiques, quelles tendances, quels enjeux, La Pensée 270-271 (1989), 89-99.

• Tendances actuelles dans la science

Les livres cités sont:



N. BOURBAKI Éléments de mathématique, les structures fondamentales de l'analyse. Paris, Hermann, à partir de 1945.

J.-P. CHANGEUX et A. CONNES Matières à pensée. Paris, Odile Jacob, 1989.

Pour apprécier les dominantes actuelles, on peut consulter le Rapport de conjoncture 1989 établi par le Comité national de la recherche scientifique et publié par le Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS, Paris 1990). (cf PLOT n°51) Une version allégée de ce rapport, beaucoup plus facile à lire mais moins riche, est le livre: Les chemins de la science (Maurice Arvonny, Annick Miquel, Catherine Vincent, Nicolas Witkowski). Éditions du CNRS, 1990.

Tendances actuelles dans l'enseignement

Je me suis largement inspiré des études de la Commission internationale de l'enseignement mathématique (CIEM), parues dans la série ICMI study, édité par A. G. Howson et moi, et publiée par Cambridge University Press (CUP, Cambridge, England):

The influence of computers and informatics on mathematics and its teaching (CUP, 1986);

School mathematics in the 1990's (CUP, 1986);

Mathematics as a service subject (CUP, 1988);

Popularization of mathematics (in press).

Quelques points (aspects universels, choix des matières) se trouvent exposés dans l'article de la Pensée déjà cité.

- Sur les algorithmes et les calculatrices, on peut trouver des développements et certaines références dans mon rapport au Congrès International des Mathématiciens de Berkeley (1986); cf. Proceedings of the International Congress of Mathematicians 1986 (AMS 1987, pp. 1682-1696).

- Une nouvelle étude est en cours sur l'influence des ordinateurs et de l'informatique (actualisation de ICMI study I), sous la direction de B. Cornu et T. Ralston, et elle sera publiée par l'UNESCO.

Quelques contradictions essentielles

Sur la première contradiction, on peut se référer aux études de la CIEM Popularization of mathematics (problématique générale, lien entre vulgarisation et enseignement) et Mathematics as a service subject (les choix à faire en fonction de la destination des études, le rôle des méthodes modernes et puissantes).

Sur la seconde contradiction, la transposition didactique est une notion familière en didactique des mathématiques; cf. Yves Chevallard, La transposition didactique, La Pensée Sauvage, 1985.

J'ai connu les idées de J. L. Massera sur la dialectique et la logique formelle (la dialectique qui se cache dans les définitions et les axiomes) par un manuscrit qui circulait lorsqu'il était encore dans les prisons de la dictature uruguayenne. Des rédactions plus développées sont en cours.



Mon exemple favori sur la genèse des concepts et son aboutissement est un «théorème de F. Riesz» qu'on enseigne sous ce nom en France, mais qu'à ma connaissance F. Riesz n'a jamais énoncé. Il s'exprime ainsi: L'espace L_p est complet. Et il est bien vrai que F. Riesz l'a utilisé, comme lemme, lorsqu'il a établi une fameuse propriété des séries de Fourier connue sous le nom de théorème de Riesz-Fischer, et qu'il appelle «le billet aller-retour permanent» entre les fonctions de carré sommable et les suites de carré sommable (Annales de l'Institut Fourier, vol. 1, 1949, pp. 29-42). Mais, lorsque F. Riesz a utilisé ce lemme, c'était sous une forme bien moins concise: les concepts d'espaces L_p et de complétion n'étaient pas encore dégagés. En fait, la substance de la démonstration se trouve dans ces concepts. La transposition didactique consiste à définir les espaces métriques complets (toute suite de Cauchy est convergente), les espaces L_p (espace de fonctions dont la p -ième puissance est intégrable au sens de Lebesgue, muni de la distance $d(f,g) = (\int |f-g|^p)^{1/p}$), d'établir le théorème « L_p est complet», et d'en déduire le «billet aller-retour», beaucoup moins joliment exprimé comme isomorphisme isométrique de L_2 (T) et l_2 au moyen des formules de Fourier.

Je me souviens également d'une remarque de Bernard Malgrange, reflétant son expérience personnelle: «ce qu'il y a de plus difficile à comprendre dans une théorie, c'est le début».

Le chef d'oeuvre inégalé d'enseignement d'une théorie au moyen d'une chaîne de problèmes est le livre de Polya et Szegő: *Aufgaben und Lehrsätze der Analysis*. Le livre d'heuristique le plus populaire de Polya est *How to solve it*, traduit en français sous le titre **Comment poser et résoudre un problème**. Cependant, pour comprendre la richesse de l'heuristique de Polya, il serait dangereux de s'en tenir aux aspects les plus élémentaires; c'est quand il montre comment peuvent germer des conjectures en théorie des nombres, et conduire à des recherches difficiles, que sa démarche heuristique est la plus convaincante.

Il est bon de remarquer que, si le français n'a plus aujourd'hui le rôle qu'il eut autrefois comme langue scientifique, c'est bien que son rôle autrefois fut essentiel. Les francophones ont, de ce fait, un accès direct à des articles ou des ouvrages mathématiques essentiels dans l'histoire de notre science. En contrepoint à un cours de probabilité, rien n'empêche de lire l'Essai philosophique sur les probabilités de Laplace. Pour des étudiants de CEGEP, la Théorie mathématique de la lutte pour la vie, de Vito Volterra, donne une idée profonde et actuelle de l'étude des phénomènes d'évolution. Par ailleurs, il existe au Québec des ouvrages excellents sur l'histoire des mathématiques. En France, *Mathématiques au fil des âges* (éd. Jean Dhombres et al., Bordas 1987) contient des textes, originaux ou traduits, de très grand intérêt pour des publics variés.

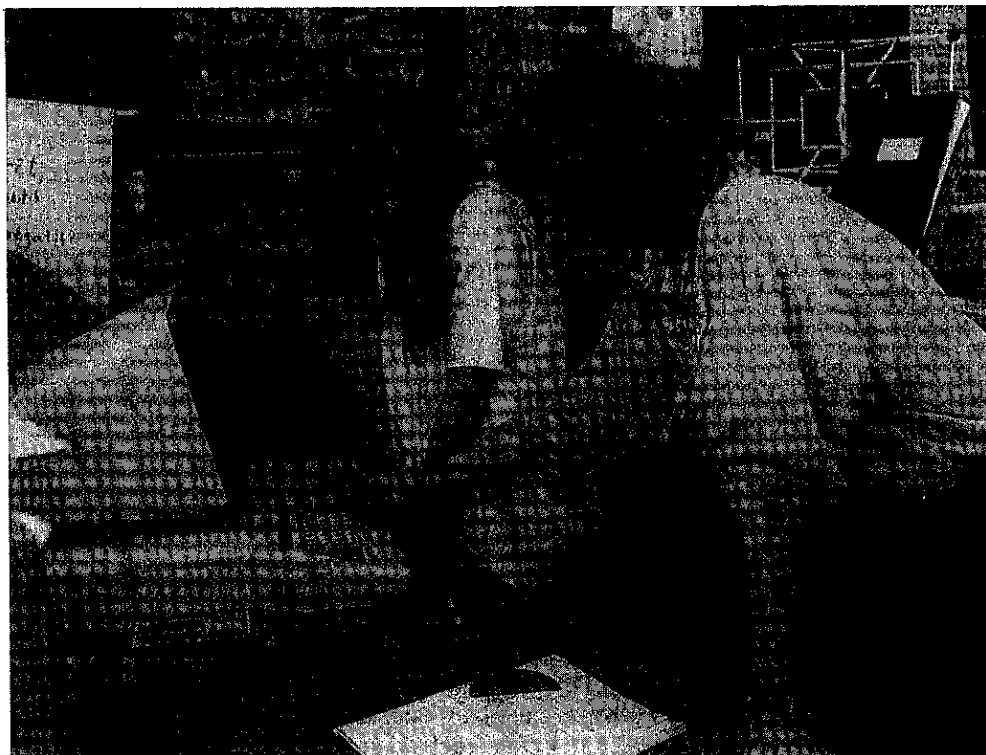
Sur la troisième contradiction, il convient d'abord de noter que c'est à Guy Brousseau qu'est due l'intégration à la didactique de la notion d'obstacle épistémologique. Une excellente référence globale à ce sujet est le livre sur *Construction des savoirs, obstacles et conflits*, édité par Nadine Bednarz et Catherine Gamier (CI-RADE, Agence d'ARC 1989).

Sur l'opinion de Lazare Carnot, cf. *Mathématiques au fil des âges* (référence donnée ci-dessus).

Il est bon de remarquer que ces obstacles existent à tous les niveaux. À Orsay, en troisième année d'Université, les étudiants en physique apprennent l'intégrale de Lebesgue et ses usages. Il leur faut en moyenne plusieurs mois pour se déshabituer des réflexes acquis lors de l'étude de l'intégrale de Riemann (par exemple, qu'une fonction intégrable est nécessairement bornée). Au niveau de la recherche, d'excellents mathématiciens, connaissant bien les pièges des topologies non métrisables, sont néanmoins tombés dans de tels pièges, entraînés qu'ils étaient à l'utilisation d'espaces métriques.

LA FORMATION MATHÉMATIQUE DES JEUNES AU QUÉBEC

par Richard PALLASCIO, Ph.D.



Introduction

Au printemps 1990, avaient lieu au Québec des Etats généraux sur l'enseignement des mathématiques (voir PLOT, n° 57, déc. 1991, pp 43-45). Dans la foulée de cette rencontre, les groupes et associations mathématiques ont formé le Conseil Québécois de l'Enseignement des Mathématiques. Celui-ci s'est donné comme premiers mandats de définir la formation des maîtres en mathématiques à tous les ordres d'enseignement, de même que la formation mathématique des jeunes souhaitée à leur sortie des différents ordres d'enseignement, qui correspondent au Québec à 12 ans (fin du primaire), 17 ans (fin du secondaire) et 19 ou 20 ans (fin du collégial). Plusieurs comités se sont mis au travail, dont un groupe de didacticiens des mathématiques, comprenant Henriette Laplante, conseillère pédagogique au primaire et au secondaire, Lise Paquin, ancienne conseillère pédagogique auprès des Inuit et chargée de cours en didactique à l'Université du Québec à Montréal (UQAM), Jean Grignon, auteur et ancien conseiller pédagogique au primaire, Jean-Marie Labrie, professeur à l'Université de Sherbrooke, et l'auteur du présent texte, professeur à l'UQAM, chercheur au Centre Interdisciplinaire de Recherche sur l'Apprentissage et le Développement en Education (CIRADE) et actuel président du COEM. Le présent document n'est cependant pas une position du COEM, mais émane plutôt des échanges réalisés dans ce petit groupe de travail.

La «formation mathématique» d'un individu inclut, non seulement des connaissances mathématiques, mais aussi des méthodes de travail et des processus exploités par les mathématiques, de même que des attitudes à l'égard du monde des mathématiques... Nous avons pris comme option d'investiguer dans toutes ces directions, sans en laisser de côté, ce qui inclut également la question pédagogique. Quelle culture mathématique l'élève doit-il acquérir, doit-il se construire ? Quels moyens d'action sont à notre portée ?

La situation...

... au primaire

Dans la classe, la situation éducative généralisée est la suivante : l'élève ne sait rien, l'enseignant ou l'enseignante sait tout. Les apprentissages réalisés à l'extérieur de l'école n'existent pas. Les mathématiques sont rarement contextualisées. Plutôt que de s'impliquer dans une activité mathématique (perfectionnement, recyclage, association mathématique...), les enseignants recherchent le manuel miracle. En conséquence, l'enseignement n'arrive pas en général à susciter l'intérêt des élèves pour l'apprentissage des mathématiques, alors que l'objectif devrait être justement de permettre aux enfants de découvrir leurs intérêts en mathématiques, tout en développant leur autonomie et en découvrant leurs façons d'apprendre. En définitive, les problèmes se posent moins en termes de contenus, qu'au niveau des méthodes de travail mises de l'avant par la résolution de problèmes mathématiques.

À la fin du primaire, au niveau des contenus, un élève devrait pouvoir maîtriser les objectifs suivants, servis à l'aide de verbes d'action :

- classer, ordonner, organiser et planifier : le temps, l'espace, les objets et les nombres (ex : l'argent) ;
- dénombrer, comparer, arrondir, estimer, grouper et ordonner des groupements, en relation avec des nombres ;
- construire, assembler, situer et repérer : le temps et l'espace ;
- opérer sur les nombres et connaître le sens des opérations sur les nombres ;
- mesurer : le temps, l'espace et les chances.

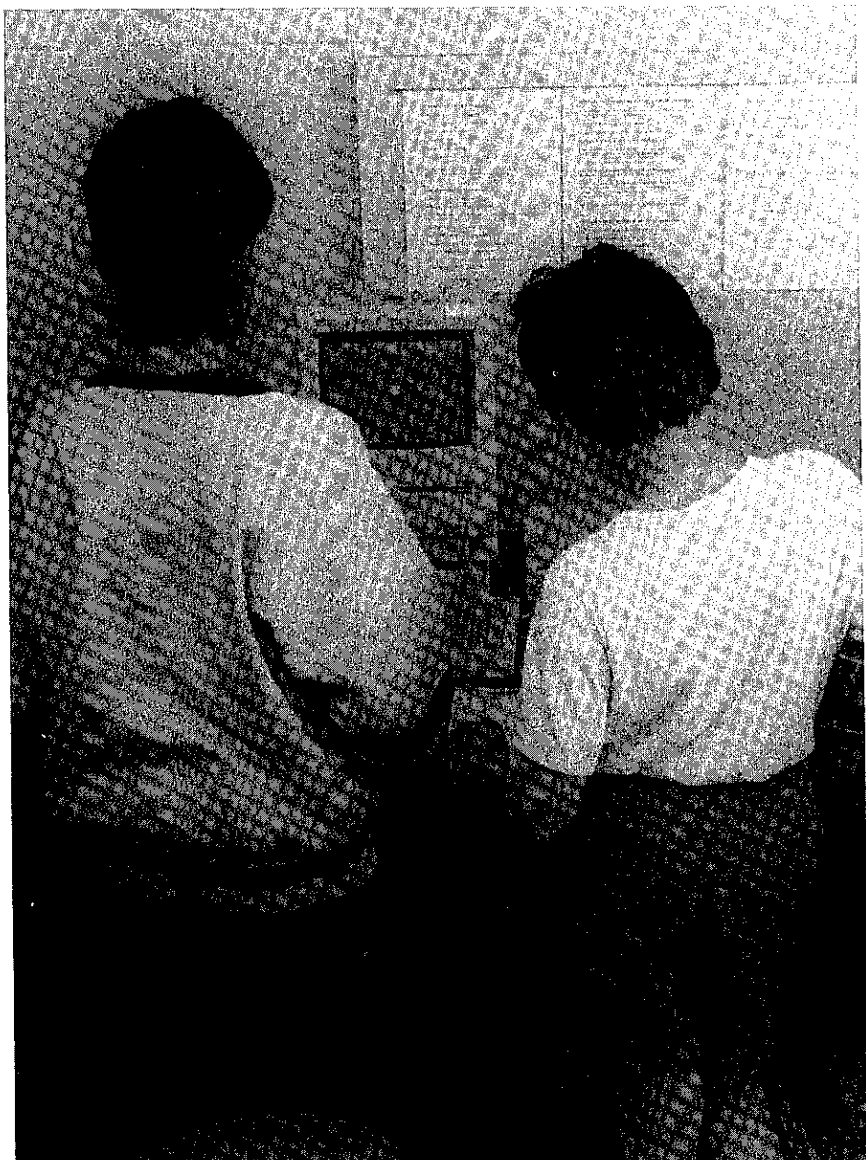
Les activités scolaires en mathématiques devraient en conséquence viser à développer chez l'élève des habiletés en regard du temps (la dimension ordonnée, séquentielle, analytique, «auditive»), de l'espace (la dimension créative, simultanée, synthétique, «visuelle»), de la réalité (la dimension appliquée, contextualisée, concrète, «kinesthésique») et de la gestion humaine et matérielle (la dimension résolution de problèmes, coopérative, «affective»). Ces activités, tout en visant

des objectifs à la fois au niveau des contenus, des habiletés et des attitudes, devraient s'inscrire dans une pédagogie par projets, ceux-ci étant proposés par l'élève ou proposés à l'élève, celui-ci étant évalué sur ses réalisations individuelles et collectives et sur la façon dont il peut justifier ses résultats (présentation au groupe). De plus ces activités devraient être contextualisées (partir de données issues de l'expérience), encourager la manipulation et l'exploration de ces données, établir des liens intradisciplinaires et interdisciplinaires, être constituées sous forme de problèmes à résoudre, avoir recours à divers outils (dont l'ordinateur) et être suffisamment diversifiées pour rejoindre les intérêts de tous les élèves.

«On n'exige pas de l'élève qui s'apprête à changer d'ordre d'enseignement qu'il soit capable de solutionner un certain nombre de problèmes pris, selon son choix, dans un ensemble plus vaste, ou encore de rédiger un texte où il emploiera un vocabulaire mathématique et où il mettra en évidence des notions, des structures mathématiques dans la description, par exemple, d'un fait divers. On exigera plutôt qu'il soit capable de performer sur des techniques, de répéter des énoncés qu'il aura mémorisés... Pourtant la résolution de problèmes et la maîtrise du langage mathématique sont au programme.» (Grignon, J.)

... au secondaire

La situation au secondaire n'est pas tellement éloignée de celle du primaire, si ce n'est que les savoirs y sont officiellement compartimentés. Là aussi nous pressentons qu'il s'agit moins d'un problème de contenus, que de méthodes de travail et des processus privilégiés par les mathématiques. Là aussi les attitudes ne sont pas positives : souvent, l'élève attend de l'information mathématique et conteste même le fait d'avoir à faire une activité mathématique ! Deux facteurs organisationnels viennent aggraver la situation : la cadence des cours qui obligent souvent les enseignants à interrompre une activité intéressante et rompre le charme, et l'absence d'horaire hebdomadaire qui ne facilite pas une planification du travail basée sur un registre partagée par l'ensemble de la société (note : au Québec, la plupart des écoles secondaires ont des cycles de 7, 9 ou 15 jours).



Alors que nous n'avons pas beaucoup d'emprise sur l'organisation scolaire, nous pouvons au moins travailler à changer le geste pédagogique chez certains enseignants intéressés, car l'approche pédagogique nous semble le nœud du problème. Tout comme au primaire, l'enseignement devrait viser simultanément des objectifs de contenus, de méthodes et d'attitudes. Si on peut s'entendre sur un certain nombre de contenus qu'un diplômé ou une diplômée du secondaire devrait maîtriser (ex : relations et fonctions dans des situations contextualisées, algèbre comme mode d'expression et de communication amorcée dès le début du secondaire, origines et bases des géométries), les méthodes de travail et les processus propres aux mathématiques nous semblent encore plus importants : heuristiques diverses appliquées à la résolution de problè-

mes (essais et erreurs, approximations successives...), éléments d'un discours mathématique (axiomes, définitions, conjectures, théorèmes, règles de déduction, démonstration...), etc... Enfin le grand objectif du secondaire ne devrait-il pas de convaincre l'élève que les mathématiques forment des modèles pour se représenter diverses structures de la réalité ou divers événements, et sont des outils pour résoudre les problèmes qui se posent aux êtres humains ?

Tout comme au primaire, l'enseignement des mathématiques devrait avoir comme objectif de faire aimer les mathématiques, d'intégrer les principes du plaisir et de la réalité, et pour ce faire une pédagogie par projets favorisant une véritable résolution de problèmes nous semble la plus prometteuse pour que non seulement les élèves aiment les mathématiques, mais pour que les enseignants aiment leur métier.

... au collégial

Dans les années 70, le sociologue Fernand Dumont, professeur à l'université Laval, identifiait quatre champs d'études devant faire partie de la formation fondamentale offerte au collégial : la langue, la philosophie, l'histoire et... les mathématiques. Les membres de la Commission Roquet, chargée d'évaluer le curriculum des collégiens, avaient bien compris ces propos et avaient recommandé au Ministère de l'Éducation du Québec (MEQ), à l'époque où celui-ci s'occupait encore de l'éducation au collégial, de replacer les mathématiques à l'ordre du jour commun à tous les collégiens, ... comme le font à peu près tous les pays de la planète !

La petite histoire nous révèle plutôt un portrait de plus en plus réducteur de la place des mathématiques dans la formation collégiale, avec les conséquences que l'on sait : ignorance non seulement de connaissances mathématiques élémentaires, mais surtout de leur rôle dans la résolution de problèmes en général, incapacité de résoudre des problèmes mathématiques élémentaires, même chez ceux qui se donnent comme mission d'aller les enseigner aux jeunes élèves du primaire, incapacité d'utiliser des outils mathématiques (algébriques, géométriques, probabilistes...) dans la résolution de problèmes divers, etc. D'un côté, la volonté de maintenir un enseignement unidimensionnel

des mathématiques au collégial a sûrement contribué à son affaïssement. L'enseignement des mathématiques au collégial doit maintenant se modulariser et s'adapter aux clientèles, comme le propose le rapport Dachuna-Castelle (1989).

Au niveau strict des connaissances mathématiques, il nous semble que l'énumération suivante devrait être circonvenue par tous les détenteurs d'un diplôme d'études collégiales (DEC) : les fondements de la fonction dérivée et de l'intégrale, de la méthode d'exhaustion d'Archimède jusqu'aux applications élémentaires contemporaines dans différents domaines, en passant par quelques notions historiques (l'ontogenèse doit rejoindre la phyllogénèse) ; la théorie des probabilités (une des axiomatiques les plus simples et des plus productives) et son développement, au moins jusqu'au théorème central limite, à la base de tout ce qui s'appelle courbe normale, test statistique, intervalle de confiance... ; les bases axiomatiques des diverses géométries et leurs applications respectives dans l'interprétation de l'espace... Les méthodes de travail et les processus essentiels devraient correspondre aux contenus privilégiés : production d'un test statistique effectué sur des données contextualisées, utilisation de divers modes dans la résolution de problèmes : algébrique, géométrique, linguistique, physique... Enfin, au niveau des attitudes, il est primordial pour nos descendants, que les titulaires d'un DEC comprennent la place des mathématiques dans le patrimoine humain et culturel, puissent utiliser ces outils puissants pour la résolution de problèmes, et comprennent le rôle des mathématiques dans le développement de la pensée humaine (ex : la découverte des géométries non-euclidiennes sur notre conception au réel).

L'enseignement des mathématiques

L'enseignement magistral des mathématiques demeure très prégnant à tous les ordres d'enseignement. Il est malheureux de le constater, mais les conceptions qu'ont les enseignantes et les enseignants de mathématiques, proviennent moins des mathématiques elles-mêmes, que de l'enseignement qu'ils ont eux-mêmes reçu.

En conséquence les messages implicites que les élèves reçoivent ressemblent à : «il n'est pas nécessaire, sinon inutile, de comprendre, il est préférable d'apprendre par cœur», «manipuler, c'est bon pour les enfants», «contentez-vous d'apprendre les mathématiques, vous vous en servirez plus tard», etc.

Le personnel enseignant s'intéresse rarement à ce que l'élève sait déjà, car ça lui complique la vie. En conséquence, il est plus simple de conclure que les élèves ne savent rien et de repartir à zéro. C'est ainsi que d'un niveau à l'autre, les liens sont inexistantes, ou à peu près. Le problème n'est pas simple, car il est cyclique : comment amener le futur enseignant ou la future enseignante à requestionner son approche, à repenser ses mathématiques via des manipulations, de l'exploration...? Comment faire en sorte pour que l'apprenant ou l'apprenante vivent une activité mathématique sur laquelle il pourra acquérir de plus en plus d'emprise ? Quelle place accorder respectivement à la coopération et à la compétition dans l'enseignement des mathématiques ? Comment faire profiter à tous les élèves de la plus grande facilité des filles à coopérer et de la plus grande facilité des garçons à compétitionner ? Comment dessiner un nouveau partage des pouvoirs entre l'enseignant ou l'enseignante et les élèves, tout en permettant de libérer la parole de ceux-ci (voir l'objectif du National Council of Teachers of Mathematics, le NCTM, sur la communication mathématique, dans Palascio, 1990, p. 140) ?

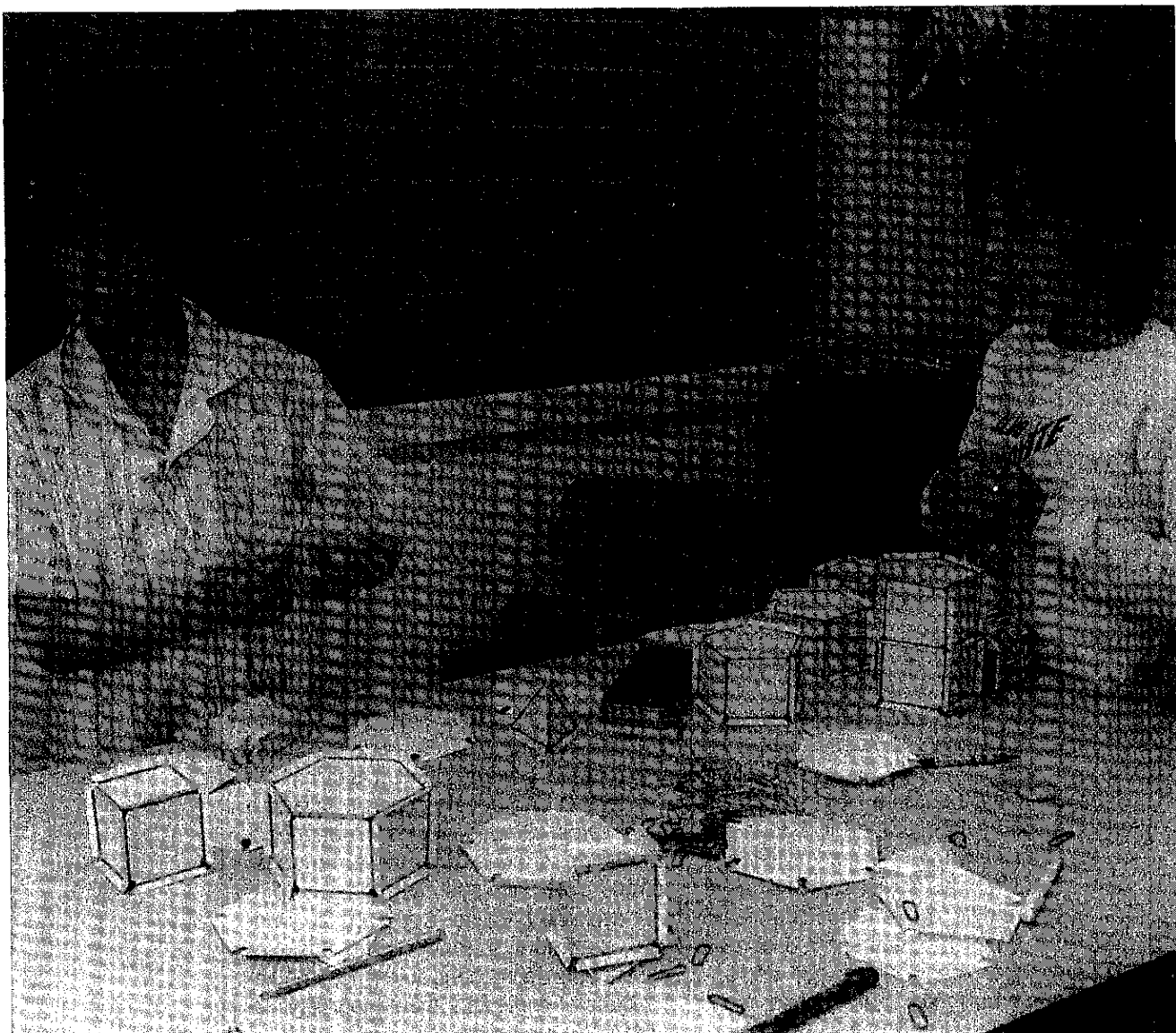
Enfin l'évaluation des apprentissages en mathématiques nous semble catastrophique, ne reposant sur aucune validation des contenus et des instruments mêmes d'évaluation. S'il y a tant d'échecs en mathématiques, le problème n'existe peut-être pas uniquement chez l'élève ? Nos examens sont peut-être inadéquats ? Si nous devons faire une évaluation sommative des apprentissages, celle-ci devrait être réalisée dans les règles de l'art. Ce n'est pas le cas et cela pose un préjudice aux élèves. Si des élèves n'obtiennent jamais de succès en mathématiques, comme c'est parfois le cas même au premier cycle du primaire (6 à 9 ans au Québec), comment s'étonner que plusieurs d'entre eux décrochent, fuient les mathématiques et contestent même leur légitimité dans le curriculum scolaire ?

Les problèmes à creuser

En conclusion, nous exposons quelques questions qui nous semblent importantes à travailler afin d'améliorer la formation mathématique des jeunes : (1) Comment susciter une véritable activité mathématique chez l'élève ? (2) Comment définir et détecter l'activité mathématique naturelle de l'élève, autrement dit, comment retrouver les mathématiques dans le quotidien ? (3) Comment évaluer les acquis d'un élève d'une façon cohérente avec une mathématique qui se fait et non une mathématique toute faite, par exemple en s'appuyant sur des productions effectives de l'élève ? (4) Quelles attitudes développer chez l'élève pour lui rendre les mathématiques accessibles, pour les démystifier à ses yeux ? ■

Références

- Dachuna-Castelle, D. (1989). *Rapport de la mission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques*, Univ. Paris 9e.
 Pallascio, R. (dir.) (1990). *Mathématiquement votre ! Défis et perspectives pour l'enseignement des mathématiques*, éd. L'Agence D'Arc, 233 p.



REALITES VIRTUELLES ET VIRTUALITES REELLES

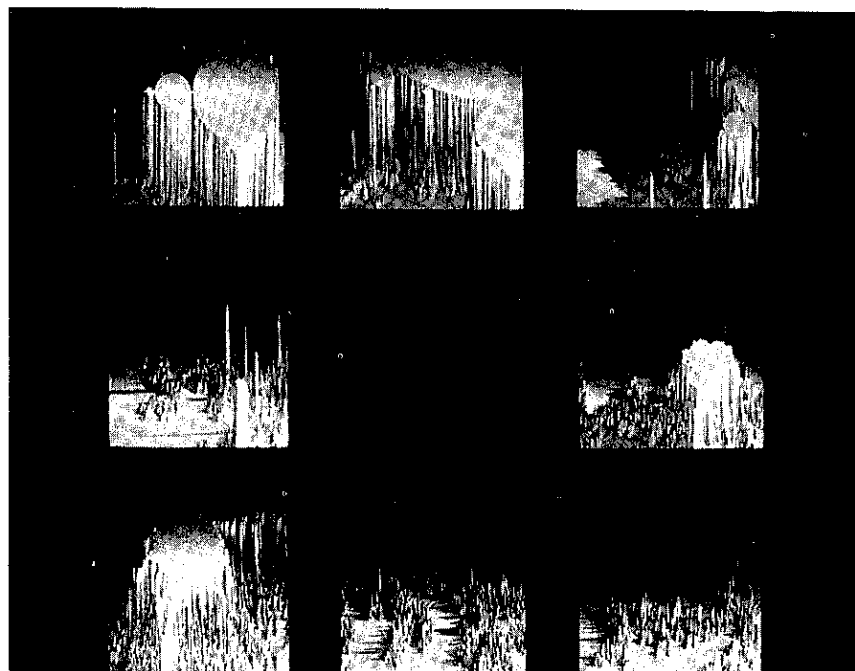
Jean-François COLONNA - GSV-Lactamme (CNET, Ecole Polytechnique)

MATHEMATIQUES ET CONNAISSANCE :

Depuis plus de deux mille ans déjà, les mathématiques jouent, dans la quête de la connaissance, un rôle à part. Trop longtemps considérées comme un langage, «simple» outil de formulation des lois de la nature, elles sont aujourd'hui de plus en plus reconnues comme une pensée permettant, par exemple, de prévoir l'existence d'une entité «physique» bien avant sa découverte expérimentale (les récents succès du Modèle Standard des particules élémentaires et de leurs interactions, ou encore ceux dus à la Relativité Générale, sont là pour nous le confirmer). Enfin, suivant la tradition platonicienne, les **ombres** (sous-entendu les mathématiques), **ombres de la réalité**, ne sont peut-être que la seule connaissance de l'Univers accessible à l'homme, dont l'attitude dans ce domaine se doit d'être humble et modeste : l'Equation ultime (tout comme, par exemple, la dernière décimale de π) n'existe pas, et plutôt que d'envisager une science «asymptotique», qui s'approcherait toujours plus de son but, il est nécessaire de la croire elle aussi «fractale» (figure 1), de nouveaux concepts et structures apparaissant sans cesse, au fur et à mesure de nos progrès...

NOTION D'EXPERIMENTATION VIRTUELLE :

A côté de l'expérimentation que nous qualifierons de *laboratoire*, effectuée soit *a priori* (c'est l'observation des phénomènes naturels), soit *a posteriori* (pour vérifier le pouvoir prédictif de la déduction mathématique), se trouve l'*expérimentation virtuelle* (expression que nous préférons à «simulation numérique» ou encore



à «expérimentation numérique», car d'une part elle rappelle la complémentarité de cette approche et des pratiques plus anciennes, et d'autre part, en évoque plus fortement l'énorme potentiel), rendue possible par les formidables progrès de l'informatique, tant au niveau des logiciels qu'à celui des matériels, et que John Von Neuman avait pressentie et, dès la fin des années quarante, utilisée.

Pour bien comprendre de quoi il s'agit, il faut rappeler, de façon pragmatique, ce qu'est un **modèle**. L'état du système étudié par un physicien, par exemple, est représenté par un ensemble de grandeurs (coordonnées spatio-temporelles, température, pression, ...), et son évolution, quant à elle, est décrite par un ensemble d'équations reliant entre elles les différentes grandeurs caractéristiques. Une théorie scientifique n'ayant de sens, que *réfutable*, et d'intérêt, que *prédictive*, les équations du modèle doivent être manipulées et résolues afin de jouer pleinement leur rôle créateur. Deux approches complémentaires et non exclusives l'une de l'autre sont alors possibles : la première, for-

figure 1 : Le concept de Science fractale est illustré par huit agrandissements successifs d'une représentation tridimensionnelle de l'ensemble de Mandelbrot. Quel que soit le facteur d'échelle utilisé, de nouveaux détails apparaissent, rendant par là-même utopique, l'idée de visualiser sa frontière qui symbolise ici l'Equation ultime dont nous nions l'existence.

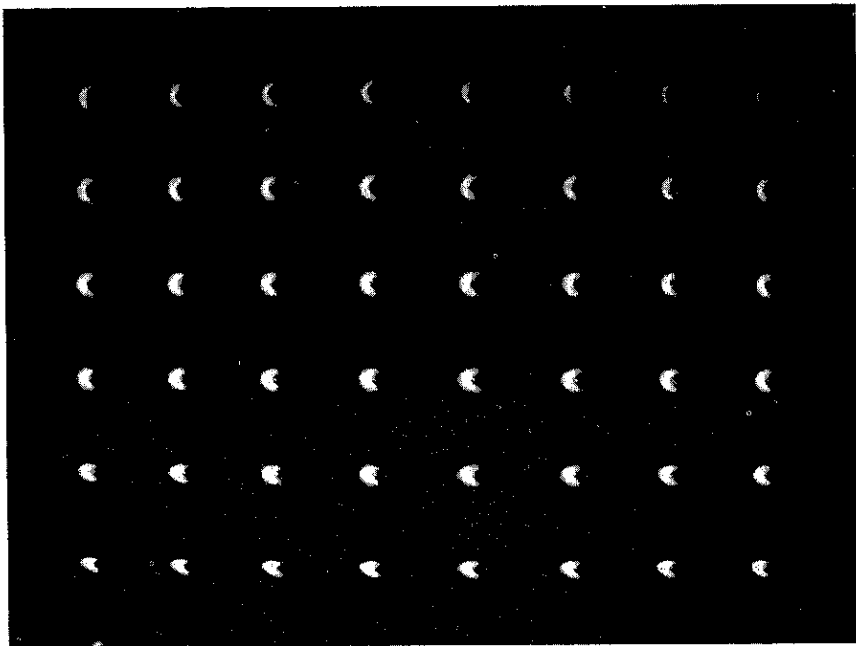


figure 2 : La Relativité Générale, proposée par Albert Einstein en 1915, l'une des créations scientifiques les plus achevées, est aujourd'hui le cadre de la description des grandes échelles de l'univers. Cette théorie prévoit l'existence d'objets extrêmement denses, et dont la masse est telle que rien, y compris la lumière, ne peut s'en échapper (sauf dans un cadre quantique). S'il n'est donc pas question d'observer directement ces objets «exotiques» (encore du domaine de la conjecture), il est possible de décrire des symptômes permettant d'en reconnaître la présence dans l'espace ; l'effet dit «de lentille gravitationnelle» est l'un de ceux-là. Par exemple, des rayons lumineux en provenance d'une étoile lointaine, s'ils «frôlent» l'un de ces objets sur leur chemin vers la Terre, se verront déviés fortement (comme ils le seraient à l'intérieur d'une lentille optique). Cette courbure de leur trajectoire provoque la déformation de l'image de leur source. L'expérience virtuelle présentée sur cette image, et due à Jean-Alain Marck (Observatoire de Meudon), montre soixante-quatre étapes du mouvement d'un observateur fictif décrivant une trajectoire circulaire l'amenant de l'axe de l'un des pôles d'un trou noir à son plan équatorial. Autour de celui-ci, un disque d'accrétion, à symétrie circulaire, gravite ; lorsque l'observateur est sur l'axe des pôles (image en bas à droite), le disque lui apparaît tel qu'il le verrait autour d'un objet moins massif (Saturne, par exemple), bien que déjà, des images secondaires concentriques soient perceptibles. Mais, c'est lors du mouvement orbital, que les phénomènes «optiques» les plus «troublants» apparaissent, en particulier, une fois arrivé sur le plan équatorial (image en haut à gauche)... Ainsi armés, l'astrophysicien peut donc virtuellement expérimenter sur ces «gouffres du cosmos», comme probablement jamais il ne le pourra directement.

melle, est celle qui donne la solution «exacte et analytique», et qui est la plupart du temps, impraticable, voire impossible à mettre en œuvre, même dans les cas parmi les plus simples (par exemple le problème dit «des N corps», N étant strictement supérieur à 2) ; la seconde, dite numérique, procède par approximations (du système étudié, mais aussi des équations) et fournit ses résultats sous la forme de nombres. Dans un cas comme dans l'autre, l'ordinateur est aujourd'hui un outil indispensable, tant au niveau de la manipulation formelle des expressions et des équations, qu'au niveau numérique, étant donné la complexité, voire la «monstruosité» des opérations à réaliser.

DE L'USAGE DE L'IMAGE DE SYNTHESE :

Une expérience virtuelle produit donc comme résultat des nombres (notons au passage, que cela est de plus en plus vrai des expériences de laboratoire : en une fraction de seconde, un accélérateur de particules génère des millions de mesures ; le problème que nous allons évoquer ci-dessous, et les solutions que nous allons présenter, se transposent immédiatement dans ce contexte). En général, la quantité de ceux-ci est telle, que leur analyse sous une forme alpha-numérique est impensable et même absurde. Par exemple, lors d'une exécution en machine d'un code de simulation de la turbulence bidimensionnelle, dans un domaine carré échantillonné par un million de points, le nombre de valeurs obtenues est de l'ordre du milliard, ce qui imprimé, représenterait approximativement un volume équivalent à un millier d'annuaires téléphoniques ! Le passage par la production d'images synthétiques animées est alors incontournable. Nous pouvons, dans ces conditions, définir d'une façon pragmatique l'Expérimentation Virtuelle comme étant la réalisation de mesures sur un modèle mathématique résidant dans la mémoire d'un système informatique, et l'analyse de celles-ci par le biais de la production d'images synthétiques animées et en couleurs ; cette approche place le chercheur dans une boucle de rétroaction, où le sens de la vision joue un rôle privilégié, celui-là même qui est fort

probablement à l'origine de la curiosité scientifique.

En plus de permettre cette mise en forme de résultats fournis «en vrac», la production d'images de synthèse fait apparaître d'autres avantages fondamentaux. En particulier elle facilite la mise au point et la validation des modèles ; elle simplifie la communication scientifique et pédagogique, en particulier en ce qui concerne la compréhension de concepts abstraits. Mais c'est aussi un fabuleux outil de découverte : en effet, de ces images surgissent, sous l'oeil du chercheur ou de l'ingénieur, des formes, bien souvent imprévues et imprévisibles (donc non programmables *a priori*), qui seront pour lui des indices de régularités sous-jacentes ou bien de pistes à suivre ; d'ailleurs, Heinrich Hertz ne faisait-il pas remarquer il y a un siècle déjà : «on ne peut échapper au sentiment que ces formules mathématiques ont une existence qui leur est propre, qu'elles sont plus savantes que ceux qui les ont découvertes, et que nous pouvons en extraire plus de science qu'il n'en a été mis à l'origine». Enfin, il s'agit là d'un instrument révolutionnaire (comme le furent en leur temps le télescope et le microscope, mais placé à un niveau supérieur, tel qu'en fait, il soit qualifiable de «méta-instrument») qui permet l'observation, mais aussi, et surtout, la manipulation d'objets qui autrement seraient hors de notre portée et hors de notre regard. C'est ainsi que l'astronome peut aujourd'hui «jongler» avec les trous noirs (figure 2), qu'à l'autre bout de l'échelle, le physicien est capable d'observer la structure en quarks du proton (figure 3) : l'homme de science étudie alors ses propres réalités virtuelles. Mais ces mêmes outils permettent à l'artiste de visiter de nouveaux univers (figure 4) : des virtualités réelles, encore tapies dans la mémoire de nos machines, n'attendent qu'à être explorées.

**DEFINITION
D'UN SYSTEME
INFORMATIQUE POUR
L'EXPERIMENTATION
VIRTUELLE :**

Ainsi se trouve donc posé le problème de la définition et de la mise en œuvre d'un système informatique permettant, en par-

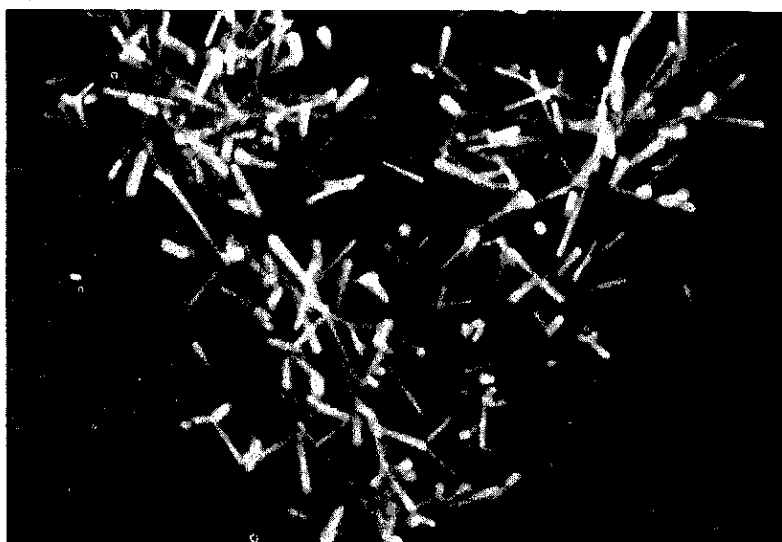


figure 3 : Longtemps considérés comme élémentaires, les protons et les neutrons, en particulier, sont aujourd'hui décrits en tant qu'objets composés. Le modèle, dit «standard», des particules et de leurs interactions repose sur les bosons (les «vecteurs des forces») et les fermions (la «matière») ; dans cette dernière catégorie se trouvent les leptons et les quarks. Cette image nous montre un proton tel qu'il est défini dans ce modèle : il est constitué de trois quarks «réels» (situés au sommet d'un triangle équilatéral fictif assez apparent sur cette image), et d'une «mer» de particules «virtuelles» (quarks, anti-quarks et gluons) nées des fluctuations quantiques du vide, et qui se concentrent statistiquement au voisinage de quarks réels suivant leurs couleurs (la couleur étant ici une notion similaire à celle de charge électrique, mais n'ayant bien entendu rien à voir avec ce que nous appelons communément «couleur»). Les sphères représentent les quarks et les anti-quarks, alors que les cylindres symbolisent les gluons, bosons responsables de l'interaction forte (l'une des quatre forces fondamentales). Ainsi, par l'intermédiaire de ces nouveaux outils, toutes les échelles actuellement connues dans l'univers sont accessibles à nos yeux, mais aussi à nos mains...

ticulier, la concrétisation de ce concept, tout en assurant la pérennité des développements alors réalisés. Au préalable, il convient de faire un inventaire des idées sous-jacentes, et qui correspondent aux grandes tendances de l'informatique d'aujourd'hui, et auxquelles il est essentiel de souscrire :

- l'existence de normes logicielles et matérielles,
- la notion de système réparti reposant sur celle de réseau (ou mieux de réseaux),
- l'interactivité,
- la maturation du calcul parallèle,
- la production d'images animées et en couleurs,
- la simulation possible de certains processus cognitifs.

En une quarantaine d'années, les progrès accomplis dans ce domaine furent les plus foudroyants que notre technique ait jamais connus : hier, un millier d'opérations par seconde demandaient plusieurs dizaines de tonnes de matériels surveillés par une armée de «grands prêtres» détenteurs du savoir et des rites à accomplir, alors qu'aujourd'hui quelques grammes donnent au néophyte une puissance de calcul dix mille

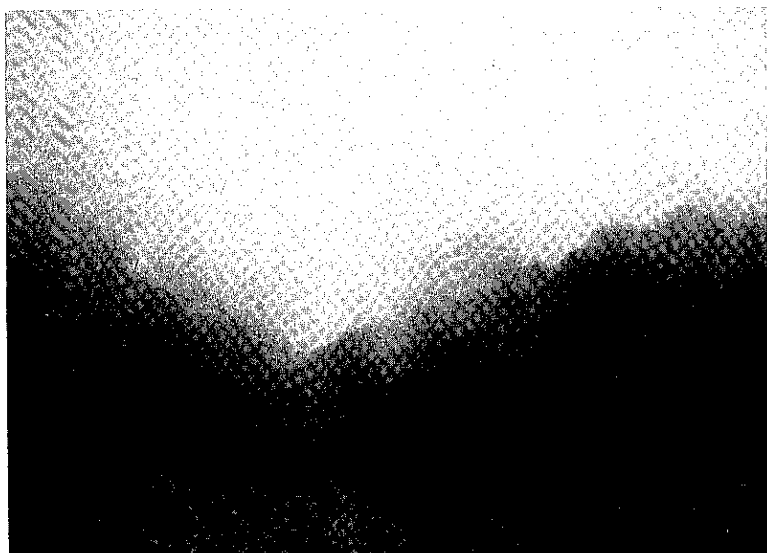


figure 4 : La géométrie fractale, récent outil mathématique conçu par Benoît Mandelbrot, permet de modéliser et de décrire de nombreux phénomènes jusqu'ici sans aucun point commun. C'est ainsi que les fluctuations des cours de la bourse, le front d'avancée d'un incendie de forêt, ou encore la limite entre deux milieux diffusant l'un dans l'autre, peuvent aujourd'hui être décrits à l'aide du même langage. Elle permet la modélisation de nombreux phénomènes naturels, et constitue donc un outil puissant pour la synthèse d'image. Nous voyons ici un paysage complètement «imaginaire» et calculé à partir d'équations, qu'il s'agisse du relief, ou bien des nuages et de la brume. Des développements récents, dus à l'auteur, permettent de plus de décrire la dynamique de ces phénomènes, et ainsi de générer des films les présentant. L'artiste peut alors détourner ces outils, faire des mathématiques une matière malléable, nouveau marbre ou nouvelle glaise, et créer des univers proches de notre quotidien ou bien «diamétralement» opposés (si tant est que nous puissions connaître le méta-univers qui les contient tous...), et nous les offrir en tant que réalités virtuelles à explorer...

fois supérieure ! Mais certainement le fait le plus marquant de ces dernières années réside dans la notion «**réursive**» de **réseau**. Elle peut être définie comme étant la possibilité de connecter entre elles des machines, généralement distantes l'une de l'autre, afin de les faire coopérer dans l'accomplissement d'une certaine tâche ; nous la qualifions de «**réursive**», puisque, d'une part, de plus en plus d'ordinateurs, sont eux-mêmes conçus sous forme de réseaux d'entités plus élémentaires, et que d'autre part, les réseaux, à une certaine échelle sont eux-mêmes fédérés en systèmes plus vastes. Ainsi, aujourd'hui, il n'est pratiquement plus, de par le monde, de machines (à vocation «professionnelle») isolées : leurs utilisateurs peuvent atteindre, pour effectuer des opérations diverses, et sous réserve d'obtenir les autorisations nécessaires (notons que le problème de la sécurité est l'un des plus délicats qui soit actuellement), des ordinateurs situés aux antipodes. Un nouveau niveau de **réalité virtuelle** apparaît alors : celui du cadre de travail du chercheur (ou de l'ingénieur) : son bureau, son laboratoire ou bien encore sa bibliothèque, deviennent à leur tour virtuels. Par l'intermédiaire d'un poste de travail (qui pourra être

qualifié de multimédia, parce que présentant des informations provenant des sources les plus variées : systèmes d'expérimentation virtuelle, banques de données, chaînes de télévision, canaux de télécommunications, ...), et pour mener à bien son travail et sa recherche, il pourra utiliser les ressources qui lui sont nécessaires, où qu'elles résident. Mais, de plus, il sera à même de communiquer avec ses homologues, dans un gigantesque continuum asynchrone à l'intérieur duquel les idées se brasseront, et d'où, plus de lumière jaillira. Ainsi, l'homme peut enfin accéder, par les techniques qu'il a su développer, à l'ubiquité, ubiquité donc mais à l'intérieur de plusieurs niveaux de réalités virtuelles : celles de ses espaces de vie et de travail, mais aussi celles contenant l'objet de ses études et de ses recherches. Enfin, ces mêmes outils, non confinés dans l'espace de la recherche scientifique, envahiront (et envahissent déjà...) d'autres domaines, et en particulier celui de la création artistique ; au-delà des problèmes alors soulevés (non unicité de l'œuvre, absence de support «noble», multipropriété artistique, l'ordinateur : outil non neutre, l'ordinateur : outil ou créateur ?...), il convient de voir et d'imaginer les utilisations qui pourront en être faites. En particulier, des artistes, répartis de par le monde, auront la possibilité de coopérer à des œuvres collectives et dynamiques, et pourquoi pas, avec la collaboration des techniques spatiales, à la création de sculptures monumentales qui éclaireraient nos nuits ? Et si aujourd'hui, une fraction importante de la masse monétaire mondiale circule continuellement et immatériellement, peut-être en sera-t-il de même, demain, pour une partie de notre patrimoine culturel, naviguant ainsi à la vitesse de la lumière de continent en continent, d'étoile en étoile...

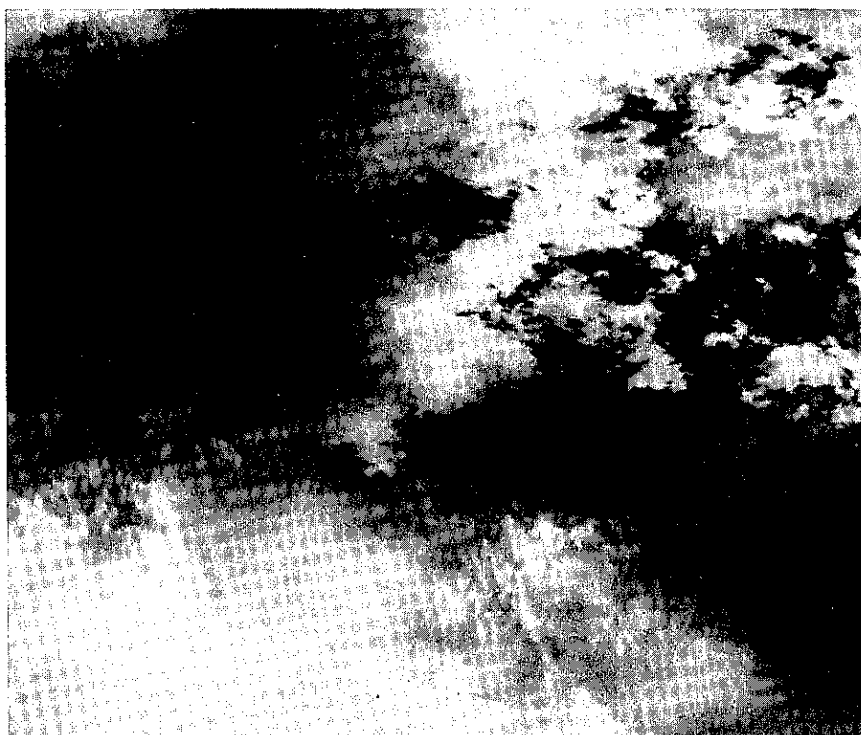
DEMAIN :

A court terme, l'objectif est d'aboutir à un système délocalisé, où spontanément les tâches à effectuer, se réaliseront sur le système le plus apte ou le plus disponible. Ainsi, pour donner un exemple simple, la visualisation et l'interaction auraient lieu sur une station de travail, alors que la résolution des équations se ferait sur un super-ordinateur, et ce de façon totalement transparente à l'utilisateur. L'existence de réseaux de plus en plus rapides (des réseaux expérimentaux offrent déjà

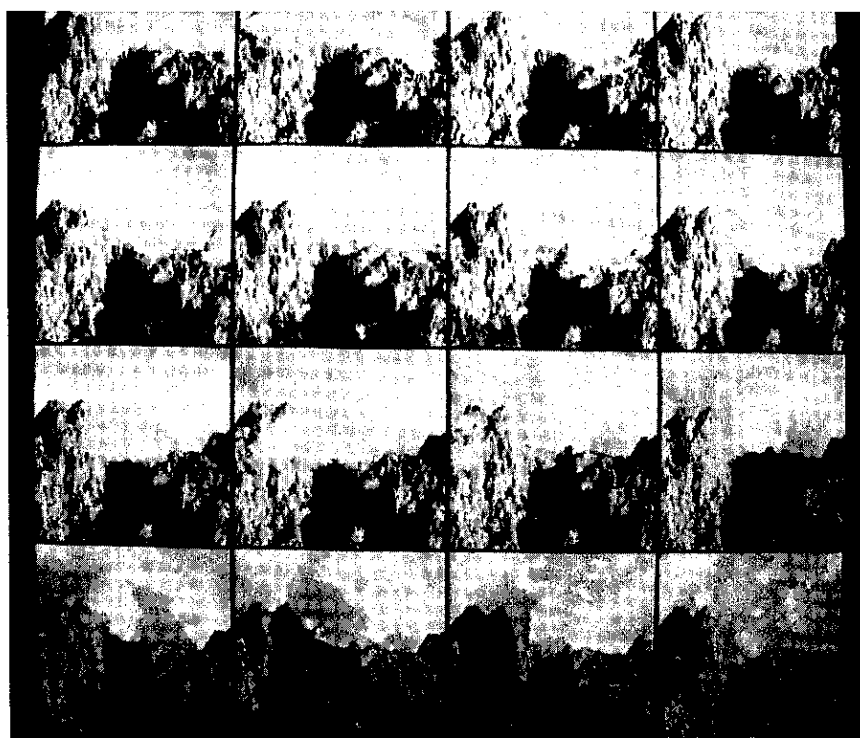
en laboratoire des débits de plusieurs dizaines de milliards de bits par seconde) permettra littéralement de voir vivre le modèle, et d'interagir avec lui, autorisant par là-même la réalisation d'expériences interactives sur lui. En ce qui concerne l'aspect strictement visualisation, des progrès énormes sont à attendre bien entendu de la manipulation de plus en plus rapide de modèles tridimensionnels, mais aussi de l'usage qui sera fait de la **télévision haute-définition (TVHD)** et des dispositifs stéréoscopiques. La notion de **réalité virtuelle**, développée dans d'autres domaines (la simulation de conduite par exemple), et introduite dans ce contexte, permettra au chercheur comme à l'ingénieur de s'intégrer davantage à son modèle, en facilitant ainsi sa compréhension ; il convient de ne pas oublier qu'ici, contrairement aux applications artistiques ou de type CAO, de la synthèse d'images, les «objets» étudiés sont bien souvent éloignés du sens courant, voire n'ont aucune image «naturelle» (une pression tout simplement...), ou à la limite, sont «interdits de représentation» (en mécanique quantique en particulier) ; il est alors nécessaire de donner à l'expérimentateur le maximum de facilités pour l'aider à comprendre les résultats obtenus. Dans ce domaine, les techniques de l'**intelligence artificielle** nous seront fort probablement d'un grand secours : bien entendu au niveau de l'interface homme-machine, mais aussi dans l'aide à l'analyse et à la présentation des résultats (par exemple, le problème du choix des couleurs, dans ce contexte, est, contrairement à l'intuition, extrêmement délicat : quelques règles de bon sens peuvent aider...).

APRES-DEMAIN :

S'il est difficile d'imaginer l'impact à moyen et long termes de l'informatique, et de ses derniers développements (disques optiques, systèmes multimédia, synthèse d'images, production de sons,...), dans des domaines familiers, comme celui de l'enseignement, il est encore beaucoup plus délicat de le faire dans celui de la recherche scientifique (et *a fortiori* dans le monde de l'art). En effet, la Science définit notre vision rationnelle de l'univers, et la place que l'homme y occupe. Celles-ci subissent au cours des siècles de nombreux bouleversements : le génie de Pla-

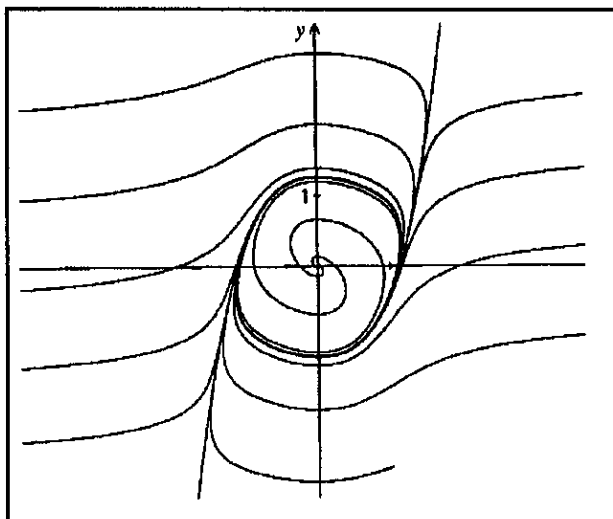


ton, Copernic, Newton et Einstein, pour ne citer qu'eux en fut responsable. Aujourd'hui leurs successeurs utilisent des outils dont ne disposaient pas leurs glorieux ancêtres, et qui vont leur permettre de porter plus loin leur regard et plus haut leurs gestes, et ouvrir ainsi tout grand, les portes d'une nouvelle révolution copernicienne. □



FORME-T-ON DE BONS SCIENTIFIQUES DANS L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE ?

Jean-Pierre BOURGUIGNON – Palaiseau



Il faut d'abord souligner la diversité des métiers qui méritent le qualificatif de scientifiques : de l'ingénieur de production au chercheur fondamental ou au professeur, il y a une grande distance, et il existe beaucoup de situations intermédiaires. Par exemple, suivant la science ou le champ d'activités dans lequel une personne est investie, les parts de son travail qui sont expérimentales ou pratiques, d'une part, et théoriques, d'autre part, peuvent considérablement varier.

Le couple formation-sélection

On peut cependant constater qu'un certain nombre de qualités sont requises dans une large famille de métiers scientifiques : elles ont nom curiosité, capacité de reconnaître ses erreurs et de remettre en cause son savoir, goût du travail en équipe, imagination. Chaque scientifique les possède et les exerce à des degrés divers, bien sûr, mais il n'est pas possible de compter uniquement sur le don à la naissance pour qu'il les possède. L'enseignement a indiscutablement un rôle à jouer dans leur développement.

Le système secondaire français se distingue de ceux en vigueur dans d'autres pays industrialisés par la grande place donnée

La question posée est trop vaste pour que, vu la diversité des élèves sortant de l'enseignement secondaire et le point de vue forcément limité de celui qui ose s'exprimer sur ce problème, on puisse y apporter une réponse nuancée en aussi peu de place. Cet article vise seulement à mettre en regard certaines exigences de la formation des scientifiques et la situation de l'enseignement secondaire français...

aux enseignements généraux, et la profondeur des connaissances exigées des élèves dans un nombre important de matières. Mais la différence la plus visible tient à l'organisation des études supérieures scindées en deux secteurs aux structures très différenciées : les universités dont l'accès est libre et la majorité des diplômes non professionnels, et les grandes écoles qui recrutent sur des concours préparés dans des classes spécifiques dans un environnement du type secondaire.

Cette dichotomie a des effets considérables sur le fonctionnement même de l'enseignement secondaire, car elle induit des modèles et crée une hiérarchie entre sections qui a des répercussions importantes sur la production de scientifiques.

En effet, dans l'esprit des lycéens, l'opposition de ces deux systèmes prend une forme un peu hystérique qui tend à identifier comme « bon » tout ce qui a trait à l'un et comme « mauvais » tout ce qui a trait à l'autre. Le mode de sélection des grandes écoles étant le concours avec épreuves par discipline en temps limité, on en arrive ainsi à considérer qu'un bon élève doit savoir répondre très vite à des questions nombreuses et qui ont toutes une réponse. Le fait de « sécher sur une question de mathématiques » est considéré comme anormal par les lycéens (1). Du coup, l'apprendre prend le pas sur le comprendre, faisant fi d'une très belle maxime d'Evariste Galois qui demandait de « faire du raisonnement une deuxième mémoire ». Les jeunes sont donc mis en présence d'un modèle unique de réussite dans lequel les aptitudes scolaires dans les disciplines scientifiques jouent un rôle important. Ce système aboutit à occuper les

filières dites scientifiques ou techniques par des jeunes qui se détourneront en grand nombre des métiers purement scientifiques en raison de la faible reconnaissance sociale qui leur est attachée. Dans ces conditions, la pénurie de scientifiques s'amplifie et on peut craindre le pire pour le début du troisième millénaire.

Absence d'autonomie de la pensée

Dans ce contexte, l'imagination et l'initiale sont peu à l'honneur dans nos écoles secondaires. Les programmes sont beaucoup plus contraignants que dans d'autres pays et l'enseignement, plus théorique (ce qui est probablement lié au fait qu'il est difficile d'évaluer des travaux expérimentaux dans le cadre d'un concours). Cette adaptation au mode de sélection peut aller jusqu'à affecter le contenu des matières enseignées, choisi quelquefois afin d'interroger plus aisément. Que dire du travail en équipe, puisque le seul salut est individuel ? Il n'y en a pas dans le cadre de la classe et les élèves ne constatent pas non plus que leurs professeurs le pratiquent, ne serait-ce qu'entre matières différentes. L'absence d'autonomie de pensée qu'on observe chez certains élèves prend un tour inquiétant quand on la constate chez ceux qui sont réputés être les meilleurs. Pour ne citer qu'un exemple, le compartimentage des connaissances scientifiques peut aller jusqu'à donner aux élèves la conviction qu'il est impensable que la structure des objets mathématiques ait quelque chose de profond en commun avec la façon dont le physicien structure le monde. Il semble que ce phénomène s'accroisse avec l'arrivée en classes préparatoires d'élèves ayant bachoté trop longtemps et manquant, par suite, de fraîcheur. Ultérieurement, ces élèves sont (temporairement ?) usés, et veulent seulement avoir une note convenable sans chercher à vraiment comprendre ce qui leur est enseigné.

Il est difficile à un scientifique de concevoir son activité sans y inclure le plaisir de la découverte. Ce sentiment est bien souvent absent des premiers contacts que les élèves ont avec les sciences, au collège notamment. Il faut certes reconnaître que les conditions matérielles, pour que ce souffle puisse passer, ne sont pas toujours remplies. Il faudrait d'une certaine façon que puisse être donné aux élèves, sans faire nécessairement appel à des connaissances très sophistiquées, le sentiment sinon qu'ils participent à quelque chose d'important, du moins que le monde peut leur devenir intelligible. Ce contact me semble assez indissociable d'une formation de l'esprit critique poussant les élèves

à exercer leur jugement sur leur propre niveau de compréhension de ce qui les entoure.

Cette capacité peut difficilement être mesurée de façon précise, notamment dans un cadre strictement scolaire. Elle est pourtant importante pour qu'un individu fonctionne de façon efficace dans une société moderne. Pour un scientifique, elle est décisive. Comme elle ne résulte pas de connaissances mais d'un comportement, elle doit s'acquérir particulièrement tôt, typiquement dès le collège.

Activités scientifiques libres

Il serait incongru de présenter des « solutions » toutes faites à un problème aussi complexe. Tout au plus peut-on plaider pour que des expériences diverses soient encouragées et soutenues. La première piste concerne l'organisation d'activités scientifiques libres dans le cadre de l'école. Pour que ces activités puissent fonctionner, des conditions matérielles doivent être remplies (documentation, plages dans l'emploi du temps), mais elles ne pourront être couronnées de succès que si des scientifiques s'y impliquent personnellement.

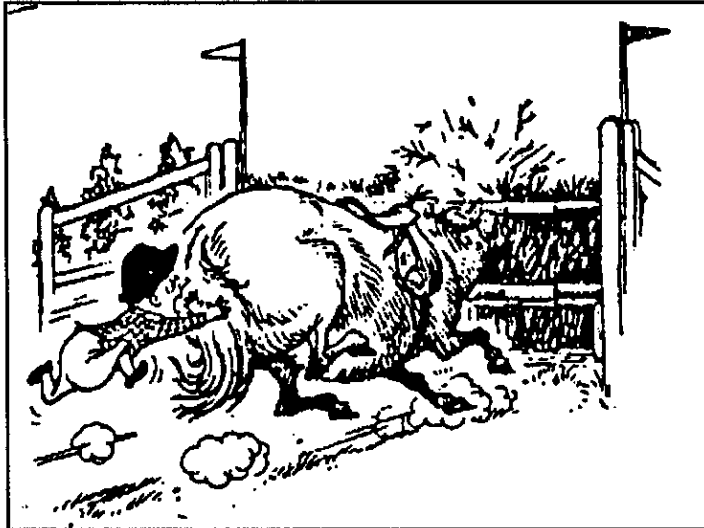
Une condition semble nécessaire pour que certaines distorsions préjudiciables à la formation de scientifiques en nombre suffisant disparaissent : faire évoluer les deux modes d'organisation de l'enseignement supérieur français de telle sorte qu'ils répondent clairement à des logiques différentes et utilisent des méthodologies différentes. Faire cesser cette « disqualification » des études universitaires est sûrement une entreprise difficile, qui ne met pas seulement en jeu le système éducatif mais la société tout entière. Parmi les actions dans ce sens figure la création de passerelles entre les deux systèmes à tous les niveaux où il y a orientation pour remettre les deux systèmes en compétition, par exemple la mise en place de troisièmes cycles communs aux universités et aux grandes écoles.

Enfin, il est important de mentionner le caractère déterminant de la qualité de la formation (initiale et continue) que les enseignants reçoivent. Pour être de véritables ambassadeurs de leur discipline, il est nécessaire qu'ils soient à l'aise avec celle-ci, et que leur curiosité scientifique n'ait pas été trop éteinte. Dans l'état actuel des choses, on peut craindre que l'absence de contacts entre enseignants et scientifiques (aggravée par le petit nombre de lieux où ces contacts pourraient naturellement trouver leur place et de documents accessibles), ne soit un handicap supplémentaire qui ralentira encore l'évolution de la situation. ■

(1) Enquête « Les maths et vous » menée auprès de 2 500 lycéens, voir le Monde du 12 janvier 1989.

GLOSSAIRE DE DIDACTIQUE

Guy BROUSSEAU - IUFM Bordeaux



L'importance des variables didactiques : ici l'obstacle didactique

DIDACTIQUE

I - Adjectif. 1554 ;
du grec «*didaktikos*»,
de «*didaskeln*» «*enseigner*».

a) Qui vise à instruire, qui a un rapport à l'enseignement. Traité, ouvrage, matériel, terme didactique. Le genre didactique : genre littéraire où l'auteur s'efforce d'instruire sous une forme agréable et poétique.

b) Pédant : Le terme «didactique» comprend une coloration péjorative. En effet, un matériel, un poème qui trahissent des fins didactiques apparaissent toujours comme des objets détournés de leur fonction fondamentale et par cela même médiocres, inférieurs : une poésie ne gagne rien à être didactique, et un moteur didactique est en général scié en deux et ne marche pas. D'emploi peu répandu, il permet, opposé à enseignement, d'en souligner les travers et les déformations. Le plus souvent il exprime ainsi, à peine dissimulée, une option péjorative à l'endroit de l'enseignement lui-même : «Celui qui ne sait pas faire des mathématiques les enseigne, et celui qui ne sait plus les enseigner, dit comment il faudrait le faire.»

II - Substantif féminin : La didactique

1°. Art d'enseigner. («La grande didactique». Comenius 1640). Ensemble des moyens et des procédés qui tendent à faire connaître, à faire savoir quelque chose, généralement une science, une langue, un art...

2°. Projet social de faire approprier, par un ou des élèves, un savoir constitué ou en voie de constitution ; par extension, tout ce qui concourt à l'enseignement d'un domaine de connaissances : objectifs, institutions, structures sociales, moyens de contrôle et d'évaluation...

Dans cette acception l'accent est mis :

- sur le rôle du savoir : ne relève de la didactique que ce qui, dans le projet éducatif, est spécifique du savoir visé,
- sur le caractère social du projet et donc sur les possibilités culturelles d'identification et de gestion des savoirs,
- sur les protagonistes et sur le caractère intentionnel de l'action (même l'autodidacte réalise un projet social).

Usage dérivé et précieux : L'enseignement lui-même, en tant que action de transmettre des connaissances (qui apparaît même alors comme une partie ou une phase de la didactique).

3°. Les moyens techniques, surtout «modernes», de l'enseignement. Tout ce qui, dans le projet didactique au sens 2, n'est pas l'enseignement direct : in extenso, l'invention, la description, l'étude, la production et le contrôle de moyens nouveaux pour l'enseignement : curriculums, objectifs, moyens d'évaluation, matériels, manuels, logiciels, aide à l'enseignement par ordinateur, ouvrages de formation...»
Syn. «ingénierie didactique» : production de tels moyens dans la mesure où elle s'appuie sur un usage rationnel de connaissances scientifiques en didactique au sens 6 ci-après.

4°. Certains des enseignements nécessaires à la formation des maîtres, en tant

que objet d'enseignement ou que moyen de formation, (principalement dans les pays où celle-ci a été confiée à des universités). Suivant les structures administratives, ce mot est employé :

- dans le sens de «pédagogie spéciale» pour désigner la formation donnée à des éducateurs en vue de les préparer à l'enseignement d'une discipline particulière, par opposition à leur formation générale à l'éducation. La didactique comprend alors un apport de connaissances (convenablement aménagées) dans cette discipline ;
- pour désigner des compléments de connaissances en sciences humaines, par opposition à la formation (dite fondamentale) dans la discipline ;
- pour désigner une formation technique et professionnelle des enseignants (méthodologie didactique : description des méthodes d'enseignement).

Dans ces contextes la didactique peut renvoyer à des enseignements très différents, selon qu'elle est considérée ou non, comme normative : elle dit ce qui doit être enseigné, et selon qu'elle s'autorise d'une connaissance empirique et pragmatique de l'enseignement ou au contraire qu'elle tend à s'appuyer sur des bases scientifiques.

5°. Connaissance de l'art d'enseigner ; connaissances sur l'enseignement ;

- a) Ensemble de connaissances résultant de recherches menées dans le cadre de domaines scientifiques classiques, sur l'enseignement d'un savoir donné ;
- b) Le champ scientifique de ces recherches

Encyclopédie : De nombreuses sciences produisent des connaissances qui peuvent appartenir dans ce sens à la didactique des mathématiques :

- la sociologie, puisqu'il s'agit d'un projet social et culturel,
- la sémiologie et la linguistique, puisqu'il s'agit de communication,
- la psychologie (et plus particulièrement la psychologie cognitive, les théories de l'apprentissage, l'épistémologie génétique...), puisque tout commence et tout finit par l'activité intellectuelle d'un sujet, et dans cette direction la neurophysiologie,
- la pédagogie et la pédiatrie (bien qu'elles ne s'intéressent principalement qu'aux enfants), la psychanalyse,
- l'épistémologie (théorie des connaissances humaines) et plus particulièrement la discipline elle-même, ici les mathématiques, ainsi que leur environnement, méta-

mathématique, histoire des mathématiques, etc.

D'autres, sans lui fournir de cadre théorique, lui proposent des instruments qui paraissent si nécessaires ou si prometteurs qu'ils tendent à jouer un rôle essentiel dans son développement : la statistique (comme instrument atypique de l'identification de faits), l'informatique (Enseignement Assisté par Ordinateur), l'intelligence artificielle...

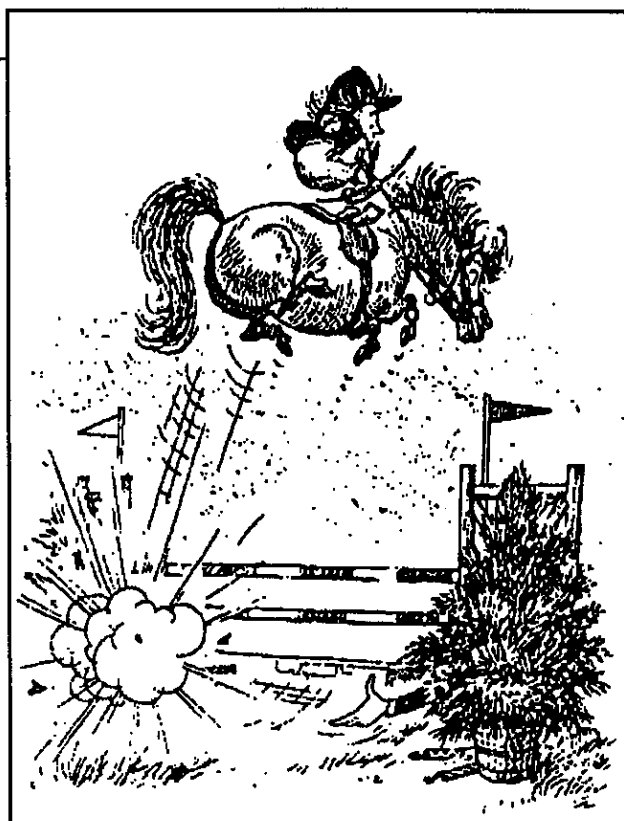
6°. Science s'intéressant à la production et à la communication de connaissances, dans ce que cette production et cette communication ont de spécifique de ces connaissances.

Encyclopédie. Cette acception est principalement utilisée en France, par les didacticiens des mathématiques. Elle tend à intégrer toutes les approches précédentes et à leur assigner une place par rapport à une théorie unifiante du fait didactique dont la justification et les méthodes seraient endogènes et spécifiques.

Elle étudie la façon dont des connaissances sont créées, communiquées et employées pour la satisfaction des besoins des hommes vivant en société, et plus particulièrement :

- d'une part, les opérations essentielles de la diffusion des connaissances (théorie des situations didactiques), les conditions de leur existence et de leur diffusion (l'écologie des savoirs) et les transformations que cette diffusion produit, aussi bien sur ces connaissances (transposition didactique) que sur leurs utilisateurs (apprentissages, rapport au savoir),
- d'autre part, les institutions et les activités ayant pour objet de faciliter ces opérations.

Elle utilise diverses approches (ergonomique, systémique, ethnologique...). Les didacticiens des mathématiques d'orientation fondamentale insistent sur son rattachement aux mathématiques el-



L'importance des variables didactiques : ici l'obstacle didactique

les-mêmes. Ils s'appuient sur des arguments historiques et épistémologiques tels que les suivants : que ce soit en vue de la recherche ou en vue de l'enseignement, la production et l'étude des problèmes qui sollicitent une notion mathématique ou un théorème, ainsi que les transformations des mathématiques (et leur étude), ont toujours fait partie de l'activité spécifique des mathématiciens. Une situation didactique est un problème élargi (ensemble de conditions qui appellent en réponse la production et l'emploi d'une connaissance mathématique). On ne conçoit pas de moyens extramathématiques de produire ce genre de connaissances par essence mathématiques.

De même, chaque grand secteur de connaissances tend à définir et à produire sa propre didactique. Cette orientation est conforme à la dernière définition. Elle limite actuellement les perspectives d'une didactique générale, même si des concepts créés dans tel ou tel secteur peuvent être utilisés dans un autre.

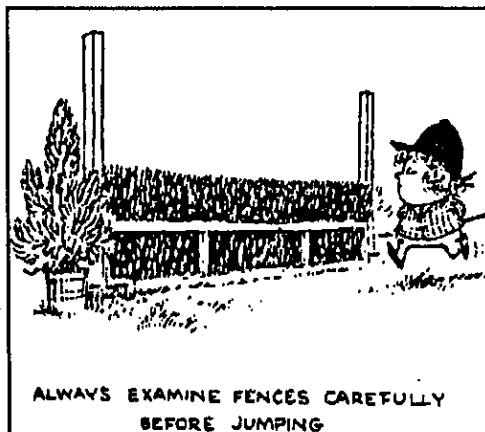
III - Substantif masculin

Ce qui est de l'ordre de la didactique (au sens 6), ce qui est relatif à l'organisation et à l'exercice de l'enseignement d'une connaissance. Ex. : Le didactique et le pédagogique.

SITUATION

n.f. (XIV^{ème}, du latin situs)

I - «Ensemble des circonstances dans lesquelles une personne (un groupe, une collectivité, etc) se trouve ; ensemble des relations qui unissent quelqu'un à son milieu, à la société ; ensemble des données qui caractérisent une évolution, une action (à un moment donné)...



*L'importance des variables didactiques :
ici l'obstacle didactique*

Spécialement en philosophie, sociologie et psychologie (et en didactique). Ensemble des relations concrètes qui, à un moment donné, unissent un sujet ou un groupe au milieu et aux circonstances dans lesquels il doit vivre et agir (sens II.2 de Robert). (Circonstances, conditions, état, place).

II - En didactique (*)

1°. Pour représenter les situations au sens I, on utilise comme modèles, des jeux (*) formels (automates) particuliers que l'on appelle aussi «situations» et à l'aide desquels on modélise les rôles réciproques d'un sujet (*) (enseignant, élève, etc), d'un milieu (*), et d'une connaissance (*). Exemple : La course à vingt.

2°. Système (*) unique et général dont pourraient dériver tous les modèles particuliers de situations (en particulier de situations didactiques).

Encyclopédie :

a) Sous-systèmes de la situation : milieu, sujet dont les relations et les interactions sont relatives à un domaine de savoir. Ces relations sont modélisées autant que possible par un jeu formel qui fait apparaître des parties (suites de décisions), des tactiques et des stratégies (décisions régulières), dépendant elles-mêmes de connaissances et de savoirs. A chaque situation correspondent ainsi des connaissances dites pertinentes dont «une», dite caractéristique, qui commande la stratégie optimale. Cette connaissance peut changer selon les valeurs des variables pertinentes de «la» situation. V. situation fondamentale (*).

Le contrôle d'un milieu par un sujet conduit pour des raisons d'économie à des adaptations du milieu et du sujet. Ce contrôle, toujours pour des raisons d'économie, se fait par niveaux, modélisés par des infra-systèmes de la situation : chaque niveau est caractérisé à la fois par un type de connaissance (savoir culturel : langage ou théorie, connaissance publique ou privée...), un type de structuration du milieu (communication, débat...), un niveau d'apprentissage (un des types de Bateson)...

b) Infrasytème de la situation (systèmes obtenus en conservant tous les sous-systèmes, mais seulement quelques relations) : situation d'action (*), de formulation (*), de validation (*), d'institutionnalisation (*)...
c) Hyposystèmes de la situation (systèmes obtenus en ne considérant que quel-

ques sous-systèmes et toutes leurs relations) : situation objective, situation de référence, situation d'apprentissage (ces hyposystèmes sont emboîtés), situation didactique (*), non didactique, a-didactique (*), autodidactique, d'apprentissage (*).

d) Caractères d'une situation, déterminés par les variables pertinentes (*) : S. ouverte, fermée, (entropie : incertitude du sujet, de la situation), autocorrective (existence de régulations)...

V. théorie des situations (*), approche systémique des situations didactiques (*).

V. institution (Chevallard), rapport au savoir (Chevallard), pratique sociale, pratique de référence (Martinand).

THEORIE DES SITUATIONS

Ensemble d'assertions méthodiquement organisées relatives aux situations (au sens 2) destiné d'une part à permettre la représentation et la prévision aussi précises que possible du fonctionnement d'une situation (au sens 1) et d'autre part à faciliter le contrôle de la consistance des idées, des concepts abstraits plus ou moins organisés appliqués au domaine de l'enseignement. Il s'agit donc d'un moyen de choisir et d'éprouver les instruments théoriques de l'analyse des situations avant et après leur mise à l'épreuve expérimentale, parmi ceux qui paraissent pertinents, nécessaires ou commodes.

APPROCHE SYSTEMIQUE DES SITUATIONS DIDACTIQUES

Le caractère apparemment local des modèles de situations est complété par une tendance holistique à dériver ces modèles d'une «situation générale unique» conçue alors comme un système au sens de la théorie des systèmes et à rechercher une confrontation globale et permanente du fonctionnement de ce système avec les faits et phénomènes (historiques ou expérimentaux) qui semblent en relever.

SITUATION DIDACTIQUE

Ce terme est utilisé dans différents sens, suivant l'utilisateur.

1°. Modèle systémique pour l'ensemble des conditions liant effectivement tous les protagonistes d'une relation didactique (*), y compris le cas échéant l'observateur de la relation.

2°. Ensemble de conditions relatives au milieu, à l'élève, et à l'enseignant, que celui-ci projette de réaliser ou réalise en vue d'enseigner une connaissance ou un savoir. Dans ce sens la situation didactique est l'instrument et le résultat de l'action de l'enseignant. V. situation-problème.

3°. Ensemble de conditions que l'enseignant envisage de mettre en œuvre comme moyen d'enseignement (et qu'il doit donc pouvoir entièrement prévoir et expliciter). Ces conditions sont relatives au milieu (matériel) et à l'élève (consignes), mais pas à l'enseignant.

a) Au sens le plus restreint les conditions explicitées à l'élève ne concernent que le milieu (énoncé) et la tâche (question) ; lui-même doit identifier et reconnaître le moyen d'enseignement, et lui appliquer des consignes implicites standardisées. La notion de situation coïncide alors avec celle, classique, d'exercice ou de problème.

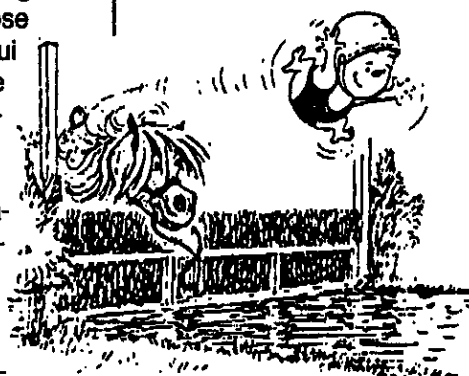
b) Le terme situation didactique sera par conséquent utilisé par les enseignants en opposition à «problème» pour signaler la présence d'un environnement plus large (un matériel spécifique par exemple), ou appelant des types d'actions originaux, par la nécessité de consignes particulières ou par l'absence de questions, par la présence de dispositifs de correction (connus ou non de l'élève) etc, qui assurent une certaine évolution temporelle autonome...

4°. Situation d'enseignement dont l'évolution suppose l'intervention constante, l'action soutenue, la vigilance d'un enseignant. Dans ce sens s. didactique s'oppose à s. a-didactique (*) : situation qui apparaît à l'élève comme délivrée de toute intervention et de toute intention didactiques directes).

Encyclopédie :

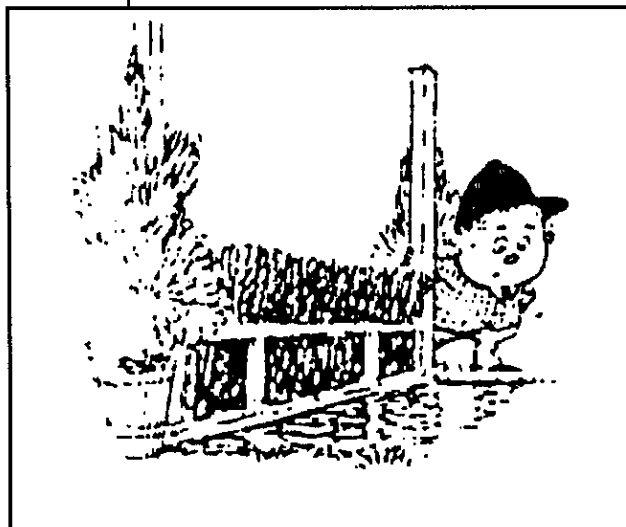
a) Sous-systèmes de la situation didactique : enseignant, enseigné, milieu, dont les relations sont relatives à un domaine de savoir.

b) Infrasystèmes de la situation didactique (systèmes de la situation didactique (systèmes obtenus



La mise en place
de nouvelles situations

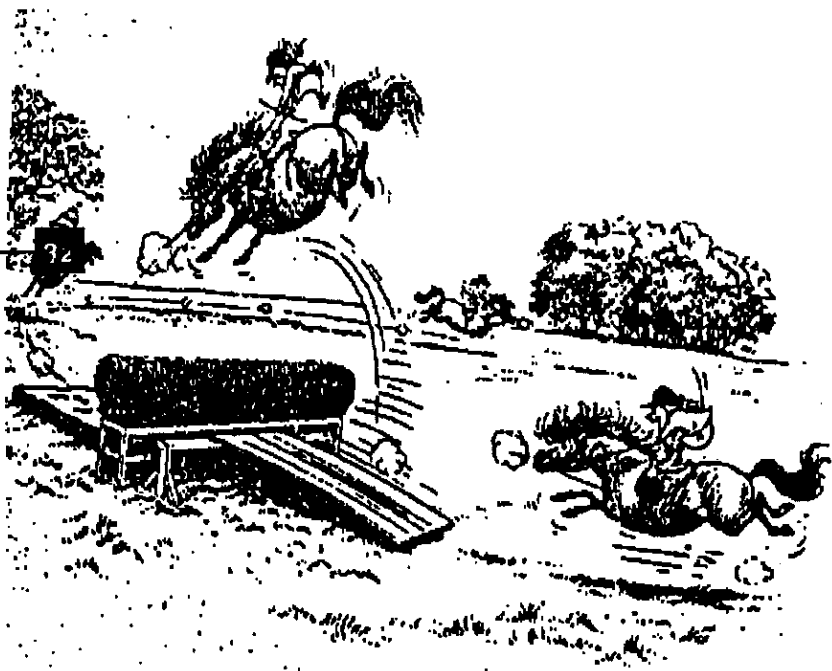
nus en conservant tous les sous-systèmes, mais seulement quelques relations : situation d'action (*), de formulation (*), de



La mise en place de nouvelles situations

validation (*).

c) Hyposystèmes de la situation didactique (systèmes obtenus en ne considérant que quelques sous-systèmes et toutes leurs relations) : situation objective, situation de référence, situation d'apprentissage, situation d'enseignement, situation métadidactique (ces hyposystèmes sont emboîtés).



L'importance des variables didactiques

d) Caractères d'une situation, déterminés par les variables didactiques (*) : S. ouverte, fermée (entropies : incertitude de l'enseignant, des élèves, de la situation), autocorrective (régulations)...

SITUATION-PROBLEME

Terme utilisé par les enseignants pour désigner des situations (au sens 2) qui se distinguent des problèmes classiques par une certaine indétermination des questions posées, des objectifs d'enseignement, par l'existence d'un éventail de solutions et de décisions qui feront l'objet d'une transaction au moment même de l'acte d'enseignement. Une situation-problème ne détermine donc pas une situation didactique, mais elle est considérée par les praticiens comme un moyen d'enseignement (non reproductible).

* Un JEU FORMEL concret J est un 7-uplet $\langle X, E, I, T, g, Q \rangle$ comprenant un ensemble X de joueurs, un ensemble E d'états possibles (les dispositions pertinentes possibles des éléments du jeu), une application de E dans P(E) qui associe à chaque état du jeu un ensemble d'états permis (les choix offerts à chaque coup par le règlement), un état initial I, un ensemble d'états terminaux T, une application g de ces états terminaux dans RxX (les gains et les pertes par rapport aux mises), éventuellement une application Q (de X dans X par exemple) qui désigne le joueur succédant à celui qui vient de déterminer le nouvel état du jeu (le trait).

* Une partie est une application d'une section commençante de N dans ExX, dont le dernier élément appartient à TxX. Une stratégie est une application s de E dans E (où s(e) C (e)).

MILIEU

Sens III (Robert)

1°. Ce qui entoure, ce dans quoi une chose ou un être se trouve.

2°. (Vers 1830) Geoffroy St-Hilaire : Ensemble des objets matériels, des circonstances physiques qui entourent et influencent un organisme vivant.

3°. Par extension (1842) A. Comte, Taine : Ensemble des conditions extérieures dans lesquelles vit et se développe un individu humain. V. situation, noosphère. □

«PEUT-ON ENSEIGNER LES MATHÉMATIQUES AUX ENSEIGNANTS ?»

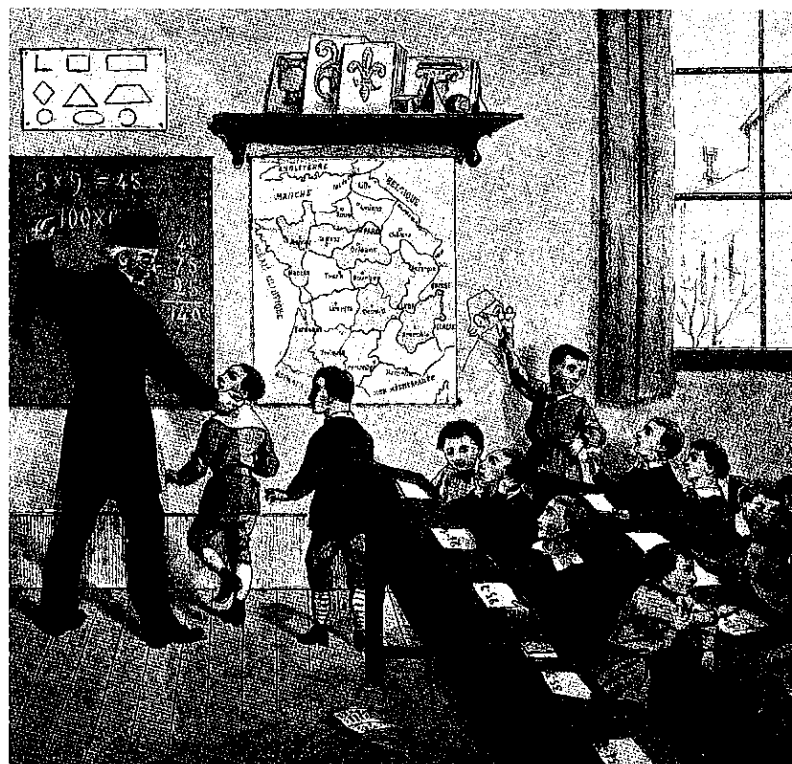
André DELESSERT - Lausanne

Lorsque les organisateurs du présent Forum m'ont suggéré de parler de la formation des enseignants en mathématiques, je me suis senti pris au piège. Voilà bientôt un quart de siècle que je laisse entendre que je forme des mathématiciens pour l'enseignement. Il m'est difficile de prétendre que je n'ai aucune idée sur la question. Mais j'avoue qu'avec le temps, mes principes à ce sujet ont perdu un peu de leur tranquille assurance. Aujourd'hui, je me sens tenu à beaucoup de prudence, et parfois de doute. Cela se traduit en partie par le choix du titre que j'ai donné à cet exposé.

1. Justification du titre

D'abord ce titre est une question. Et, on le verra, une question à laquelle je ne suis pas sûr de donner une réponse satisfaisante. Ensuite, ce titre a un caractère choquant. Je dois donc le justifier, ne serait-ce que pour établir que je ne cherche pas à choquer gratuitement.

Lorsque je parlerai d'enseignant par la suite, j'entendrai des personnes enseignant les mathématiques, à n'importe quel titre ; comme spécialité ou comme branche parmi d'autres. Tous ces enseignants sont censés recevoir une triple formation : en pédagogie, en didactique des mathé-



matiques et en mathématiques proprement dites. C'est à cette troisième composante que je vais m'intéresser.

Permettez-moi de poser deux assertions :

1.1 Les mathématiques, qui n'ont pas de fin, n'ont probablement pas de début non plus.

1.2 Dans la mesure où il existe, le début des mathématiques n'appartient certainement pas au contenu de l'enseignement mathématique de l'école (primaire ou secondaire).

Expliquons-nous. Il est clair qu'on ne pourra jamais épuiser la liste des théorèmes mathématiques, donc que les mathématiques sont sans fin. En ce qui concerne le début, les choses sont moins claires. Bourbaki prétend prendre les mathématiques à leur début. Mais cela veut simplement dire qu'il commence son exposé par le commencement. Cela ne nous apprend rien sur les mathématiques elles-mêmes. Ainsi à l'époque de Dedekind, on estimait que le «nombre naturel» était au début des mathématiques. Par la suite, on a su caractériser les nombres naturels à partir des «ensembles», qui sont ainsi venus se placer au début des mathématiques. Puis certains ont estimé qu'une notion plus générale, celle de «catégorie», par exemple, devait précéder celle d'ensemble. Et on pourrait continuer ainsi de suite, indéfiniment. De sorte que, par une espèce de symétrie, l'édifice mathématique aurait une infinité potentielle d'étages au-dessous du sol, comme au-dessus. Mais on sait aussi — et c'est un théorème assez profond — que cette descente infinie n'améliore aucunement la solidité de l'édifice. C'est donc à un double titre qu'on peut admettre que les mathématiques n'ont pas de début.

Il va de soi que si les mathématiques n'ont pas de début, ce début inexistant ne saurait appartenir à la matière de l'école élémentaire. Mais je veux dire autre chose : les développements, les théorèmes qui conduisent à admettre que les mathématiques n'ont pas de début sont très diffi-

les. On peut éventuellement les faire apparaître au commencement d'un exposé de mathématiques, mais en aucun cas à l'école élémentaire.

De nos deux premières assertions résulte une troisième :

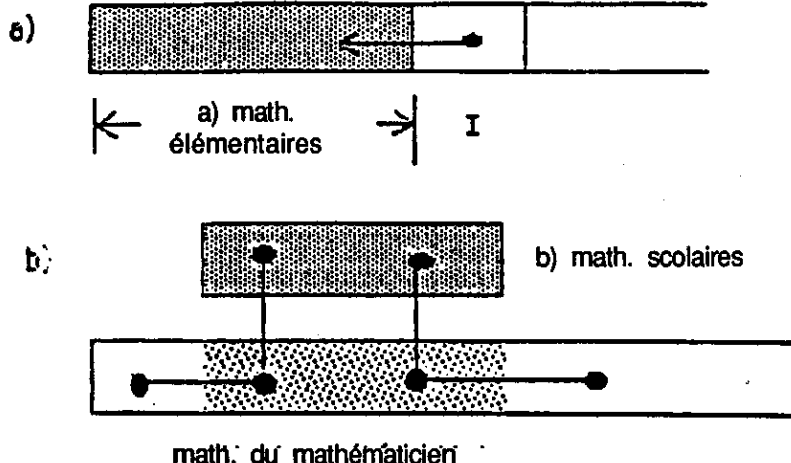
1.3 Il existe (au moins) deux présentations des mathématiques :

- une pour mathématiciens
- une autre, simplifiée, pour l'école ; qui, en particulier laisse de côté les considérations difficiles sur le «début».

Commentons cela. On peut «a priori» se représenter l'enseignement des mathématiques de deux manières :

L'assertion 1.3 exprime qu'en réalité, c'est la situation b) qui se présente. Alors que généralement, on voit les choses selon le diagramme a). Pour notre propos, la conception a) implique que l'enseignant a simplement étudié, avant ses élèves, le programme qu'il doit leur apprendre. Avec, peut-être, une incursion dans quelques sujets plus avancés. Pour simplifier, nous dirons que cette formation est celle d'un moniteur. Expression qu'il ne faut pas prendre dans un sens péjoratif : elle ne préjuge en rien des qualités pédagogiques ou didactiques de l'enseignant ainsi formé. En revanche, la conception b) conduit l'enseignant à étudier un exposé mathématique plus élaboré que celui de l'école, à traduire des faits mathématiques «scolaires» en fait mathématiques au sens propre. C'est ce que nous appellerons une formation de mathématicien-enseignant. Notons que, dans le diagramme b), je fais apparaître des «mathématiques scolaires», non pas des mathématiques élémentaires qui, en un sens, n'existent pas ; les mathématiques «du début» étant au moins aussi complexe que les autres.

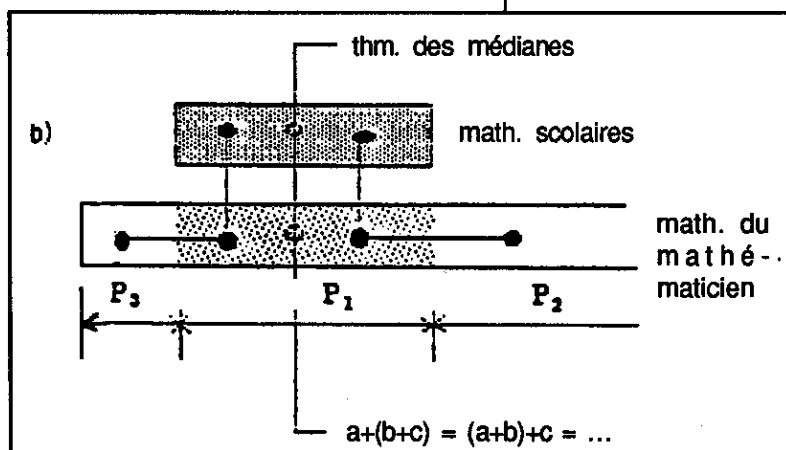
Glissons ici une parenthèse. J'utilise à dessein la locution de «mathématicien-enseignant». Cela signifie, en particulier, que la formation à laquelle je pense doit être valorisante ; elle doit donner au mathématicien les moyens d'apporter une contribution culturelle profonde à ses élèves. Alors que, trop souvent, l'enseignement est regardé comme une voie de garage pour sous-mathématicien.



Dès lors, une question préalable se pose : faut-il choisir la deuxième formation ou la première ? C'est-à-dire, doit-on enseigner des mathématiques de mathématicien aux enseignants en mathématiques ? Ce que nous avons avancé jusqu'ici pousse à répondre affirmativement. Mais nous devons y revenir. La question qui se pose ensuite nous ramène à notre thème : est-il possible d'enseigner les mathématiques (du mathématicien) à l'enseignant (en mathématiques) ? Si la réponse devait être «non», la formation des enseignants en mathématiques se heurterait à un obstacle majeur. On est donc tenté de répondre positivement. Par cet exposé, nous aimerions montrer que la question est moins évidente qu'il n'y paraît et qu'elle soulève des difficultés sur des points qui, d'ordinaire, semblent aller de soi.

2. Précisions sur les questions posées

Avant d'esquisser une réponse aux questions générales qui précèdent, précisons un peu leur signification. Reprenons le diagramme b) :



La composante mathématique de la formation de l'enseignant dont il est question ici comporte trois parties :

— P₁ : ce qui en mathématiques du mathématicien recouvre le domaine scolaire. (Par exemple : au théorème des médianes correspond la commutativité de l'addition vectorielle).

— P₂ : ce qui vient après P₁ et qui peut expliquer ou justifier certains obstacles rencontrés en mathématiques scolaires. (Par exemple, l'impossibilité de diviser un angle en trois à la règle et au compas).

— P₃ : ce qui précède P₁ et qui permet de comprendre certaines difficultés touchant

les premières notions traitées à l'école. (Nous en verrons des exemples plus loin).

En fait, les choses ne sont pas tout à fait aussi linéaires. Ainsi l'axiome du choix, qui concerne les ensembles, est équivalent au théorème de Tychonoff, selon lequel tout produit d'espaces compacts est compact.

Il importe de remarquer que la formation du mathématicien-enseignant doit prendre en compte la totalité du diagramme b), y compris les liaisons entre les mathématiques scolaires et celles du mathématicien.

Les questions principales que nous nous sommes posées — doit-on, peut-on enseigner les mathématiques (du mathématicien) aux enseignants (en mathématiques) — soulèvent à leur tour les questions partielles suivantes :

Q 1. Existe-t-il une formation mathématique qu'on pourrait dire «de base» pour le mathématicien-enseignant ?

Q 2. Cas échéant, existe-t-il des difficultés importantes dans ces mathématiques de base ?

Q 3. Si oui, y en a-t-il qui concernent le contenu des mathématiques scolaires ?

Q 4. Ces dernières peuvent-elles être surmontées par le mathématicien-enseignant ?

En cas de réponse affirma-

tives aux questions 1, 2 et 3, la réponse à l'interrogation de notre titre est entièrement suspendue à celle qu'appelle la question 4. Examinons donc l'un après l'autre ces quatre points.

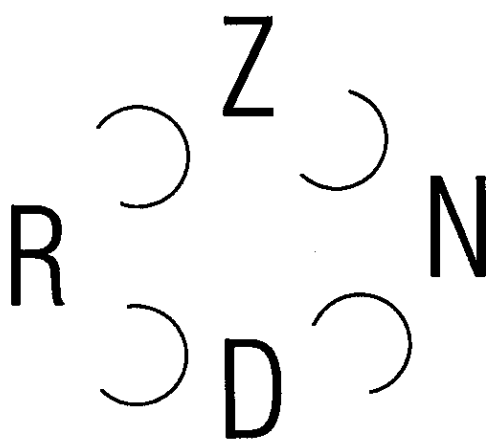
3. Quelques éléments de réponses aux questions partielles

Q 1. Existe-t-il un enseignement mathématique de base pour les mathématiciens-enseignants ?

La réponse à cette question dépend de la position scientifique ou philosophique de celui qui la formule et du type de solution

qui est visé. Celle que je vais esquisser est personnelle. Elle vient de quelqu'un qui s'efforce depuis plusieurs années de comprendre le statut scientifique, philosophique et culturel des mathématiques d'aujourd'hui. En outre, elle ne tient compte que du contenu mathématique souhaitable, mais pas de la possibilité de l'enseigner effectivement. Dans ces hypothèses, la formation mathématique qui me semble nécessaire au mathématicien-enseignant comporte les volets suivants :

V 1. Les nombres selon le diagramme suivant :



Ce diagramme ne doit pas inspirer l'idée d'une construction, mais au contraire, la présence d'objets coexistants, liés entre eux de diverses manières.

V 2. Le plan et l'espace (à trois dimensions) euclidiens

Connexions entre la géométrie des figures simples et la géométrie des coordonnées.

V 3. Continuité et mesure

Topologie des espaces numériques, intégrales, dérivations, probabilités.

V 4. Ensembles et les fonctions

Les ensembles et les fonctions comme outils pour travailler sur l'infini.

R : nombres réels

Z : nombres entiers rationnels

D : nombres décimaux positifs ou nuls

N : nombres naturels

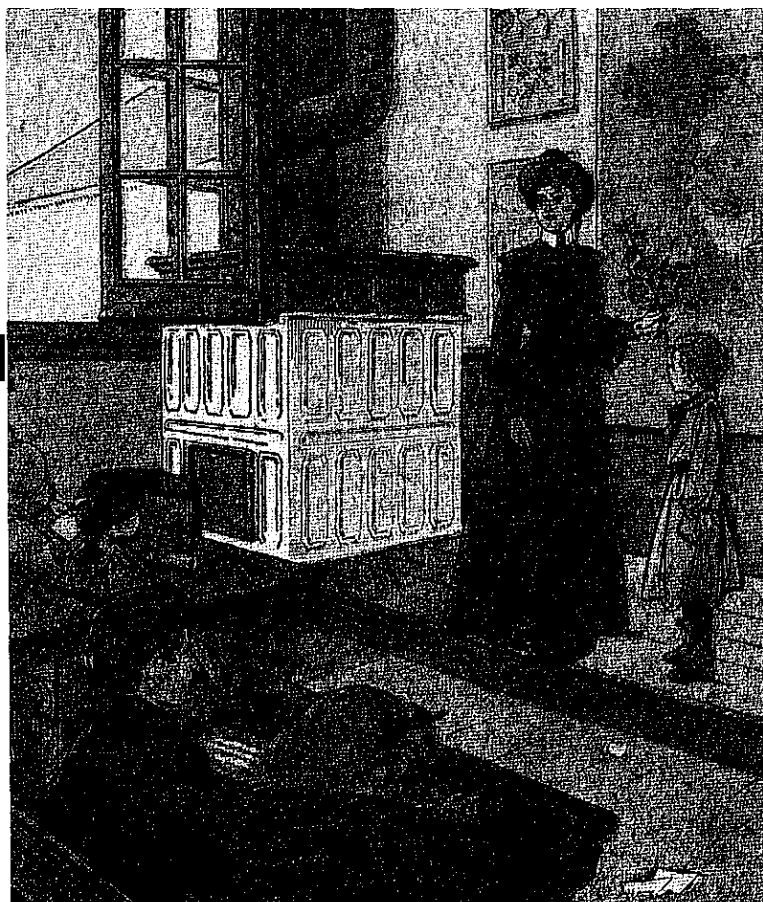
Je ne précise pas ici le contenu exact ni le mode de présentation de ces matières. Ils peuvent varier indéfiniment.

Q 2. Existe-t-il des difficultés importantes dans les mathématiques de base ?

La réponse générale est : oui. Nous allons le montrer par quelques exemples qui permettront aussi de répondre aux deux dernières questions. Nous présenterons d'abord sèchement ces exemples. Puis nous les commenterons.

Exemple E 1. Le calcul des aires polygonales dans le plan se ramène à des opérations de découpage finies. Mais pour le volume des polyèdres de l'espace, il faut des opérations infinitésimales. Cela se traduit par l'existence de théorèmes de géométrie plane qui n'ont pas d'équivalents dans l'espace, et inversement. Un exemple de même genre, plus simple, concerne la mesure des angles dans le plan.

Exemple E 2. La plupart des problèmes scolaires d'algèbre et de géométrie ne peuvent être menés à bonne fin que lorsqu'ils conduisent à des opérations ne



comportant rien de pire que des extractions de racines carrées. Pensons à la trisection d'un angle quelconque.

Exemple E 3. Existe-t-il beaucoup de «4» dans le développement décimal de $\sqrt{2}$? Une infinité, ou pas ?

Exemple E 4. Qu'est-ce au juste que l'ensemble des parties $P(E)$, lorsque E est un ensemble infini ?

Formulons quelques remarques à propos de ces exemples.

L'exemple E 1 montre une difficulté sur laquelle on peut buter avec de jeunes élèves. Il est difficile, voire impossible de leur expliquer le nœud de l'affaire, bien qu'un maître qui a étudié un peu de calcul intégral puisse le comprendre. La fonction du maître est de connaître les faits mathématiques qui se cachent derrière de tels obstacles, de comprendre leur portée et de sentir ce qu'ils doivent ne pas dire à leurs élèves.

L'exemple E 2 montre une difficulté sur laquelle on tombe souvent lorsqu'on cherche à appliquer les mathématiques à des situations concrètes. Même bien formé, le maître a généralement de la peine à se sortir d'affaire : à quoi reconnaît-on que l'équation

$$x^5 - 12x^3 + 8x^2 - 17x + 3 = 0$$

est ou n'est pas résoluble par radicaux ?

L'exemple E 3 peut apparaître dans une classe d'enfants de douze ans, je crois. A ma connaissance, personne ne sait répondre à la question posée, alors qu'il n'y a pas de difficulté en base 2.

L'exemple E 4 est plus désagréable encore. Depuis les travaux de Paul J. Cohen (1963), on sait qu'il est impossible de préciser ce qu'est $P(N)$. Et plus généralement ce qu'est $P(E)$ quand E est infini. L'opération qui fait passer d'un ensemble E à l'ensemble $P(E)$ est sans mystère pour les petits ensembles finis. Mais elle est purement formelle pour E infini. Autrement dit, on peut évoquer $P(E)$, donner quelques éléments de $P(E)$ à titre d'exemples. Mais on ne peut aucunement se le représenter, ni le «sentir». Sans sortir de la théorie classique des ensembles, on peut faire une infinité d'hypothèses exclusives



les unes des autres sur la «richesse» de $P(E)$.

Ce n'est pas grave pour le mathématicien. Mais qu'en est-il à l'école, pour le maître et pour les élèves ? On travaille dans $P(N)$ quand on parle des multiples de 5, des nombres premiers, du bon ordre dans N . Le passage de N à R n'évite pas $P(N)$. L'ensemble des fonctions arithmétiques $N \rightarrow N$ est aussi complexe que $P(N)$, tout comme l'ensemble des relations binaires dans N . C'est bien pire pour l'ensemble des relations binaires dans R et pour celui des fonctions $R \rightarrow R$. ce dernier ne doit pas être confondu avec l'ensemble des fonctions «calculables» données par des algorithmes. L'essentiel de la notion de fonction réside justement dans cette distinction.

Des remarques du même genre, en plus grave peut-être, pourraient être faites à propos d'une autre propriété relative aux ensembles, à savoir l'axiome du choix. Ne nous y attardons pas. Constatons simplement que le langage des ensembles, à lui seul, soulève des difficultés majeures. Ou bien on se borne à l'employer dans le cas de petits ensembles finis, ce qui peut soulever des difficultés : comment et pourquoi distinguer a et $\{a\}$? par exemple. Ou bien on l'applique à des ensembles infinis, pour lesquels il a été élaboré. Mais alors c'est un outil formel. Ce dilemme touche tout l'enseignement puisque celui-ci est construit autour de la notion d'ensemble et de fonction.

Il résulte de ces exemples que les trois dernières questions posées admettent une réponse positive :

- il existe des difficultés majeures dans les mathématiques de base,
- certaines d'entre elles, importantes, concernent les mathématiques scolaires,
- parmi celles-ci, il en existe qui sont essentiellement insolubles.

Cette dernière assertion est inquiétante. Elle semble impliquer qu'il est impossible d'enseigner à l'enseignant toutes les mathématiques dont il aurait besoin pour comprendre en profondeur le contenu des mathématiques scolaires. Heureusement, il est possible de la tempérer. En réalité aucun mathématicien ne sait résoudre ces difficultés. Mais, dans la mesure où il n'enseigne pas les mathématiques scolaires, ça ne le dérange pas. Dans sa pratique quotidienne, il accepte nécessairement de travailler avec des objets mathématiques qui ne sont pas déterminés d'une manière constructive. En revanche, le mathématicien-enseignant est mal à l'aise. Il aimerait à la fois enseigner de vraies mathématiques et construire (ou déterminer complètement) tous les objets mathématiques dont il se sert en classe. Or ce sont là des conditions qui s'excluent.

La situation s'éclaire lorsque le mathématicien-enseignant accepte de travailler dans les conditions suivantes :

- Il sait qu'il emploie des objets mathématiques qui n'admettent aucune construction

- il renonce à construire une bonne partie des objets mathématiques dont il a besoin en classe

- Il fonctionne à la manière d'un guide de montagne : l'enseignement mathématique est une aventure intellectuelle risquée ; il y a des crevasses, mais son flair et son expérience lui permettent de les éviter.

4. Essai de réponse

à la question posée par notre titre, sous forme d'un projet de formation pour mathématicien-enseignant

Idéalement cette formation devrait comprendre toutes les mathématiques du mathématicien qui ont des incidences sur les mathématiques scolaires. Ces incidences elles-mêmes devraient y être étudiées. Cela représente un travail considérable.

L'enseignant exerce son métier à un moment de l'histoire des mathématiques. Ce moment (1988) est particulier en ceci que les mathématiques ont subi une mutation profonde entre 1930 et 1965 (publication des travaux de Gödel et de Cohen). Nous sommes à une période des mathématiques qui diffère sur des points essentiels de toutes les périodes précédentes. Mais en même temps, beaucoup de notions et de problèmes mathématiques ont traversé l'histoire, depuis l'Antiquité ou le 17^e siècle. L'enseignant doit se situer dans une perspective historique. De plus la



mutation évoquée a opposé des modes de pensée, des traditions philosophiques qui sont bien vivantes aujourd'hui.

Cela me conduit à formuler, à titre personnel, un schéma de formation du type suivant :

4.1. (Un ou) deux chapitres choisis de mathématiques

- algèbre sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, courbes algébriques
- analyse réelle, équations différentielles, calcul des variations
- géométrie différentielle, courbes et surfaces dans $\mathbb{R}^3$
- mesure, probabilités, intégrales
- topologie dans les espaces numériques
- etc.

4.2. Connaissance des fondements

- logique, ensembles, axiome du choix, histoire récente de ces notions

4.3. Mathématiques élémentaires d'un point de vue élevé

— un chapitre choisi

4.4. Un chapitre d'histoire et de philosophie des mathématiques classiques

Commentons brièvement ce tableau.

Les points 4.1 et 4.2. recouvrent les matières évoquées sous le terme de «mathématiques de base», et au-delà. Le choix des chapitres, sous 4.1., est presque indifférent pour autant que leur présentation soit «self-contained», donc qu'elle introduise proprement toutes les notions dont elle a besoin.

Une connaissance raisonnable des fon-

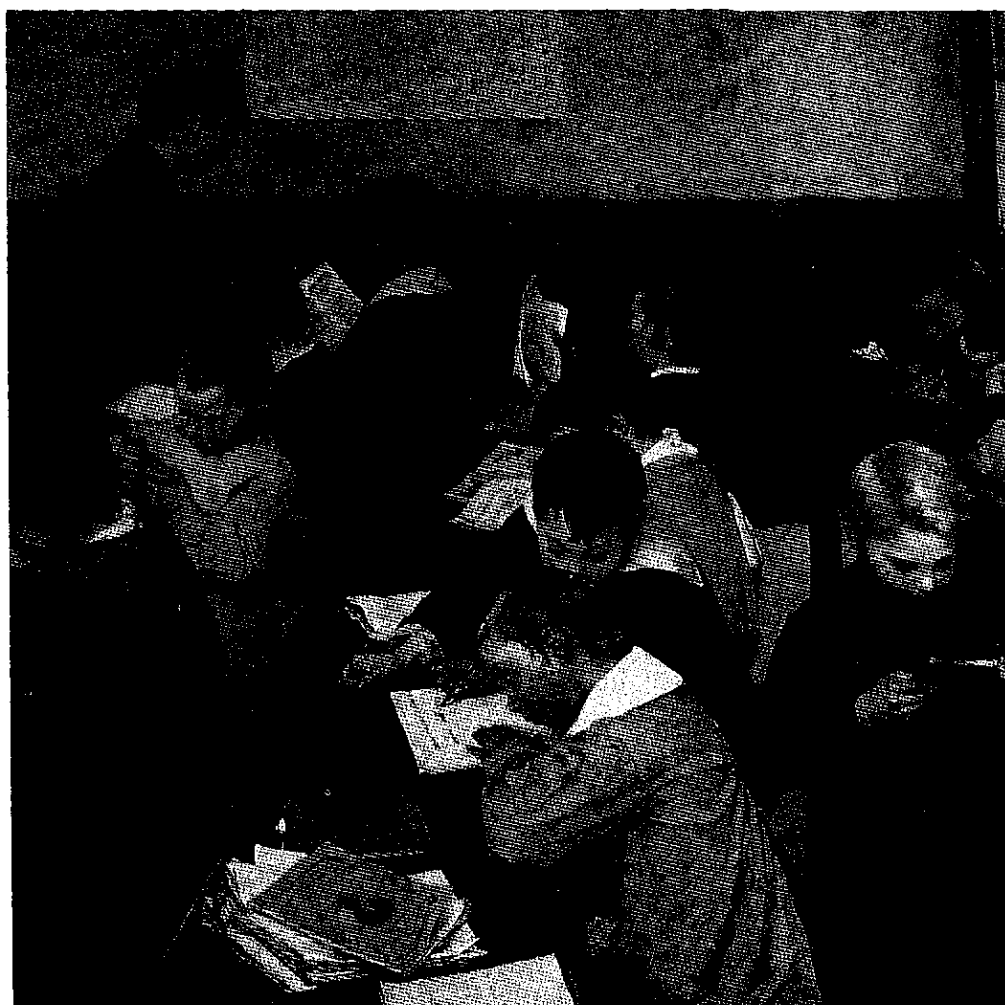
dements me paraît indispensable pour comprendre le fossé irréductible entre les objets construits et les objets caractérisés par des propriétés formelles, tels que le sont presque tous les êtres mathématiques importants rencontrés à l'école. Une telle connaissance aurait permis naguère de se mettre à l'abri de certains programmes scolaires absurdes.

Le point 4.3. doit faire sentir les liaisons et les oppositions entre les mathématiques scolaires et les mathématiques du mathématicien.

Le point 4.4. est indispensable pour mettre en lumière la portée culturelle des mathématiques d'aujourd'hui. Il devrait évoquer des problèmes toujours actuels dont l'histoire nous apprend l'évolution : l'opposition fini-infini, l'idée de figure ou de lieu géométrique, celle de nombre, la notion de mesure, et ainsi de suite.

5. Conclusion

Pour conclure, je voudrais formuler quel-



ques remarques sur ce qui précède et soulever quelques questions.

5.1. On aura sans doute ressenti une certaine réserve, un certain embarras dans la réponse que j'ai tenté d'apporter à la question posée. En effet, il ne me semble pas du tout évident a priori qu'on puisse enseigner les mathématiques du mathématicien aux enseignants. On exige de ceux-ci une souplesse d'esprit, une curiosité culturelle qu'on ne réclame pas du mathématicien non enseignant.

En outre, depuis un demi-siècle, les mathématiques ont changé de nature. Elles sont devenues non-constructives. Les mathématiques constructives relèvent de l'intuitionnisme, que personne ne songe à introduire à l'école. Si l'enseignement actuel des mathématiques doit être en conformité avec les mathématiques d'aujourd'hui, les enseignants doivent connaître le virage pris par les mathématiques au cours des dernières décennies. Cette connaissance exige une préparation spécifique, difficile, qui n'a rien à voir avec l'instruction d'un «moniteur». Sauf exception, on ne peut pas l'imposer au généraliste.

5.2. Une question surgit alors : que sont les mathématiques scolaires ? Autrement dit, quelles sont les mathématiques que doit connaître le «moniteur» ? Jusqu'ici elles m'ont paru trop complexes. On y a incorporé des sujets, des notions qui traduisent l'inquiétude des enseignants, en leur qualité de mathématiciens, mais dont il n'est pas évident qu'elles servent à une bonne formation des enfants. Bien entendu, le danger inverse existe aussi : des mathématiques scolaires qui ne soient pas conformes aux mathématiques du mathématicien. A mon sens, ce qui précède justifie une réflexion sur ce sujet.

5.3. L'esquisse de formation que j'ai proposée est praticable par les enseignants qui passent par l'université. Je doute qu'elle soit vraiment dangereuse pour les mathématiciens non-enseignants. Un problème se pose pour les enseignants non-mathématiciens.

Le maître généraliste qui ne s'intéresse pas particulièrement aux mathématiques reste un «moniteur en mathématiques». Il fait preuve généralement de compétences supérieures en pédagogie, en psychologie, etc. Mais pour lui, le critère de vérité en

mathématiques, c'est le manuel, le programme et probablement ce qu'il a appris à l'âge de ses élèves. Abandonné à lui-même, il n'a pas d'autre recours devant les difficultés inattendues qui se présentent nécessairement en mathématiques scolaires.

Reste le maître généraliste qui s'intéresse particulièrement aux mathématiques. Par des lectures personnelles, des séminaires, des conférences, il peut accéder à une partie plus ou moins importante de la formation du mathématicien-enseignant. Mais il aura sans doute encore besoin, à l'occasion, de l'avis d'un mathématicien-enseignant. Il m'est arrivé de comparer l'initiation aux mathématiques à l'école de la nage. Pour celui qui veut enseigner la natation, il n'est pas mauvais d'accumuler des connaissances en hydraulique, en physiologie. Mais rien ne vaut un maître-nageur.

5.4. Cette dernière remarque me donne l'occasion d'insister à nouveau sur deux conclusions qui me semblent en découler nécessairement :

- On n'accordera jamais trop d'importance à la formation continue des enseignants en mathématiques.
- L'enseignement mathématique est un travail à mener en équipe. □

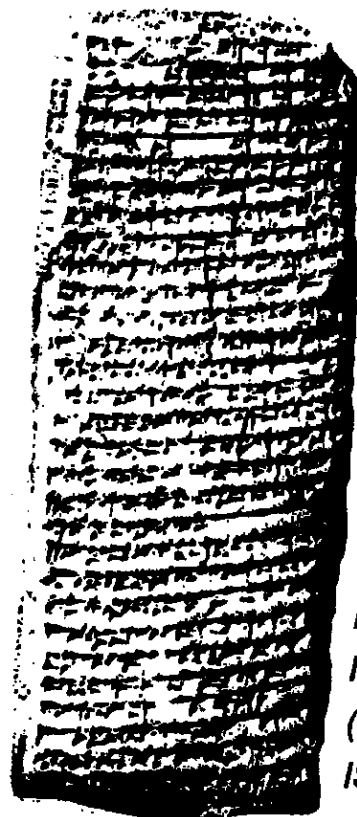
(1) Note.

Les forums constituent la partie la plus efficace de la coordination intercantonale de l'enseignement des mathématiques dans l'ensemble de la Suisse. Rappelons que cette coordination, mise en place par la CDIP (Conférence suisse des directeurs de l'instruction publique), comprend actuellement trois volets :

a) des recommandations aux cantons intitulées «Points de convergence et lignes directrices», relatives à l'enseignement des mathématiques durant la scolarité obligatoire (3 juin 1982) .

SUR LE CONCEPT D'ETHNOMATHEMATIQUE

Paulus GERDES - Maputo
(Mozambique)



*Ce texte fait suite
à l'article du même auteur
paru dans le PLOT n°54 de mars 91.*

*Il est traduit de l'introduction du livre
«Etudes Ethno-mathématiques» par :
Annie Capoulade
et Amélia Russo de Sa,*

*Département de Français, Institut Supé-
rieur Pédagogique,
Maputo, Mozambique.
(Publié en allemand,
ISP-Mozambique/ KMU -RFA, 1989).*

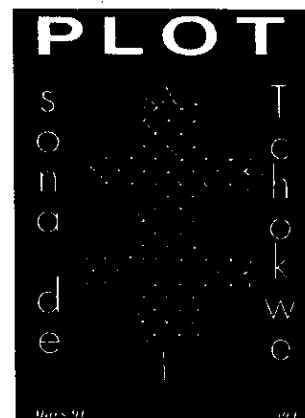
Le concept d'ethnomathématique est, au sein des mathématiciens et des professeurs de mathématiques, relativement nouveau. Souvent on désigne le Brésilien U. D'Ambrosio comme le «père de l'ethnomathématique» (Cf. par exemple, Ferreira, 1988, 3 ; Borba, 1988, 24).

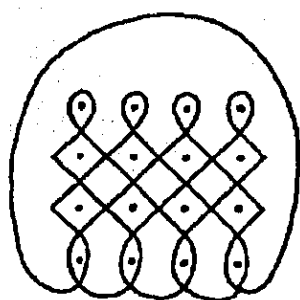
Depuis 1975 il a fait ressortir dans beaucoup de ses conférences la nécessité d'une ethnomathématique. Par contre, des ethnographes utilisent depuis la fin du siècle dernier le concept plus général d'**ethnoscience** et des notions en relation avec lui telles que: ethnolinguistique, ethnobotanique, ethnozoologie, ethnochimie, ethnoastronomie, ethnopsychologie et ethno-logique (1). Cependant les interprétations usuelles d'ethnoscience de la part des spécialistes des sciences sociales ne

correspondent pas à l'interprétation dominante du concept d'ethnomathématique de la part des mathématiciens, comme nous le montrerons par la suite.

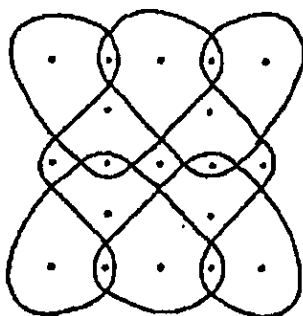
1. Ethnographies de l'ethnoscience

Dans le dictionnaire ethnologique de Panoff et Perrin, on présente deux définitions du concept d'ethnoscience. Dans le premier cas c'est «la branche de l'ethnologie qui se consacre à comparer les connaissances positives des sociétés exotiques à celles que la science occidentale a encadrées dans les disciplines constituées» (Panof & Perrin, 1973, 68) (2). Cette définition sou-

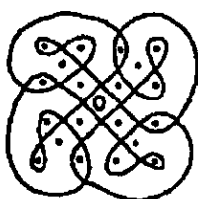




symétrie bilatérale



symétrie bilatérale double



symétrie rotationnelle

lève aussitôt quelques questions telles que «que sont les connaissances **positives** ?» «**Exotiques**», dans quel sens ? «Existe-t-il une science occidentale?» Dans le second cas, on désigne comme ethnosciences «toute application des disciplines scientifiques occidentales aux phénomènes naturels qui sont appris sous une autre forme par la pensée indigène» (Panoff & Perrin, 1973, 68).

Les deux définitions font partie d'une tradition qui date du temps colonial pendant lequel l'ethnographie est née dans les pays capitalistes plus développés comme une «science coloniale», qui étudiait presque exclusivement les cultures des peuples dominés, une «science» qui opposait aussi la pensée dite «primitive» à la pensée «occidentale» comme quelque chose d'absolument différent. Le couple d'ethnologue et mathématicienne, M. et R. Ascher, n'a pas encore réussi à se libérer complètement de cette tradition de définir l'ethnomathématique comme l'étude des idées mathématiques des peuples dites «**sans écriture**» : «Ethnomathematics is the study of mathematical ideas of nonliterate peoples. We recognize as mathematical thought those notions that in some way correspond to that label in our culture» (Ascher & Ascher, 1986, 125 ; cf. Ascher, 1984).

Par «notre culture», ils désignent la «culture occidentale» et affirment en outre, que la mathématique «occidentale» n'a pas connu une pré-histoire «sans écriture» : «Ethnomathematics is not a part of the history of Western mathematics...» (Ascher & Ascher, 1986, 139). L'opinion du couple est que «la catégorie de mathématiques est notre» (= occidentale) (Ascher & Ascher, 1986, 132). Cependant, nous pouvons nous demander si les peuples «orientaux» et «austraux» d'Asie et d'Afrique n'ont pas contribué au développement de cette mathématique, dite «occidentale» (3).

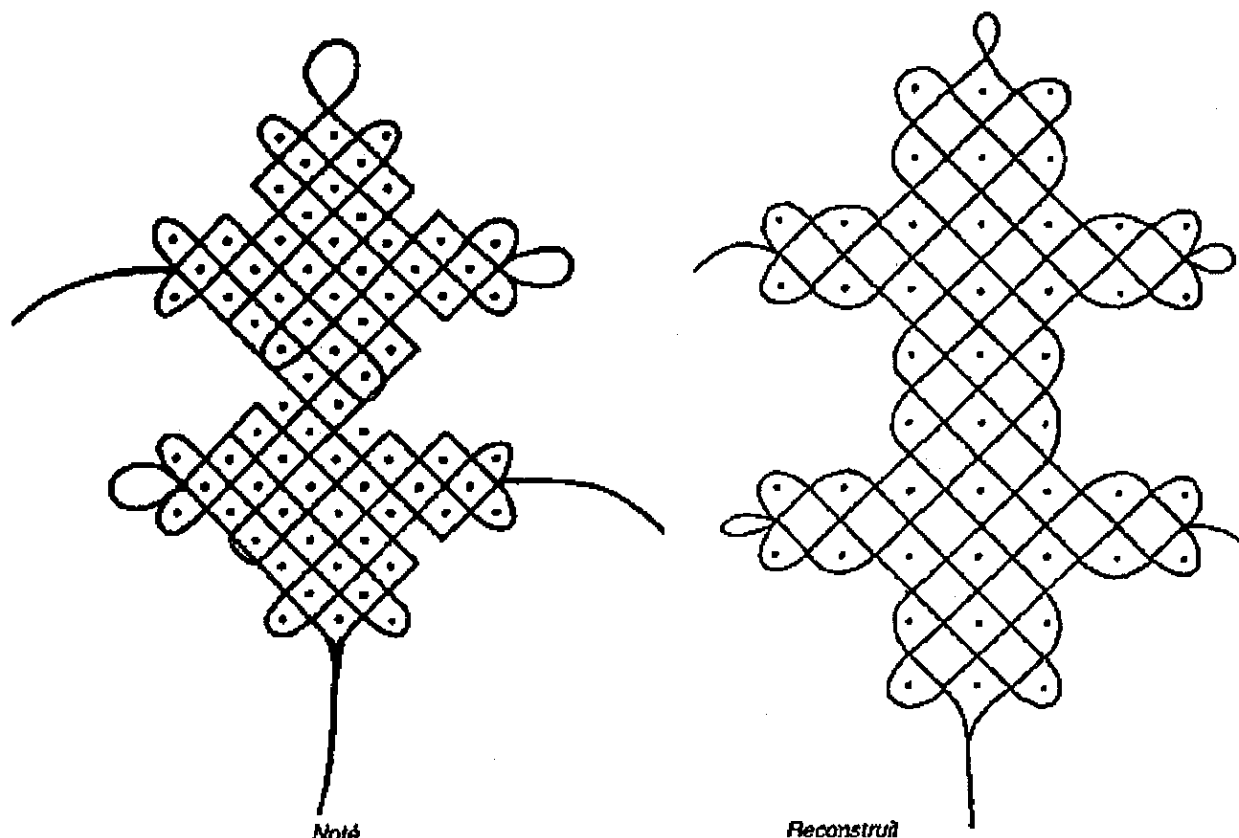
Au sein des ethnographes il y a aussi un autre courant qui considère l'ethnosciences d'une manière différente. Par exemple dans son introduction à l'anthropologie sociale et culturelle C. Favrod caractérise l'ethnolinguistique de cette façon : «l'ethnolinguistique essaie d'étudier le langage dans ses relations avec l'ensemble de la vie culturelle et sociale» (Favrod, 1977, 90). En transférant la caractérisation de l'ethnolinguistique à l'ethnomathématique, on obtient également : «l'ethnomathématique essaie d'étudier la mathématique (ou des idées mathématiques) dans ses relations avec l'ensemble de la vie culturelle et sociale». Dans ce sens l'ethnomathématique se rapproche de la sociologie de la mathématique de D. Struik (Cf. Struik, 1986).

2. Ethnomathématique

Genèse du concept au sein des mathématiciens et des professeurs de mathématiques

Dans l'enseignement colonial on a, en général, présenté la mathématique comme quelque chose «d'occidental» ou «d'euro-péen», comme une création exclusive de la «race blanche». Avec la transplantation accélérée — pendant les années 60 — de programmes scolaires des pays capitalistes hautement industrialisés aux pays du «Tiers Monde», on a continué, tout au moins implicitement, à nier la mathématique africaine, asiatique, indienne, ... (cf. Gerdes, 1985b, #0).

Dans les années 70 et 80, est née au sein des professeurs et didacticiens de mathématique dans les pays en voie de dévelop-



pement et, plus tard, dans d'autres pays, la résistance contre la négation dont on a parlé (Cf. Njock, 1985), contre les préjugés racistes et coloniaux, qu'il reflète, contre l'eurocentrisme relatif à la mathématique et à son histoire (Cf. les études de Joseph, 1984, 1986, 1987). On en ressortit que, en dehors de la «mathématique scolaire importée», il existait et il continue d'exister une «mathématique indigène» (Cf. par exemple, Gay & Cole ; 1967). C'est dans ce contexte que plusieurs concepts furent proposés pour contraster la «mathématique académique» et la «mathématique scolaire» transplantée, telles que (en ordre historique) :

- **sociomathématique d'Afrique** (Zaslavsky, 1973) : les applications de la mathématique dans la vie des peuples africains et inversement l'influence que les institutions africaines ont exercé et exercent encore sur l'évolution de la mathématique (Zaslavsky, 1973, 7) ;

- **mathématique spontanée** (D'Ambrosio, 1982) : pour pouvoir survivre tout être humain et chaque groupe culturel développe spontanément des méthodes mathématiques déterminées (4) ;

- **mathématique informelle** (Posner, 1982) : mathématique qui se transmet et s'apprend hors du système d'éducation formelle ;

- **mathématique orale** (Carragher et al., 1982 ; Kane, 1987) : dans toutes les cultures humaines il y a des connaissances mathématiques qui sont transmises oralement d'une génération à la suivante ;

- **mathématique opprimée** (Gerdes, 1982) : dans les sociétés de classe (par exemple dans les pays du «Tiers Monde» à l'époque de l'occupation coloniale) existent des éléments mathématiques dans la vie quotidienne des masses populaires qui ne sont pas reconnus comme mathématique par l'idéologie dominante ;

- **mathématique non-standardisée** (Carragher, 1982 ; Gerdes, 1985 ; Harris, 1987) : outre les formes standardisées dominantes de la mathématique «académique» et «scolaire», se développ(èr)ent, dans tout le monde et dans chaque culture, des formes mathématiques qui sont distantes des modèles établis ;

- **mathématique cachée ou congelée** (Gerdes, 1982, 1985) : bien que la plupart des connaissances mathématiques des

peuples autrefois colonisés se soient probablement perdues, on peut reconstruire ou «dégeler» la pensée mathématique qui se trouve «cachée» ou «congelée» en techniques anciennes telles que par exemple dans la vannerie (6) ;

• **mathématique populaire / du peuple** (Mellin-Olsen, 1986) : la mathématique (bien que souvent non reconnue comme telle) développée dans la vie de labour de chacun des peuples, peut servir de point de départ dans l'enseignement de la mathématique.

Ces propositions de nouveaux concepts

sont provisoires. Elles font partie d'une tendance initiée dans le « Tiers Monde » et qui plus tard trouvera écho dans d'autres pays.

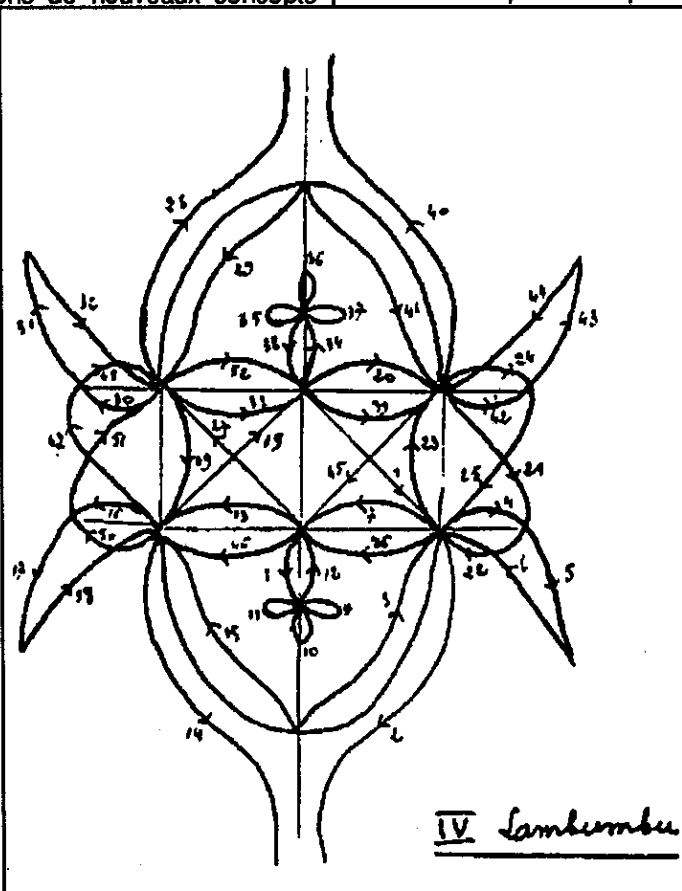
Graduellement plusieurs aspects, illuminés par les notions provisoires déjà citées, s'uniront sous le dénominateur commun plus général d'ethnomathématique. Ce processus fut accéléré en 1985 par la création du Groupe International d'Etude d'Ethnomathématique (ISGEm). Des mathématiciens, y compris l'auteur de cet essai, qui essayaient d'éviter l'emploi de ce terme à cause de sa connotation avec la première interprétation ethnographique du même concept, furent obligés de l'utiliser de plus en plus. Le débat international sur ce que représente l'ethnomathématique s'est intensifié et pendant le dernier Congrès International d'Education Mathématique (Budapest, 1988), plusieurs discours ethnomathématiques furent prononcés en dehors de la réalisation d'une table ronde

avec la participation de U. D'Ambrosio (Brésil), M. Fasheh (Palestine), P. Gerdes (Mozambique), M. Harris (Grande-Bretagne) et P. Scott (EUA) autour du thème «Que peut-on attendre de l'ethnomathématique ?» (Voir Bishop et al., 1988).

3. Concept, accent ou mouvement ?

Selon le commentaire rédactionnel «Ethnomathématique : ce que cela pourrait être»

dans la première édition du Bulletin Informatif de l'ISGEm, l'ethnomathématique se trouve dans la «zone de confluence» de la mathématique et de l'anthropologie culturelle (ethnographie). Dans un premier niveau elle peut être nom-



mée «mathématique-dans-le-contexte-culturel» ou «mathématique-dans-la-société» (ISGEm Newsletter, 1985, Vol. 1, n° 1, 2). De cette façon, autant la sociomathématique que la mathématique populaire, la mathématique spontanée, informelle, orale, congelée, non-standardisée et réprimée, font partie de l'ethnomathématique. Dans un deuxième niveau, en relation avec le premier, elle est «the particular (and perhaps peculiar) way that specific cultural groups go about the tasks of classifying, ordering and measuring» (ISGEm-Newsletter, 1985, Vol. 1, n° 1, 2). Quelques chercheurs essaient d'unir les

deux niveaux dans une seule définition. Par exemple, dans son livre «Learning, aboriginal world view, and ethnomathematics» (1985), A. Hunting voit l'ethnomathématique comme «Mathematics used by a defined cultural group in the course of dealing with environmental problems and activities» (cité dans ISGEm-Newsletter, 1986, Vol. 2, n° 1,3). Pour Ferreira, connu par ses études sur les activités mathématiques au sein des indiens du Brésil, l'ethnomathématique est «la mathématique incorporée dans la culture populaire» (Ferreira & Imenes, 1986, 4). Borba, auteur d'une intéressante étude sur les connaissances mathématiques de la population d'un «bidonville» (Brésil), entend par ethnomathématique «la mathématique pratiquée par des groupes culturels, comme des sociétés tribales, des groupes de travail ou groupes d'habitants» (Borba, 1988, 20) et voit l'ethnomathématique «comme un champ de connaissance intrinsèquement lié à un groupe culturel et à sa réalité, et exprimée à travers un lan-

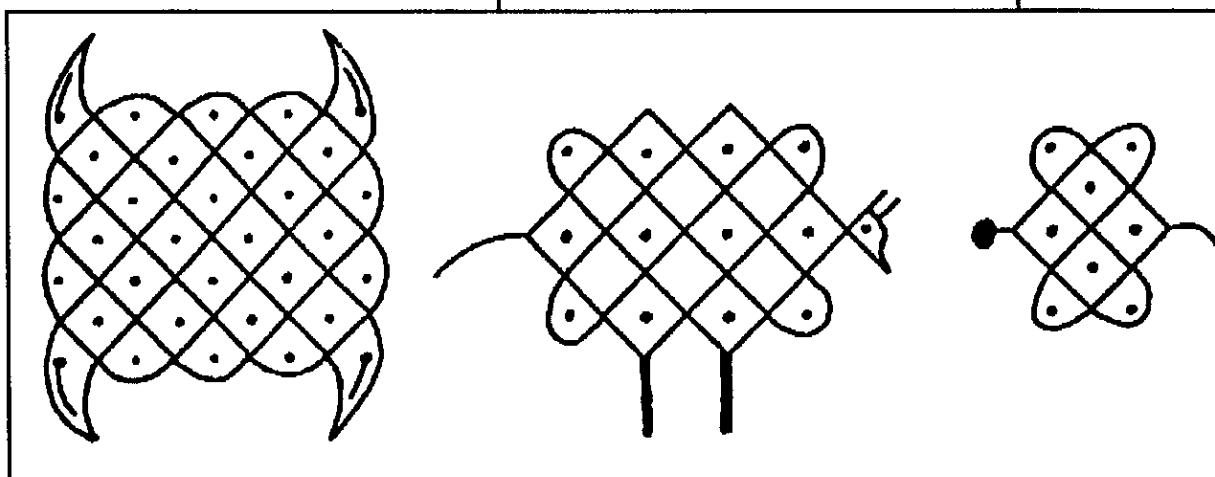
domaine d'ethnologie.

2- ethnomathématique

Parce qu'elle analyse «les connaissances mathématiques pratiquées dans la vie quotidienne d'un groupe social» (Ferreira, 1986, 2). En ce sens l'interprétation de l'ethnomathématique se rapproche de la définition d'ethnomathématique ci-dessus déduite de la définition d'ethnolinguistique donnée par l'ethnologue Favrod «L'ethnomathématique essaie d'étudier la mathématique dans ses relations avec l'ensemble de la vie culturelle et sociale». Dans le même essai Ferreira considère l'ethnoscience également comme «une méthode pour arriver aux concepts des sciences institutionnalisées» (Ferreira, 1986, 3). Ceci implique que l'ethnomathématique appartient à la didactique de la mathématique.

3- ethnomathématique et didactique des mathématiques

La même idée est aussi mise en valeur à

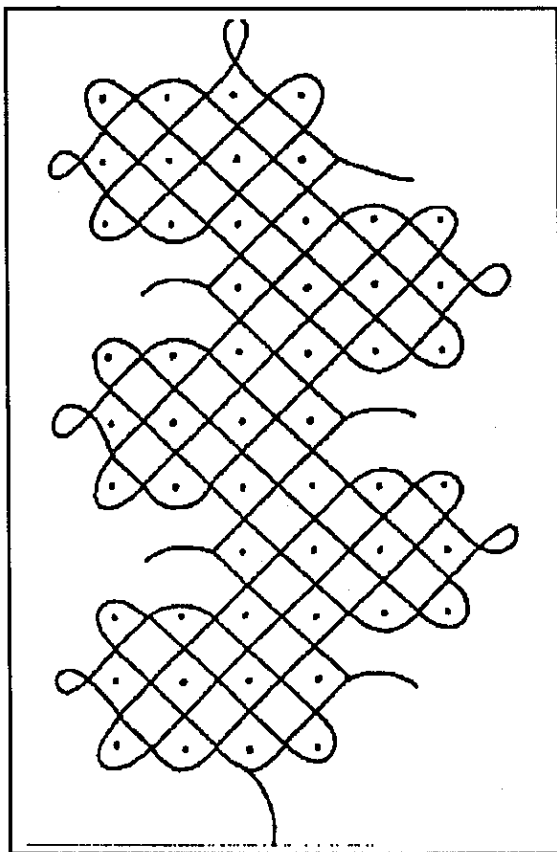


gage généralement différent de celui utilisé par la mathématique vue comme science, langage qui est fondamentalement lié à sa culture, à son ethnie» (Borba, 1987, 38). Ces définitions sont très proches d'une de celles d'Ambrosio : «... different forms of mathematics which are proper to cultural groups we call Ethnomathematics» D'Ambrosio, 1987, 5). En accord avec ces auteurs il est valable pour chaque ethnomathématique :

1- ethnomathématique

Nonobstant, on désigne également la recherche d'une ethnomathématique concrète comme ethnomathématique. C'est ainsi, écrit le même Ferreira en 1986, que l'ethnomathématique constitue un

la fin du commentaire rédactionnel «Ethnomathématique : ce que ce pourrait être» déjà cité : «... examples of Ethnomathematics derived from culturally identifiable groups, and related inferences about patterns of reasoning and models of thought can lead to curriculum development projects that build on the intuitive understandings and practised methods students bring with them to school. Perhaps the most striking need for such curriculum development may be in Third World countries, yet there is mounting evidence that schools in general do not take advantage of their students' intuitive mathematical and scientific grasp of the world» (ISGEm-Newsletter, 1985, Vol. 1, n° 1, 2).



Comment l'ethnomathématique peut-elle satisfaire en même temps les conditions (1), (2) et (3) ? C'est-à-dire, comment l'ethnomathématique peut-elle appartenir en même temps à la mathématique, à l'ethnologie et à la didactique de la mathématique ?

Quand Bishop compare seulement la définition du couple Ascher (ethnomathématique comme l'étude des idées mathématiques des peuples sans écriture) (Ascher & Ascher, 1986, 125; cf. Ascher, 1984) à une de D'Ambrosio (ethnomathématique comme une collection plus locale d'idées mathématiques, qui sans doute ne sont pas encore aussi développées et systématisées que celles du «courant principal» de la mathématique (Bishop, 1989, 2,3)), il parvient déjà à la conclusion que le concept d'ethnomathématique ne constitue pas encore un terme bien défini et que «in view of the ideas and data we have now have, perhaps it would be better not to use that term but rather to be more precise about which, and whose mathematics one is referring to in any context» (Bishop, 1989, 13).

Quand nous comparons les «niveaux» distincts 1, 2 et 3, avec lesquels on interprète l'ethnomathématique, nous pouvons être d'accord avec l'appel de Bishop à la

prudence. Peut-être est-il provisoirement mieux de parler d'un accent ethnomathématique dans la recherche et dans l'éducation mathématique ou d'un mouvement ethnomathématique, que nous pouvons caractériser de la manière suivante :

- «Ethnomathématiciens» font ressortir et analysent les influences de facteurs socio-culturels sur l'enseignement, l'apprentissage et le développement de la mathématique ;

- A travers le concept d'ethnomathématique on attire l'attention sur le fait que la mathématique, avec ses techniques et vérités constitue un **produit culturel** (7), il ressort que chaque peuple, chaque culture, et chaque sous-culture développe sa propre mathématique, dans une certaine mesure, spécifique. La mathématique est considérée comme une **activité pan-humaine, universelle**. Comme produit culturel la mathématique a son histoire. Elle est née sous des conditions économiques, sociales et culturelles déterminées et se développe dans des directions déterminées ; si elle était née dans d'autres conditions, elle se développerait dans d'autres directions. En d'autres termes, le développement de la mathématique **n'est pas unilinéaire** (Cf. Ascher & Ascher, 1986, 139, 140).

- «Ethnomathématiciens» font ressortir qu'apparemment la mathématique scolaire du «curriculum» transplanté et importé est assez «étrangère» aux traditions culturelles d'Afrique, Asie et Amérique du Sud. Apparemment la mathématique vient de l'extérieur jusqu'au «Tiers Monde». Dans la réalité, cependant, la plupart des contenus de cette mathématique scolaire est d'origine africaine et asiatique. Les populations dominées d'Afrique et d'Asie ont été «désappropriées» (8) de ces connaissances dans le processus de la colonisation qui a détruit une grande partie de la culture (scientifique). Postérieurement les idéologies coloniales nièrent ou méprisèrent les restes de la mathématique africaine, asiatique et des indiens. Les capacités mathématiques des peuples du «Tiers Monde» ont été niées ou réduites à la mémorisation. Cette tendance continua et s'intensifia avec la transplantation des «curricula» dans les années 60 des pays hautement industrialisés aux pays du «Tiers Monde».

- «Ethnomathématiciens» essaient de contribuer à la connaissance des réalisations mathématiques des peuples autre-

fois colonisés. Ils cherchent des éléments culturels qui survécurent au colonialisme et dans la base desquels on trouve, entre autres, des idées mathématiques. Ils essaient de reconstruire ces idées mathématiques (9).

• «Etudes ethnomathématiques» dans les pays du «Tiers Monde» cherchent des traditions mathématiques qui survécurent

au colonialisme et des activités mathématiques dans la vie quotidienne des populations et analysent les possibilités de les incorporer dans les «curricula» (10).

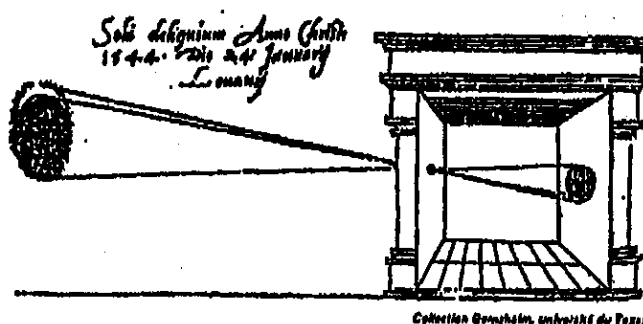
• «Etudes ethnomathématiques» cherchent également d'autres éléments culturels qui peuvent servir comme point de départ pour des activités mathématiques dans l'enseignement (11).

REFERENCES

1. Cf. ISGEM-Newsletter, 1985, Vol. 1, n° 1, 2 : Hams, 1988, 568 ; Campos, 1987.
2. Cf. La définition de C. Lévi-Strauss de ethnozoologie (1962, 133) : «... the positive knowledge which the natives (of this part of the world) possess concerning animals, the technical and ritual uses to which they put them, and the beliefs they hold about them».
3. Cf. Bishop, 1989, 3 : «In a sense that term (mathématique occidentale pg) is... inappropriate since many cultures have contributed to this knowledge...».
4. Voir, par exemple, Hams, 1987, 26 : «Ex Africa semper aliquid novi» Pliny is supposed to have written : «There is always something new from Africa». Part of the newness of Paulus Gerdas' work in Mozambique (Gerdas 1986a) is that he offers «non-standard problems» easily solved by many illiterate mozambican artisans, to members of the international mathematics education community — who cannot (at first) do them... What makes the problems non-standard is the viewpoint of those who set the standards. Gerdas' work, and the work of the others in the field of ethnomathematics offer a rather threatening confrontation to the traditional standard setters...»
5. Les étudiants et collègues de D'Ambrosio ont publié de nombreux exemples intéressants de cette mathématique spontanée. Ces exemples ont été partiellement présentés en complément de l'exposition «HORIZONS MATHÉMATIQUES» qui circule au Brésil depuis 3 ans.
6. Cf. le commentaire de Bishop, 1989, 13.
7. Cf. les études plus anciennes de l'ethnologue White et du mathématicien Wilder.
8. Cf. par exemple Bishop, 1989, 14 : «One of the greatest ironies... is that several different cultures and societies contributed to the development of the (so-called) Western Mathematics — the Egyptians, the Chinese, the Indians, the Moslems, the Greeks as well as the western Europeans. Yet when Western cultural imperialism imposed its version of Mathematics on the colonized societies, it was scarcely recognisable as anything to which these societies might have contributed...»
9. Cf. par exemple : Ascher & Ascher, 1981 ; Bassanezi & Faria, 1988 ; Marschel, 1987 ; Goss, 1986 ; Dourbia, 1988 ; Njock, 1985 ; Villadiego, 1984 ; Gerdas, 1985b, 1986g, 1989 a,b,c.
10. Cf. par exemple : Borba, 1987, 1988 ; Carraher, 1982 ; Ferreira & Imanes, 1986 ; Ferreira, 1986, 1988 a et b ; Shirley, 1988 ; Bishop, 1988 a et b ; Hams, 1987 ; Gerdas, 1982, 1985a, 1986 a,b,g, 1987a, 1988 b,e, 1989a.
11. Cf. Zaslavsky, 1988 ; Hams, 1987 ; Langdon, 1988 ; Gerdas, 1986 b,d, 1988 a,b,c,d,e,f, 1989a.

GALION THEMES

Photographies et Mathématiques



Le journal PLOT - Tarifs 1992

Nom et prénom
ou établissement

Adresse complète

Code postal et ville

Ecole élémentaire ☐

Collège ☐

Lycée ☐

Supérieur ☐

Autre ☐

Pour les 4 numéros de :

1987 ☐ 1991 ☐
1988 ☐ 1992 ☐
1989 ☐ 1993 ☐
1990 ☐ 1994 ☐

Réabonnement immédiat

80 F. par an

F

Tarif normal
et établissements*

Adhérents
Apmep

Supplément
avion

Désire facture ☐

Nouvel abonné ☐

Pour un an
Par année
supplémentaire

120 F

100 F

+ 45 F

Total à payer

F

+ 100 F

+ 80 F

+ 45 F

Co-abonnement :

à PLOT et à

Tangente

Jeune Archimède

Tangente & J.A.

Suppl' avion

Total à payer

F

215 F

150 F

275 F

+ 90 F

* 2 exemplaires pour les établissements

Règlement à envoyer à l'APMEP Orléans-Tours — BP 6759, 45067 Orléans-Cedex 2 — CCP La Source 144009X

DOSSIERS et MATERIELS du PLOT

**10%,
15%,
20%
de
RÉDUCTION***
si vous êtes abonné
au PLOT
pour 1 an, 2 ans, 3 ans...

Prix unitaire

- Tarifs 92 -

Qté

Total

50 F	Kit matériel Polyèdres n°1	} Nouvelle version		
50 F	Kit matériel Polyèdres n°2			
50 F	Dossier Polyèdres dans l'espace			
50 F	Papiers accrochés (dossier et matériel)			
50 F	Plages et mathématiques (dossier matériel)			
50 F	Les Dossiers "Ludi-Math" 3 et 4			
50 F	Catalogue exposition : Mosaïque Mathématique			
150 F	Dossiers Spécial II			
200 F	La cassette vidéo TANGENTE			
10 F	Affiches pour la classe : Format minimum 40 x 60 cm			
10 F	1. Horizons Mathématiques 2. L'esprit informatique			
10 F	3. Volume impossible 4. Polyèdres dans l'espace			
10 F	5. Pavage hyperbolique 6. L'Univers mathématique			
20 F	7. Triangles (1) ou (2) 8. Cercles et sphères			
20 F	9. Perpendiculaires 10. Déplacements			
20 F	Pour envoi des affiches roulées dans un tube (en option)			
50 F				
50 F	Pochettes pour rétroprojecteur n° 5 à 10, 12 à 14			
100 F	Pochettes de diapositives n° 1 à 6			
100 F	Géode - miroir ☐ Sphère - image ☐			
	*Réduction pour les abonnés à Plot pour 1 an 10% ☐ Sous total pour 2 ans 15% ☐			
	* 10% pour les écoles élémentaires Frais d'envoi forfaitaires*			20 F
	* Frais d'envoi par avion à compter en plus			
	TOTAL A PAYER			

NOM :

Adresse :

Code Postal & Ville: ☐

Règlement à envoyer à l'APMEP Orléans-Tours — BP 6759, 45067 Orléans-Cedex 2 — CCP La Source 144009X

Bon de commande (1)

Le Secret des Pavages
144 pages. 150 F

nom:

Maths en pièces,
116 pages. 150 F

adresse:

ville :

Les deux : 250 F (franco de port)

(1) Adressez votre commande
accompagnée de son règlement à:

ADECUM B.P. 6759
45067 - ORLEANS - Cedex 2

