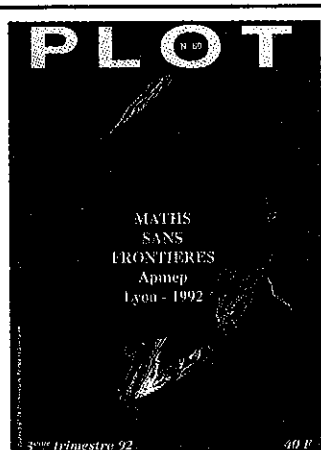




Directrice de publication
Marie-Laure Darche-Giorgi

Comité de Rédaction
Jacques Borowczyk,
Daniel Boutté, Gérard Chauvat,
Jacqueline Collet, Roger Crépin,
Luce Dossat, René Gauthier,
Georges le Nezet, Ginette Mison,
Serge Parpay, Raymond Torrent,
Michel Mirault, René Metregiste.

Rédaction
Michel Darche, Michel Clinard

Secrétariat
Madeleine Schlienger

Ventes
Patrick Marthe, Pierre Daudin

Publicité
Pascal Monsellier

Abonnements
PLOT APMEP
Université, BP 6759
45067 Orléans-Cédex 2

Prix d'abonnement
120 FF pour 4 numéros par an
Adhèrent APMEP : 90 F.
Abonnement étranger : 120 F.

**Photocomposition
et maquette**
i.c.e.

Photogravure et impression
Fabrègue - Limoges

Commission paritaire
63181 - ISSN 0397-7471

Editeur
Associations régionales
de l'APMEP de Poitiers,
Limoges, Orléans-Tours,
Nantes, Rennes, Rouen, Toulouse
Brest, Caen, Clermont-Ferrand et
La Réunion

Diffusion
Adecum (Association pour le
développement de l'enseignement
et de la culture mathématique).
Publié avec le concours
du Centre National des Lettres et
du Ministère de la Coopération

SOMMAIRE

Journées nationales de l'Apmp à Lyon en 1991

L'enseignement des Maths en Italie <i>A. Piscione et G. Varone</i>	2
Expériences d'enseignement transdisciplinaire <i>G. di Biase et A. Maturo</i>	7
Maths et Français <i>P. Ennebeck et C. Audibert</i>	14
Histoire des Maths <i>Lucia Grugnetti</i>	17
Images analogiques, images numériques <i>Jean Delerue</i>	22
Didactique et formation <i>Michel Henry</i>	26
La Frontière ... n'est pas nouvelle ! <i>Jean Aymes</i>	35
Micro-fusée, outil pédagogique <i>A. Delcourt, J & L Osouf</i>	44
Processus de preuve en situation <i>Coppé et Guichard</i>	47

EDITORIAL

Les rencontres nationales de l'Apmp se suivent
mais ne se ressemblent pas !
Celles de Lyon en Octobre 1992 furent prolixes
en exposés et ateliers d'origines très diverses.

Nous publions ici les premiers textes
des ateliers. D'autres suivront dans le prochain numéro
du PLOT. Remercions les collègues de la régionale Apmp de
Lyon dont la patience et la ténacité ont permis la collecte de ces
articles;

*Les illustrations proviennent du Congrès ICME 7 de
Québec en Aout 92 et de documents que nous y avons trouvés.*

*C'est une forme simple de reportage à chaud de cet événe-
ment qui a réuni plus de 3500 congressistes du monde entier.*

*La délégation française était l'une des plus nombreuse
après les Etats-unis, le Canada et ... le Japon !*

Sur l'enseignement des mathématiques dans l'école obligatoire en Italie

et, en particulier, sur le calcul des probabilités et des statistiques

A. PISCIONE e G. VARONE - Pescara

1. La situation de l'enseignement des mathématiques dans l'école élémentaire avant 1985.

On considère que la date de naissance de l'école primaire en Italie est le 13 novembre 1859 avec la loi Casati, approuvée avant la Constitution de l'Etat Unitaire Italien afin de combattre le presque total analphabétisme populaire.

On a fait plusieurs modifications aux programmes didactiques, précisément dans les années 1860, 1867, 1888, 1894, 1905, 1923.

Depuis la guerre, après une mise à jour rapide des programmes en 1945, il y a eu un plan complet et satisfaisant pour ces temps-là, en 1955.

Les programmes de 1955 sont restés en vigueur pendant environ 30 ans, jusqu'à l'approbation des nouveaux programmes en 1985.

Pendant les 10 années passées, l'introduction de l'informatique avec celle d'instruments nouveaux et spécifiques de calcul ont conduit à une révolution de la pensée mathématique. En effet, quelques secteurs des mathématiques qui semblaient les seuls utiles du point de vue pratique, ont été réduits.

D'autres, au contraire, qui étaient considérés comme des «exercices mentaux» liés aux passe-temps ou aux jeux, sont devenus d'importance afin de mathématiser la réalité.

Tout cela a entraîné la formulation en termes nouveaux du programme de cette discipline dans tout ordre et type d'école, surtout à l'école élémentaire, première

structure éducative de l'instruction obligatoire.

Si nous considérons un passé récent nous trouvons une situation très différente par rapport aux programmes ministériels de 1955.

Précédemment, le but de l'étudiant était d'exécuter rapidement et sans erreurs une longue série de calculs en notant exclusivement le résultat d'une opération.

A cette époque, l'aspect le plus signifiant des mathématiques était «le calcul».

La plus petite erreur provoquait plusieurs heures de vérification et de contrôle et on ne devait absolument pas se tromper.

Les personnes les plus importantes avaient le titre de «Chef comptable».

L'économie italienne se basait sur la capacité des personnes expertes en calcul.

Dans les écoles on devait toujours répéter les calculs afin d'arriver à les accomplir sans erreurs et avec le plus grand automatisme.

Qu'est-il arrivé aujourd'hui ?

Autrefois on accordait peu d'importance au fait de connaître le pourquoi des procédés.

Les définitions, les problématiques sur les bases, la recherche de nouveaux algorithmes avaient encore moins d'importance.

On considérait les mathématiques comme une réalité fixe, immuable, avec des règles et des procédés définitivement codifiés.

On ne se posait pas le problème de mathématiser la réalité. Le lien entre mathématiques et réalité était sous-entendu au regard de certains arguments spécifiés : en comptabilité, en mesure des terrains, pour les dessins du Géomètre, nom donné à d'autres personnes importantes qui n'étaient pas appelées «Chefs comptables».

Le personnage du Géomètre influençait l'enseignement de la Géométrie dans les écoles primaires de manière analogue à

celle par laquelle l'existence du Chef-comptable influençait l'Arithmétique. Pour la Géométrie aussi l'important était de mémoriser des procédés de solution de problèmes standard et de problèmes complexes réductibles à une chaîne de problèmes standard et d'obtenir le résultat rapidement sans erreurs.

La vision des mathématiques comme une réalité immuable, dans laquelle il n'y a rien à découvrir et qui se réduit seulement à l'application de procédés ennuyeux, appris par cœur, intéresse encore de larges secteurs de population. Une grande question de beaucoup de mes amis et de mes parents est celle de comprendre ce que j'ai à étudier ou à écrire, les mathématiques étant toujours les mêmes.

En 1985, date où les nouveaux programmes ont été présentés, la situation a beaucoup changé.

On a trouvé que les procédés standard de calcul et de comptabilité sont désormais programmés pour être développés par des ordinateurs, ainsi que les dessins et les problèmes dont le Géomètre s'occupait. Donc, quel type de mathématiques doit-on enseigner ?

Rien, selon beaucoup de mes amis, que je viens de nommer.

C'était l'opinion aussi de beaucoup d'étudiants universitaires qui, surtout dans le passé, contestaient les cours de mathématiques en les jugeant superflus, puisque «désormais c'est l'ordinateur qui pense à tout».

En effet, toutes ces personnes ne considéraient pas certains problèmes :

1) avant de fournir les données en input à un ordinateur afin de résoudre un problème, il est nécessaire de formuler ce problème, de le traduire dans un langage mathématique et d'accumuler les données ;

2) les données en output fournies par un ordinateur doivent être interprétées d'abord d'un point de vue mathématique, et ensuite, comme des données réelles.

Les mathématiques qu'on doit connaître pour une formulation des problèmes et pour une interprétation des résultats sont souvent de type différent de celles qui sont nécessaires pour une résolution des mêmes problèmes.

Par exemple, ce n'est pas aussi important de calculer l'aire d'un triangle que de savoir si ce triangle est un modèle mathématique valable pour étudier un certain phénomène qui nous intéresse et pour com-

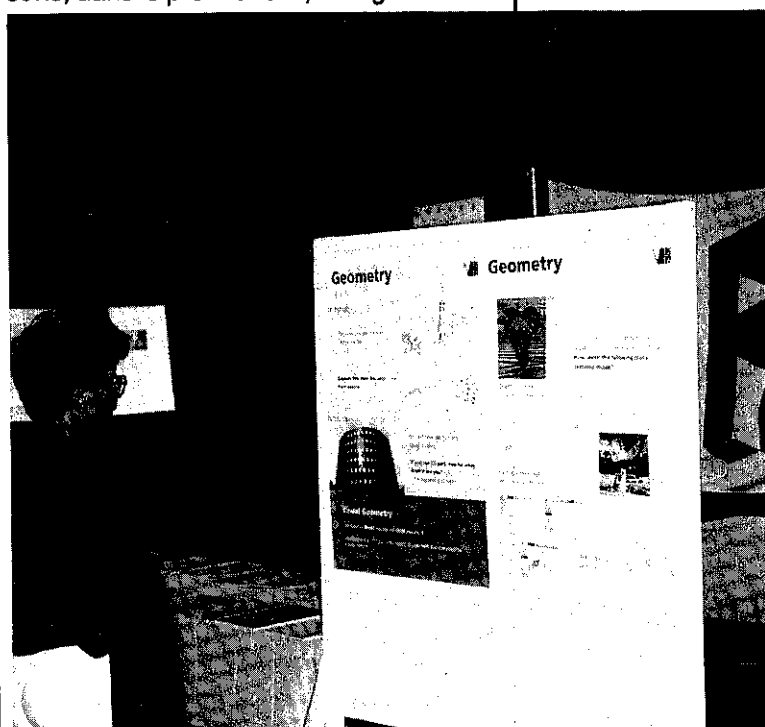
prendre quel est le signifié de l'aire trouvée à l'intérieur du phénomène considéré. De même, il n'est pas aussi important de faire la somme de 100 nombres que de développer ces 100 nombres à partir d'un problème réel et d'interpréter le signifié de leur somme.

Les procédés de calcul de l'aire du triangle et de la somme des 100 nombres peuvent être développés par l'ordinateur, notre humble aide, mais pas les autres opérations.

Autrefois les questions (1) et (2) ne se posaient pas, puisque les problèmes qu'on devait résoudre étaient peu nombreux et bien spécifiés ; aujourd'hui, au contraire, ces questions doivent être presque toujours considérées, parce que la réalité évolue très rapidement et souvent de manière peu claire.

2. Nouveautés dans les programmes de 1985.

Beaucoup de branches des mathématiques déjà développées pendant le siècle dernier, n'étaient pas considérées, pendant les années récentes, ou parce que l'application pratique de leurs théories conduisait à un ensemble de calculs qui ne peut pas être exécuté manuellement, ou bien parce qu'elles n'étaient estimées d'aucune importance pratique. Nous pensons, dans le premier cas, à l'algèbre des



Panneau de l'IOWO (ICME 7)

matrices et dans le deuxième cas, à la logique. Par la diffusion des ordinateurs, par l'intensification de leur mémoire, de leur capacité d'élaboration, leur vitesse et la réduction des coûts, les calculs ne constituent plus un problème. L'algèbre des matrices et la logique sont aujourd'hui appliquées dans les domaines les plus variés.

L'algèbre des matrices est un instrument permettant d'organiser les données dans l'ordinateur, afin de résoudre les systèmes, les transformations géométriques, la statistique et les problèmes de classification.

La logique est employée non seulement pour approfondir les bases des mathématiques, mais surtout pour élaborer les critères d'une connaissance inductive des phénomènes réels, pour comprendre et construire des algorithmes de calcul et de programmation.

Tout cela a amené de nombreux changements dans les programmes de l'école primaire.

Dans l'ensemble on vérifie, dans les programmes de 1985, une tendance à donner plus d'importance aux aspects logiques et formateurs des mathématiques et aux relations entre les mathématiques et le monde réel qu'au calcul.

Ensuite, l'activité de résolution des problèmes apparaît plus orientée vers les situations concrètes, que vers des hypothèses abstraites : on se propose de privilégier l'emploi des mathématiques afin de représenter et d'étudier des expériences réelles de l'élève par rapport à l'élaboration de situations hypothétiques pour illustrer des algorithmes mathématiques par des exemples.

Mais, passant à la considération spécifique des arguments et des buts d'Arithmétique et de Géométrie, il semble, dans une première lecture du texte ministériel, que cela a peu changé par rapport aux vieux programmes. Les seules nouveautés semblent être le conseil de se servir de systèmes de numération, différents du système décimal et l'étude des transformations géométriques. Ces deux arguments paraissent, en outre, d'importance marginale par rapport au reste.

L'aspect le plus innovateur des nouveaux programmes semble être, alors, l'introduction d'éléments de logique, de probabilité, de statistique, d'informatique.

Sous la rubrique «logique» on demande, surtout, de s'attacher à faire acquérir aux

élèves, une certaine précision et richesse de langage.

Dans ce domaine on donne une certaine importance à la théorie des ensembles, aux relations et aux procédés de classification.

Beaucoup des objectifs indiqués sous cette rubrique pourraient, peut-être, être mieux insérés, du point de vue de l'adhérence au réel, dans les probabilités ou dans les statistiques.

Sous la rubrique «informatique» on demande la construction et l'analyse d'algorithmes, même par les diagrammes de flux.

A partir d'une première analyse rapide des nouveaux programmes on a donc, la sensation que, même si d'un esprit différent, les vieux programmes sont repropoés avec l'adjonction de quelques arguments nouveaux.

Cette impression est confirmée par le fait que la logique et la théorie des ensembles ne sont pas considérées comme totalement intégrées avec l'arithmétique et la géométrie et, en outre, par le fait que probabilité, statistique et informatique occupent un rôle secondaire.

En réalité, en lisant avec attention les programmes de 1985, on comprend qu'une certaine prudence dans les innovations est liée aussi à la nécessité de ne pas conditionner la liberté d'enseignement des professeurs, parce que chacun peut donner à ses élèves un enseignement optimal s'il n'est pas contraint à suivre une ligne logique différente de sa manière de penser.

3. Quelques buts des Probabilités et de la Statistique

L'introduction timide, dans les programmes de 1985, des Probabilités et des Statistiques, est sûrement l'innovation la plus importante, non pas tant pour la possibilité, de la part de l'élève, d'apprendre le peu d'éléments prudemment proposés, que par l'aspect révolutionnaire et de rupture avec les schémas classiques des mathématiques, qui est présent dans les deux disciplines.

La grande limite de l'enseignement des mathématiques, à tous les niveaux, est celle du manque de lien avec la réalité. Les déductions mathématiques ont souvent seulement l'aspect d'un jeu complexe :

quelques étudiants s'amuse à faire cela, beaucoup d'autres, ou n'en comprennent pas ses règles ou n'y trouvent aucun intérêt, parce qu'ils le ressentent comme étranger à leurs intérêts et à leur monde.

On peut alors comprendre facilement pourquoi, souvent, il arrive de voir des diplômés qui, après avoir étudié beaucoup de mathématiques, ne sont pas capables de formaliser des problèmes réels, qu'on peut facilement résoudre par les fractions ou en utilisant des équations de premier degré.

L'écart entre mathématiques et réalité a augmenté de plus en plus ces dernières années à cause d'une spécialisation et d'une abstraction toujours plus grandes, dans lesquelles agissent les nombreuses branches des mathématiques et donc du type d'enseignement qui se déroule dans les cours de maîtrise en mathématiques.

Les enseignants de mathématiques, avec des effets qui retombent sur les maîtres qui par eux sont formés et informés, sont désormais habitués presque exclusivement à utiliser des procédés de déduction à partir d'êtres abstraits (par ex, le triangle, le nombre rationnel, la relation d'ordre, etc.) et à se reposer dans la chaude sécurité de ce qu'ils obtiennent.

Mais le problème fondamental de l'école élémentaire est, à mon avis, celui de spécifier avec précision les liens entre les éléments abstraits des mathématiques et le monde réel et, entre celui-ci et les résultats obtenus par des procédés de déduction.

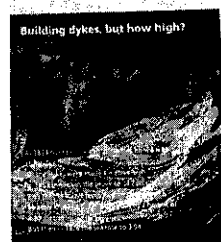
Ce fait a été bien compris dans les nouveaux programmes de l'école élémentaire, surtout dans la partie où l'on met en évidence que «la pensée mathématique est caractérisée par l'activité de solution des problèmes».

Mais il faut réfléchir à propos des différents types de problèmes sur lesquels l'enseignant doit s'arrêter.

D'une lecture des programmes, des arguments ici énumérés et de l'ordre dans lequel ils sont énumérés, il semble qu'on se réfère surtout aux problèmes basés sur l'arithmétique et sur la géométrie, enrichis de quelques expédients particuliers qui rendent plus évident aux écoliers le rôle des mathématiques comme représentation de la réalité.

Est évidente, sans doute, la grande importance du type de problèmes qui ont formé des générations de mathématiciens, physiciens, ingénieurs. Mais, peut-être que le moment d'un «saut de qualité» est ar-

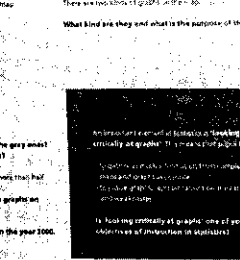
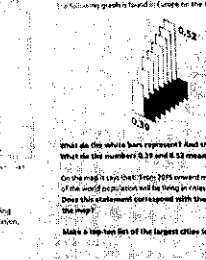
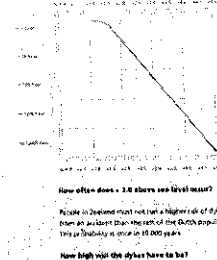
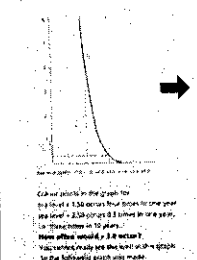
Integrated Mathematical Activities



With our dykes and their most of the Netherlands dykes are made of stone.



How high would the water rise in your classroom? It would be a very interesting problem to solve!



rivé, et que cela peut être obtenu grâce à un bon usage des concepts et des méthodes des Probabilités et des Statistiques.

Les problèmes classiques offrent souvent des procédés ou des solutions uniques, quelquefois même des possibilités de réponses différentes et également acceptables. La phase de mathématisation du problème et celle d'interprétation des résultats sont toutefois formées de passages obligés qui accordent peu de place à la fantaisie de l'écolier.

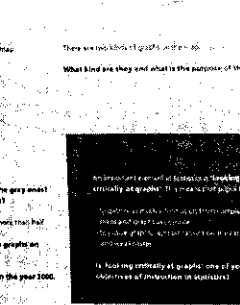
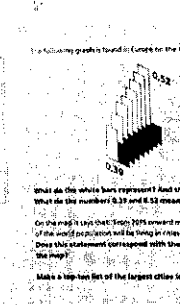
Il est possible, alors, que les écoliers avec une personnalité créative plus grande, s'ennuient et refusent les mathématiques en préférant exprimer leur propre individualité dans la composition littéraire ou dans le dessin.

Les problèmes liés au calcul des Probabilités et à la Statistique, au contraire, fournissent souvent un large espace aux idées personnelles des élèves, la confrontation d'idées, sans, d'autre part, renoncer à la précision mathématique.

Cela dépend du fait que ces deux disciplines s'occupent de situations réelles. Une situation réelle ne se présente pas, en général comme un problème classique de mathématique, par des données et inconnues bien définies, mais comme quelque chose de vague qui a besoin d'une vaste phase de discussion, d'élaboration, d'approximation, d'adaptation, afin d'être mise au point et traduite dans une forme mathématique.

Cette phase de mathématisation de la réalité a conduit à des arrangements, à

Data processing and Statistics



panneaux de l'IOWO (ICME 7)

des transformations, à des abstractions, à l'emploi de procédés d'induction ; c'est vraiment le moment où ceux qui participent appréhendent la compréhension du lien entre mathématiques et monde réel, les avantages et les limites de l'emploi des mathématiques.

Le modèle mathématique qu'on obtient après tant de discussions peut-être sera-t-il trop complexe d'un point de vue mathématique, peut-être contient-il beaucoup d'erreurs ?

Mais cela importe peu puisque, en tout cas, l'élève a acquis des expériences précieuses et il a pu apporter sa contribution personnelle.

Une fois accepté un certain modèle mathématique comme représentatif de la situation réelle, on doit le résoudre, s'il est possible de la manière dont on résoud les modèles mathématiques dérivés des problèmes classiques.

L'interprétation des résultats obtenus provoque d'autres discussions et adaptations, souvent porte à la modification du modèle en un autre qui donne la possibilité d'avoir plus facilement des résultats plus significatifs ou plus clairement interprétables. Si on compare la mathématisation de la réalité à la construction de machines, la résolution d'un problème classique équivaut à employer une machine déjà construite par d'autres pour des buts particuliers, faire face à une situation réelle avec des méthodes des Probabilités et de la Statistique équivaut à se construire une machine que l'on considère adaptée au but, à l'employer afin de voir si elle fonctionne, à la

modifier si on l'estime nécessaire. Par laquelle de ces deux manières devient-on un bon constructeur de machines ?

En conclusion, les buts des Probabilités et de la Statistique sont :

- 1) l'étude des situations réelles avec résolution, même approchée, des problèmes connexes, même posés de manière vague ;
- 2) la formation de l'élève au procédé de mathématisation de la réalité ;
- 3) le développement de la créativité de l'élève dans le domaine des mathématiques et donc l'augmentation de son intérêt pour elles.

Un objectif ultérieur sera la capacité de ces disciplines de représenter les mathématiques dans leur ensemble d'un point de vue différent du point de vue classique, en donnant aux élèves la possibilité d'encadrer toutes leurs connaissances relatives de manière plus claire, comme dans une vision stéréoscopique. □

Bibliographie

- (1) ARMANDO EDITORE I nuovi programmi per la scuola primaria ROMA
- (2) N. CERA-A. MATURO Calcolo delle Probabilità e Statistica con applicazioni allo studio del territorio. Collana di matematica per l'Architettura n.2. Montefeltro Edizioni Urbino 1980.
- (3) R. SCOZZAFAVA. Il ruolo della probabilità e della statistica. Veschi ROMA 1984.



Congressistes au
Happy Hour (ICME 7)

Probabilité, statistique, informatique et sciences : propositions et expériences pour l'enseignement transdisciplinaire

G. DI BIASE et A. MATURO - Chieti

Récemment en Italie on a introduit dans les programmes de mathématiques de plusieurs écoles des éléments de calcul des probabilités, de statistique et d'informatique. Notre contribution veut démontrer qu'il est possible de résoudre des problèmes très importants (par exemple dans le domaine de la médecine et de la biologie) à partir des concepts de base des trois disciplines susnommées.

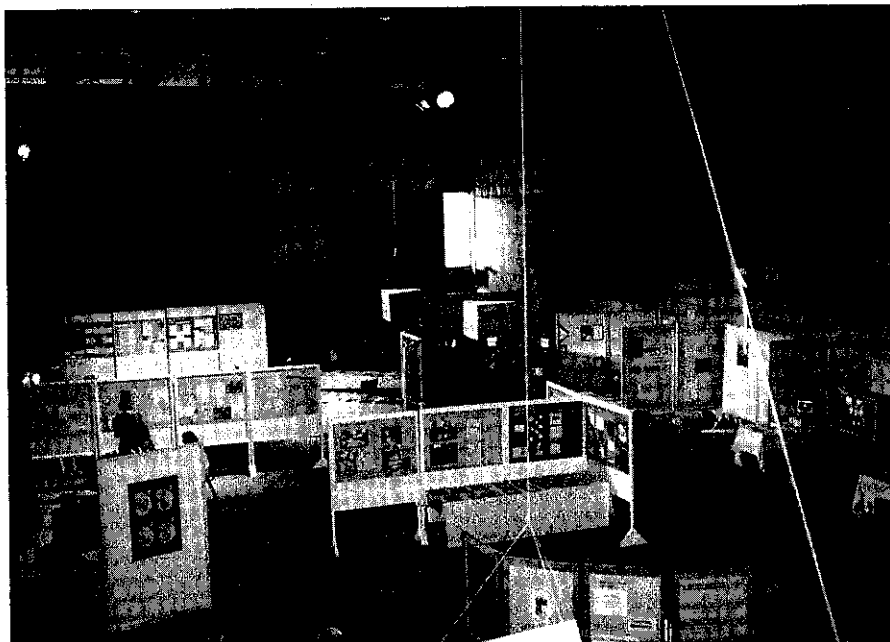
Développer une mentalité probabiliste

L'objectif essentiel de cet article est de montrer les principes de base utiles pour préparer les élèves à une mentalité probabiliste par l'enseignement conjoint du calcul des probabilités et de la statistique avec le support de l'informatique.

En effet, l'informatique nous permet de résoudre des problèmes, même très complexes, de calcul des probabilités par simulation sur ordinateur de plusieurs expériences statistiques.

Les outils employés sont la génération des nombres au hasard et l'induction statistique.

En ce qui concerne le deuxième outil on épousera l'approche bayésienne, qui a son origine dans la conception subjective de la probabilité et qui, avec sa rigueur



méthodologique et son lien naturel avec les problèmes inférentiaux, permet la fusion de la statistique et du calcul des probabilités.

Telle position est fondée sur l'emploi répété de la formule de Bayes, en simulant sur ordinateur plusieurs expériences statistiques. À l'aide des résultats obtenus, on peut mettre à jour, par une mesure quantitative, le *degré de confiance* qu'on avait *a priori* des événements. Ceux-ci expriment les causes qui ont produit les effets expérimentaux du problème examiné.

Par la position bayésienne l'ordinateur aussi joue un rôle éducatif différent. En effet, en employant cette méthodologie, l'ordinateur pousse l'utilisateur à une analyse critique des résultats des épreuves et en outre l'ordinateur devient sujet actif, au contraire de l'approche classique où il n'est employé que pour calculer des indices statistiques ou pour décrire les variables en jeu.

L'exposition du Shell-Center (ICME 7)

LA FORMULE DE BAYES DANS L'INDUCTION STATISTIQUE

Une grande partie de la statistique moderne est fondée sur la formule de Bayes. En effet il s'agit d'une façon différente de lire le théorème des probabilités composées (voir par exemple [14]). Ici on l'emploie pour résoudre des problèmes qui sont appelés : *probabilité des causes*. Il s'agit d'une catégorie de problèmes dont le but est de déterminer, à partir d'un événement connu, les probabilités de toutes les causes possibles qui pourraient le produire.

Bref, un effet s'étant réalisé, quelle est la probabilité pour qu'une certaine cause l'ait produit ?

Il est toujours possible, d'une manière ou d'une autre, d'assigner un *degré de confiance* aux événements antérieurs (causes ou hypothèses). Leurs mesures quantitatives sont appelées probabilités *a priori*, c'est-à-dire les probabilités qu'ils ont avant l'expérience, sur la base des informations possédées par la personne qui conduit l'expérience.

On se propose de déterminer leurs probabilités *a posteriori*, c'est-à-dire après l'observation des résultats de l'expérience.

Soit $H = \{H_1, H_2, \dots, H_m\}$ une partition de l'événement certain Ω , c'est-à-dire :

- (i) $H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_m = \Omega$
- (ii) $i \neq j \Rightarrow H_i \cap H_j = \emptyset$

Les (i) et (ii) signifient que les événements H_i , deux à deux, ne peuvent se réaliser simultanément (incompatibles) et que un et seulement un se réalisera sûrement.

On suppose que tout événement

$E \in P(\Omega)$ (l'ensemble de toutes les parties de Ω) représente une observation, c'est-à-dire l'issue d'une expérience statistique.

On veut évaluer la probabilité des événements H_r , $r = 1, 2, \dots, m$, chacun est regardé comme une possible «explication» de l'observation E .

A partir du théorème des probabilités composées on a

$$\begin{aligned} p(E \cap H_r) &= p(H_r) \cdot p(E/H_r) \\ &= p(E) \cdot p(H_r/E), \quad r = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

et, en supposant $p(E) > 0$,

$$p(H_r/E) = p(H_r) \cdot p(E/H_r)/p(E)$$

Par ailleurs étant :

$$E = E \cap \Omega = E \cap \left(\bigcup_{r=1}^m H_r \right) = \bigcup_{r=1}^m (H_r \cap E)$$

la formule précédente peut être écrite :

$$p(H_r/E) = p(H_r) \frac{p(E/H_r)}{\sum_{r=1}^m p(H_r) \cdot p(E/H_r)}$$

$p(H_r)$ c'est la probabilité *a priori* de la cause, sans savoir si l'effet s'est produit ;
 $p(E/H_r)$ c'est la probabilité de l'effet, sachant que la cause H_r a agi ;

$p(H_r/E)$ c'est la probabilité *a posteriori* de la cause, sachant que l'effet E s'est produit.

$$\sum_{r=1}^m p(H_r) \cdot p(E/H_r) \quad \text{c'est une constante,}$$

indépendante de H_r .

L'égalité précédente permet, sur la base de l'observation E , d'évaluer les probabilités $p(H_r/E)$ de toutes les hypothèses H_r , que, avant la connaissance de les issues expérimentales, on avait considérées égales à $p(H_r)$.

Cette variation des probabilités, due à une augmentation de renseignement, est proportionnelle au produit $p(H_r) \cdot p(E/H_r)$

selon la constante $\left(\sum_{r=1}^m p(H_r) \cdot p(E/H_r) \right)^{-1}$

On appelle $p(E/H_r)$ *vraisemblance*.

Naturellement la formule de Bayes peut être répétée chaque fois que l'on connaît de nouveaux résultats expérimentaux, obtenant toujours des probabilités de plus en plus crédibles.

On simulera ces résultats par ordinateur (voir aussi [3]), en employant la génération des nombres au hasard, avec des techniques décrites dans un des paragraphes suivants.

UN EXEMPLE CLASSIQUE

Une urne renferme un nombre N (N grand) de boules blanches ou noires dont le nombre de celles de l'une des deux couleurs est inconnu ; on fait plusieurs

tirages successifs, par exemple m , en remettant la boule extraite après chaque tirage ; le résultat de ces tirages est l'extraction de k boules blanches et de $m-k$ boules noires.

Quelle est la composition la plus probable de l'urne ?

C'est-à-dire que l'on se demandera, après l'observation d'un échantillon (avec remise) de taille m , quelle est la probabilité pour que la fraction de boules blanches dans l'urne soit $\vartheta_i = i/N$, $i = 0, 1, 2, \dots, N$.

On peut faire sur la composition de l'urne $N+1$ hypothèses que nous désignerons par $H_0, H_1, \dots, H_N$, l'hypothèse H_i étant celle où l'urne renferme i boules blanches et $N-i$ noires.

Avant l'échantillonnage on peut faire une hypothèse plausible en supposant les probabilités a priori égales entre elles, c'est-à-dire en admettant que le $N+1$ compositions possibles sont représentées par $N+1$ urnes entre lesquelles on choisit au hasard ; ceci donne :

$$p(H_i) = 1/(N+1), \text{ pour tout } i = 0, 1, 2, \dots, N.$$

Ceci, naturellement, si on n'a pas de renseignements ultérieurs qui permettent d'assigner subjectivement d'autres probabilités a priori.

Soit E l'événement «dans l'échantillon de taille m il y a k boules blanches». La probabilité d'extraire k boules blanches avec m épreuves dans l'urne de composition H_i est :

$$p(E/H_i) = \binom{m}{k} \cdot \vartheta_i^k \cdot (1 - \vartheta_i)^{m-k}.$$

Nous pouvons utiliser le résultat de cette expérience pour mettre à jour les évaluations $p(H_i)$ par la formule de Bayes :

$$p(H_i/E) = p(H_i) p(E/H_i)/p(E)$$

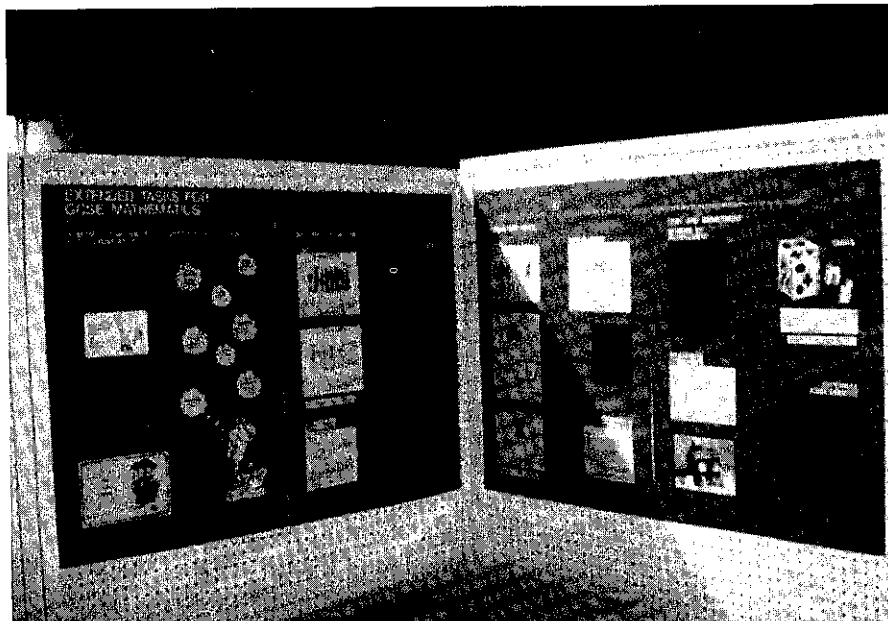
ou

$$p(E) = \sum_{i=0}^N p(H_i) \cdot p(E/H_i).$$

On peut répéter plusieurs fois l'échantillonnage, même avec des tailles différentes, et donc l'application de la formule de Bayes, de manière que les résultats probabilistes soient de plus en plus «sûrs».

SIMULATION SUR ORDINATEUR

La simulation est réalisée par la génération des suites de nombres au hasard (voir par exemple [9] et [12]). Il s'agit de suites dont les éléments sont des nombres réels



dans l'intervalle $[0,1]$, appelés *pseudo-aléatoires*.

On emploie le suffixe *pseudo* parce que, en réalité, ils sont obtenus de façon déterministe.

Le postfixe *aléatoire* est employé parce que, tout compte fait, il est très difficile de les prévoir.

Pour ce qui concerne les aspects proprement théoriques on renvoie par exemple à [1], [7], [8], [15].

Les suites de nombres *pseudo-aléatoires* sont obtenues en pratique par ordinateur à partir d'une formule de type récurrent :

(4.1) $Y_{i+1} = f(a_1, a_2, \dots, a_n; Y_i)$, $i \in \mathbb{N}$
 f est une fonction à valeurs dans $I_m = \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$, $m \in \mathbb{N}$, et dépend des paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, où Y_i l'argument de la fonction, parcourt l'ensemble I_m .
 Y_1 étant fixé (valeur initiale), on obtient une suite $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ des éléments de l'ensemble I_m .

En posant $z_i = Y_i/m$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, on obtient une suite *pseudo-aléatoire* en $[0,1]$.

Cette façon d'opérer est motivée par la définition subjective du nombre *pseudo-aléatoire* (voir par exemple [2] et [11]) qui affirme qu'une suite $\{z_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ est appelée *pseudo-aléatoire* si :

(1) un utilisateur qui connaît le générateur peut engendrer la suite d'une façon univoque ;

(2) un utilisateur qui ne connaît pas le générateur, considère, de façon subjective, que la suite $\{z_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ est une réalisation d'une suite des variables aléatoires discrètes, normalisées, de distribution uniforme.

Zoom sur le Shell-Center (ICME 7)

En effet si la fonction f et ses paramètres sont attribués de façon adéquate, la manière par laquelle on obtient Y_{i+1} , à partir de Y_i , apparaît comme le produit d'un « effet hasard » similaire à celui que l'on obtient en mêlant des cartes ou en faisant rouler la boule de la roulette. Effectivement, même dans ce cas-là, les parcours effectués par les cartes ou par la boule sont déterminés et le hasard dépend du fait que l'observateur ne les connaît pas.

Dans la formule (4.1), pour obtenir des suites qui satisfont la définition subjective, il faut que l'utilisateur qui génère la suite connaisse bien ses propriétés mathématiques et statistiques, de façon qu'elle apparaisse aléatoire à l'observateur.

On obtient cela en fixant f égale à une fonction la plus simple possible. Par exemple, une des formules les plus employées est :

$$(4.2) \quad Y_{i+1} = (a \cdot Y_i + b) \bmod m, i \in \mathbb{N}$$

où a et b sont des éléments de I_m .

Les propriétés mathématiques et statistiques de la suite $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ que l'on obtient du générateur (4.2) changent remarquablement quand m modifie les paramètres a et b , le module m et la valeur initiale Y_1 . Pour approfondir cette classe de générateurs on renvoie à [1], [7], [8], [12], [15].

On dispose de plusieurs méthodes pour juger le « degré de hasard » d'une suite de nombres *pseudo-aléatoires*. On en peut trouver quelques-unes qui sont fondées sur une méthodologie classique (voir par exemple [10] et [11]) et d'autres qui suivent la méthodologie bayésienne (voir [4], [5], [6]).

Mais revenons au problème de l'urne. Comment procède-t-on à la simulation du tirage des boules ?

On commence par générer un nombre entier dans l'intervalle $[0, N]$ pour simuler le choix au hasard de l'une des $N+1$ urnes, ou plus précisément, de l'une des $N+1$ compositions possibles de l'urne. Ce choix reste inconnu à l'usager jusqu'à la fin des expériences. Il n'est connu que par l'ordinateur.

Ensuite, le tirage d'un échantillon est simulé de la façon suivante :

Soit H_i l'hypothèse vraie, à laquelle correspond la fraction de boules blanches $J_i = i/N$; après la génération d'un nombre pseudo-aléatoire, ayant distribution uniforme continue, dans l'intervalle $[0, 1]$ on va le comparer à J_i : s'il est moindre que J_i ,

cela veut dire qu'une boule blanche est tirée, sinon c'est une noire.

On répète cette opération autant de fois que la taille de l'échantillon et l'échantillonnage autant de fois que l'on veut.

La composition de l'urne est inconnue jusqu'à la fin de toutes les épreuves et, jusqu'à ce moment-là, l'ordinateur donne simplement une liste des valeurs des probabilités des hypothèses, après tout échantillonnage, dans le but de connaître la plus probable.

Il est très important (conformément à la méthodologie bayésienne) de mettre en évidence que ce n'est pas sûr que la composition qui apparaît la plus probable soit la vraie !

Evidemment, en répétant l'échantillonnage plusieurs fois les conclusions probabilistes deviennent plus « sûres ».

QUELQUES APPLICATIONS DANS LES DOMAINES DES SCIENCES

A) On présente le cas concret d'un problème de décision qu'un médecin dans l'exercice de sa profession doit résoudre quotidiennement.

Il faut formuler un diagnostic sur la base de quelques symptômes relevés sur un malade.

Puisqu'un diagnostic représente la synthèse de plusieurs facteurs incertains, il est traité à la façon d'un événement aléatoire, dont la valeur de vérité ne correspond pas aux situations limites : événement certain ou impossible.

Donc, l'intervention du calcul des probabilités peut être de quelque utilité, puisqu'il permet de quantifier le degré de confiance que l'on a d'un événement. En particulier l'événement dont on parle c'est l'événement subordonné

H/E = « un malade a contracté la maladie H_i , sachant qu'il a les symptômes E ».

En utilisant les résultats décrits dans le deuxième paragraphe, pour formuler le diagnostic, il faudra que le médecin évalue la probabilité de H_i si E :

$$p(H_i/E) = p(H_i) \frac{p(E/H_i)}{\sum_{r=1}^n p(H_r) \cdot p(E/H_r)}$$

$r = 1, 2, \dots, n$

$H_1, H_2, \dots, H_i$ étant toutes les maladies

possibles relatives aux symptômes relevés.

La solution de ce problème exige la connaissance des probabilités a priori des maladies $p(H_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. En Italie il y a des statistiques officielles qui périodiquement mettent à jour ces données. En outre, on doit faire des recherches cliniques pour obtenir la matrice suivante :

	S_1	S_2	...	S_j	...	S_m
H_1						
H_2						
...						
...						
...						
H_j^*				P_{jj}^*		
...						
H_n						

où p_{ij} représente la fréquence relative des malades qui présentent le symptôme S_j ayant contracté la maladie H_i .

Par exemple on peut faire ces recherches dans le service d'un hôpital ou dans le cabinet d'un médecin.

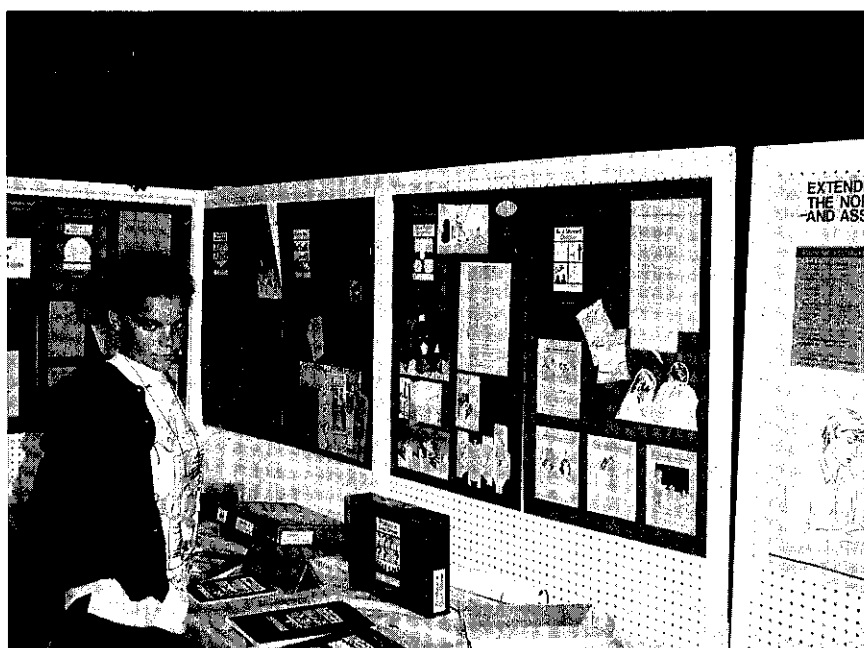
En supposant l'indépendance des symptômes, on peut calculer les $P(E/H_i) = p(S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_m / H_i)$, $i = 1, \dots, n$, avec la formule multiplicative et, donc employer la formule de Bayes.

Le médecin, toutefois, pourrait décider d'approfondir la question et envoyer le malade faire des analyses cliniques.

La formule de Bayes pourrait être répétée en obtenant ainsi de nouvelles probabilités a posteriori. En effet, dès lors que l'on possède des informations nouvelles, les probabilités qui hier étaient a posteriori deviennent aujourd'hui les probabilités a priori.

Les jumeaux

B) Il y a deux espèces de couples de jumeaux : celle provenant d'un seul œuf fragmenté en deux (jumeaux univitellins ou vrais jumeaux), indiquée par VJ et celle



Re-zoom sur le Shell-Center (ICME 7)

venant de deux œufs simultanément émis (jumeaux bivitellins ou faux jumeaux), indiquée par FJ.

Les premiers, étant génétiquement identiques, ont le même sexe : donc on a MM ou FF avec probabilité 1/2.

Les deuxièmes se ressemblent comme deux frères et donc peuvent être de sexe différent : MM, FF, FM, ou MF avec probabilité 1/4.

Soit E l'événement « Désirée a mis au monde des jumeaux du même sexe », quelle est la probabilité qu'ils soient de vrais jumeaux ?

Dans ce problème les hypothèses H_1 et H_2 sont les événements VJ et FJ ; on a $VJ \cup FJ = \Omega$.

Soit p la probabilité $p(VJ)$. On peut exprimer E par :

$$\begin{aligned} E &= MM \cup FF = E \cap (H_1 \cup H_2) \\ &= (VJ \cap (MM \cup FF)) \cup \\ &\quad (FJ \cap (MM \cup FF)). \end{aligned}$$

Donc :

$$p(E) = P(VJ) \cdot p(MM \cup FF / VJ) + p(FJ) \cdot p(MM \cup FF / FJ).$$

La probabilité recherchée est :

$$\begin{aligned} p(VJ / MM \cup FF) &= p(VJ) \cdot p(MM \cup FF / VJ) \\ &\quad / p(VJ) \cdot p(MM \cup FF / VJ) \\ &\quad + p(FJ) \cdot p(MM \cup FF / FJ). \end{aligned}$$

Avec ces données on a :

$$\begin{aligned} p(VJ) &= p ; p(MM \cup FF / VJ) = 1 ; \\ p(MM \cup FF / FJ) &= 1/2, \text{ donc} \\ p(VJ / MM \cup FF) &= p \cdot 1 / p \cdot 1 + (1-p) \cdot 1/2 \\ &= 2p / 1 + p. \end{aligned}$$

Puisque les spécialistes en génétique affirment que $p(VJ) = 1/3$, on peut considérer, par exemple, cette valeur comme la probabilité a priori. Cela donne :

$$p(VJ / MM \cup FF) = 2/3 / (1 + 1/3) = 1/2.$$

Si on précise l'information précédente en disant que Désirée a mis au monde deux garçons la probabilité cherchée ne change pas.

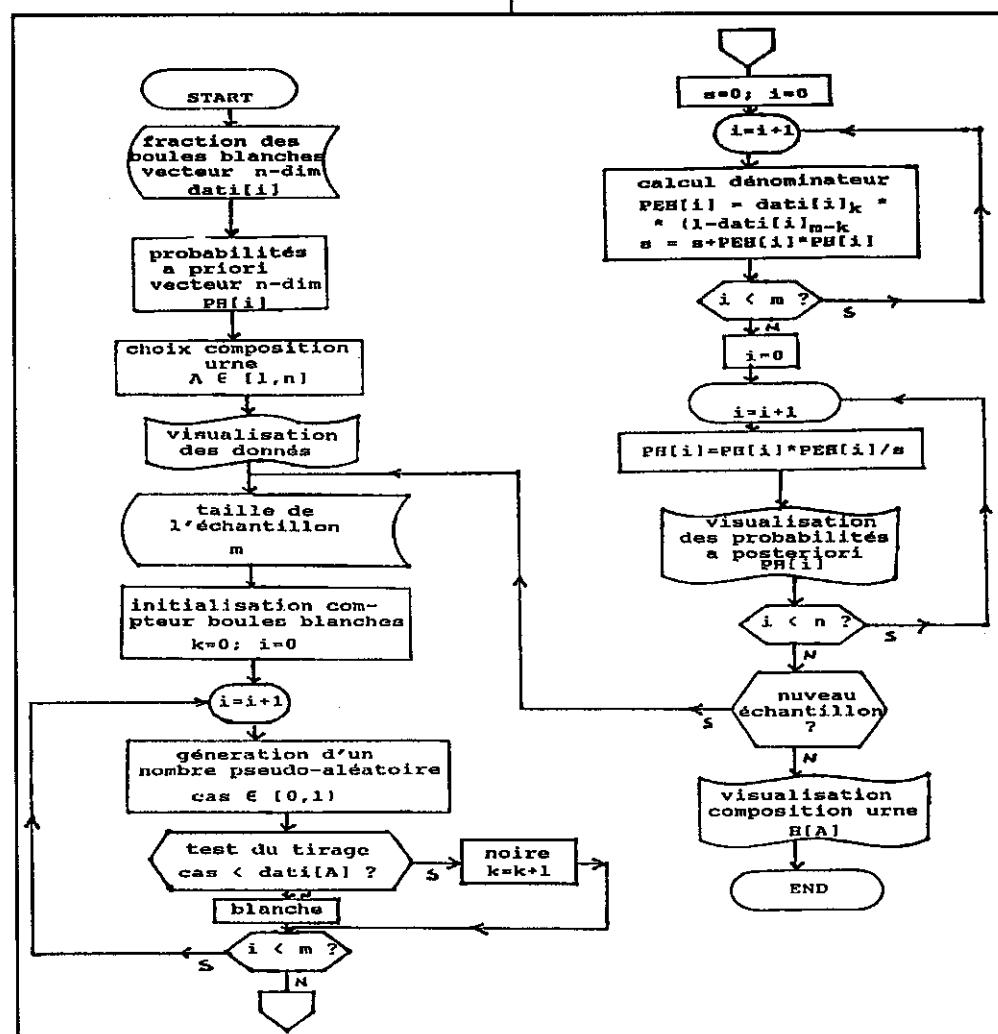
En effet, sachant que $p(MM/VJ) = 1/2$ et $p(MM/FJ) = 1/4$, on aura :

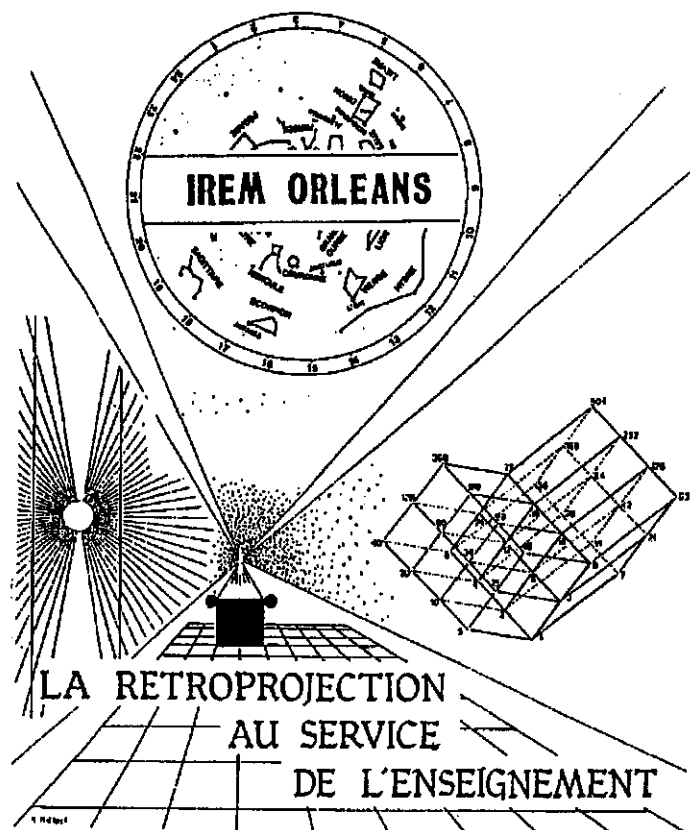
$$p(VJ/MM) = \frac{p(VJ) \cdot p(MM/VJ)}{p(VJ) \cdot p(MM/VJ) + p(FJ) \cdot p(MM/FJ)}$$

$$= \frac{1/3 \cdot 1/2}{1/3 \cdot 1/2 + 2/3 \cdot 1/4} = 1/2.$$

Bibliographie

- [1] Ahrens J.H., Dieter U., Grube A., 1970. *Pseudo-random numbers. A new proposal for the choice of multipliers*. Computing 6°, 1970.
- [2] Baldessari B., 1987. *Aspetti probabilistici della crittografia*. Atti del 1° Simposio Naz. su «Stato e Prospettive della Ricerca Crittografica in Italia», 1987, pp. 9-21.
- [3] Colagrande V. e Di Biase G., 1990. *Simulazione su calcolatore di alcuni esempi di applicazione del teorema di Bayes*. Periodico di Matematiche, n. 4, 1990, pp. 53-60.
- [4] Di Biase G. e Maturò A., 1990. *Analisi Bayesiana di generatori pseudorandom*. Atti del XIV Conv. Ann. AMASES, Pescara, 1990, pp. 293-313.
- [5] Di Biase G. e Maturò A., 1990. *Su un'analisi bayesiana per la verifica di casualità di successioni pseudorandom: software applicativo ed interpretazioni dei risultati*. Atti del Conv. Naz. «Classificazione e Analisi dei dati, metodi, Software, Applicazioni», Pescara, 1990, pp. 115-129.
- [6] Di Biase G. e Maturò A., 1991. *Confronto fra inferenza bayesiana e test classici per l'analisi di successioni di numeri pseudocasuali*. Ratio Math., n. 2, 1991, pp. 97-110.
- [7] Maturò A., 1989. *Numeri pseudocasuali*. Libreria dell'Università, Pescara.
- [8] Maturò A. e Cera N., 1991. *Analisi della bontà di alcuni generatori di numeri pseudocasuali per la cifratura dei messaggi e la simulazione*. Ratio Math., n. 2, 1991, pp. 83-96.
- [9] Maturò A. e Piscione A., 1991. *Probabilità e Statistica con il calcolatore: problematiche di carattere logico ed operativo*. Metron, in corso di stampa.
- [10] Knuth D.E., 1969. *The art of Computer programming*, 1969, vol. 2°. Addison Wesley, London.
- [11] Rizzi A., 1989. *Verifiche di Pseudo-Casualità in crittografia*. Atti del 2° Simposio su citato, 1989, pp. 3-21.
- [12] Rizzi A., 1977. *Generazione di distribuzioni statistiche mediante un elaboratore elettronico*. Ist. di Statistica e ricerca sociale «C. Gini», Roma.
- [13] Rizzi B., 1968. *Funzioni quasi periodiche e funzioni pseudo-aleatorie*. Metron, 1968, vol. XXVII, n. 1-2, pp. 1-35.
- [14] Scozzalava R., 1989. *La probabilità soggettiva e le sue applicazioni*. Editoriale Veschi, Masson, Milano.
- [15] Smith C.S., 1971. *Multiplicative pseudo-random numbers generators with prime modulus*. Journal of the Ass. for Computing Machinery, 18°, 1971.





RALLYE MATHÉMATIQUE DU CENTRE



I.R.E.M.
A.P.M.E.P.

INSPECTION
PÉDAGOGIQUE
RÉGIONALE

**9
3**

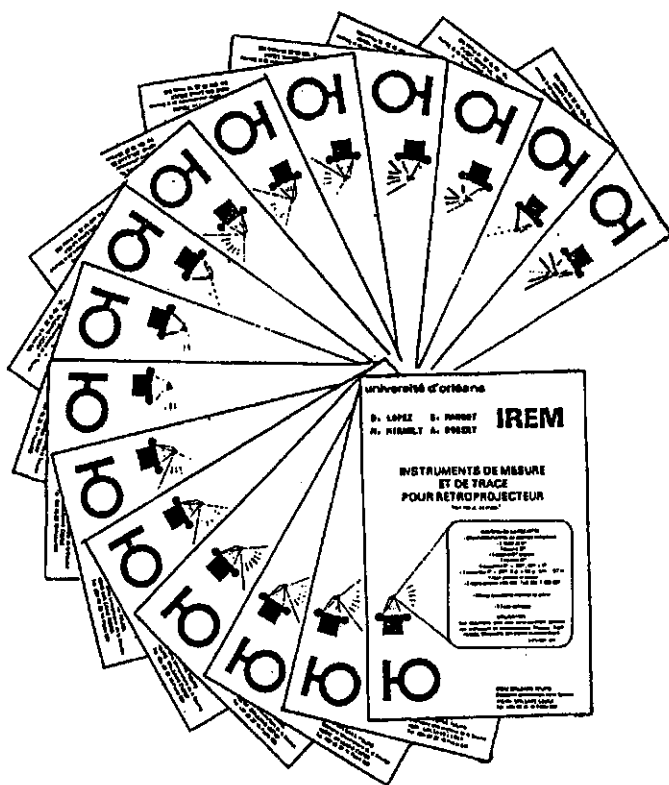
AVEC LE SOUTIEN DES INSPECTIONS ACADÉMIQUES



**Les nouvelles pochettes pour
rétro projection :**

- R 17 Symétrie
- R 18 Outils pour
rétroprojection

**Recueil analytique
des exercices
du Rallye Mathématique
du centre de 1986 à 1992**



Mathématiques et Français : quelle interdisciplinarité ?

Patrick ENNEBECK et Claire AUDIBERT Lille-Marseille

«Ils ne savent (même) pas lire les énoncés des exercices.»

«J'ai parfois l'impression qu'ils ne comprennent pas ce que je leur dis.»

«La démonstration ? Ne m'en parlez pas, ils n'y comprennent rien.»

Qui d'entre nous n'a pas un jour émis — ou entendu — pareils propos, parfois assortis d'une opinion globalisante un peu hâtive du type : «Ils ont des problèmes en français». Le fait est que les problèmes de langage sont nombreux et complexes dans notre discipline et qu'ils se posent sans doute de manière accrue depuis que des classes quasi totales d'âge accèdent au collège. Pour qui déciderait de prendre en charge ces problèmes en résistant aux sirènes de l'orthodoxie disciplinaire — «Que voulez-vous que j'y fasse ? Je suis professeur de maths, pas de français !» —, grande est alors la tentation de se tourner vers le professeur de français pour — par exemple — mettre en place quelques séances d'«interdisciplinarité»...

Les lignes qui suivent se proposent d'examiner la nature de quelques difficultés d'ordre langagier apparaissant en classe de mathématiques — sur la base de deux exemples : la définition du rectangle et l'apprentissage de la démonstration —, et ce dans le but de définir quelques cadres de collaborations possibles entre professeurs de français et de mathématiques. Il serait toutefois illusoire, à mon sens, d'aborder ce sujet sans préalablement soumettre à la question notre discipline et nos pratiques. Autrement dit : ne serions-nous pas, nous-mêmes, à l'origine de quelques-unes de ces difficultés d'ordre langagier ?

La conception implicite (1) qui sous-tend majoritairement et encore actuellement nos pratiques d'enseignement est souvent la suivante : les mathématiques sont un «donné» qu'il importe de transmettre ou mieux de «faire découvrir» à l'élève. Dans une telle conception, il est alors un point de passage obligé à l'intérieur de la classe de mathématiques : l'apprentissage de «textes de savoir». Que le lecteur ne se mé-

prenne pas ici sur le sens que j'accorde à l'expression «textes de savoirs» : il s'agit pour moi, ni plus, ni moins de tout texte — même le plus infime — qui peut se voir précédé d'une amorce du type : «En mathématiques, on dit que...». Qu'il ne se méprenne pas non plus sur ce point : ce que je conteste ici, ce n'est pas la transmission d'un savoir, mais la transmission d'une formulation figée de ce savoir, voire d'un fantasme de formulation. Bien entendu, la confusion entre activité disciplinaire et apprentissage de «textes de savoirs» disciplinaires n'est pas, en milieu scolaire, l'apanage de notre seule discipline. Cependant cette confusion me paraît aboutir à des effets particulièrement néfastes en classe de mathématiques, en ce sens qu'elle conduit bien souvent le professeur à formuler de redoutables chausse-trappes langagières pour l'élève.

Les mystères linguistiques du rectangle

Au chapitre «Quadrilatères» d'un manuel presque quelconque (2) de classe de sixième, il est possible de lire la proposition suivante en conclusion d'une série d'activités «préparatoires» :

«Même si elle semble choquante, l'affirmation suivante est vraie (il faudra la garder à l'esprit) :

Un carré est un losange particulier, c'est aussi un rectangle particulier.»

Très élémentaire, dira-t-on. Voire. Si l'on soumet en effet cette proposition à des élèves de troisième «moyens» en mathématiques ou à des adultes non mathématiciens de profession, leurs réponses seront très majoritairement de deux types, à savoir : «C'est impossible» ou «Je ne

comprends pas», le blocage principal se situant au niveau de la sous-proposition «Le carré est un rectangle particulier». En effet les vessies ne sont pas des lanternes — sauf peut-être en classe de mathématiques — et les carrés encore moins des rectangles... Et ce d'autant plus que la proposition «Le carré est un rectangle particulier» est ici sémantiquement fermée, en ce sens qu'elle n'appelle pas à un commentaire sur l'adjectif «particulier», comme appellerait par exemple la proposition «La loutre est un mammifère particulier» à un commentaire sur les particularités de la loutre en tant que mammifère. Non. L'information est ici : tout carré est élément (particulier) de la classe des rectangles et la chose semble particulièrement irrecevable à qui sait — comme tout un chacun — que pour qu'un rectangle soit rectangle, il faut que ses côtés consécutifs soient de longueurs différentes (3).

Tournons à présent la page de ce manuel pour y découvrir sous la rubrique «Connaissances de base» la proposition suivante :

**«Rectangle :
quadrilatère qui a
quatre angles droits.»**

Il ne s'agit pas là d'une «connaissance de base», mais bien d'une définition dont on omet de préciser l'aspect le plus important à savoir qu'elle n'est qu'une convention (4) et que seule cette convention — ici donnée a posteriori et ex cathedra — permet de démontrer le théorème «Le carré est un rectangle particulier». J'emploie ici à dessein les termes «théorème» et «démontrer» pour pointer le fait que l'on fait ici référence implicite à la formulation «hypothético-déductive» des «textes de savoir» mathématiques en omettant toute l'activité mathématique qui précède ces textes — en particulier un travail collectif de définition de l'objet «rectangle» —, qui elle seule pourrait leur donner du sens. Bref les «mathématiques» présentées sur ces deux pages de manuel «marchent la tête à l'envers» et se réduisent à l'apprentissage d'un «texte de savoir» complexe, dont la règle du jeu n'est même pas explicitée.

On ne doit pas s'étonner que des élèves puissent éprouver des difficultés à côtoyer ce genre de littérature, voire à lire les énoncés d'éventuels «exercices d'appli-

cation», si on y ajoute le fait que, pour la plupart — et au moins durant les premières années de collège —, nos élèves ne disposent pas d'une maîtrise suffisante des opérations langagières pour parvenir, sans médiation, à donner du sens à de telles subtilités. Il semblerait alors, dans un tel cas, pour le moins abusif d'en inférer un constat générique du type : «Ils ne savent pas lire», puis d'en appeler à l'aide du professeur de français; qui allume le feu, doit savoir l'éteindre...

L'apprentissage de la démonstration

Je n'évoquerai ici qu'un aspect particulier de cet apprentissage, celui de la production écrite, qui est, comme nous le savons tous, une des difficultés majeures que rencontrent nos élèves en collège et en lycée. Je précise également que je ne prendrai pas en compte la phase heuristique préalable à ce type de tâche qu'il convient, à mon sens et au moins dans un premier temps, de séparer de la phase de rédaction.

Il est ici un ensemble de données, issu des recherches en didactique du français, qui permet d'éclairer d'une manière peut-être un peu nouvelle certaines de ces difficultés. La production d'écrit est une activité complexe, de très haut niveau cognitif, et de plus non-homogène. On peut en effet distinguer un certain nombre de «types de texte», dont la production écrite relève de processus cognitifs assez différents; autrement dit — et comme pour la lecture —, la transférabilité de compétence en production écrite d'un «type de texte» à un autre n'est nullement évidente. Pour prendre un exemple, les élèves de collège sont amenés à produire en classe de français deux grands «types de textes» :

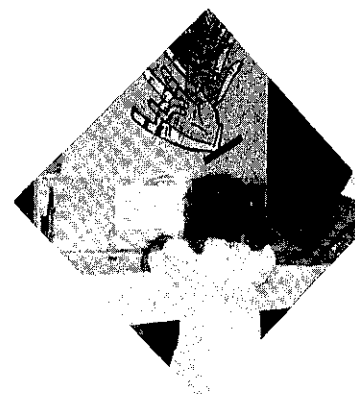
le texte narratif

— «Racontez le dernier jour de vos vacances»

et le texte argumentatif

— «Les parents doivent-ils toujours dire la vérité à leurs enfants?»

Et ce que nous devons savoir, c'est que ces deux types de production écrite nécessitent deux types d'apprentissage différents : il n'y a pas là de transférabilité de compétences immédiate et automatique. Les choses se complexifient alors considérablement pour nous, professeurs de mathématiques, qui devons — dès la



Carré? Rectangle? Losange?

classe de quatrième — amener nos élèves à la production écrite de démonstration ; celle-ci relève en effet, en première analyse, du type argumentatif et pour beaucoup de nos élèves de quatrième, ce sera là un type de texte qu'ils n'ont que très rarement pratiqué, car bien des professeurs de français n'abordent ce sujet qu'en milieu de classe de troisième... Si on y ajoute le fait que la démonstration est un « faux ami » du texte argumentatif, en ce sens qu'elle en présente les marques de surface — connecteurs, par exemple —, mais relève d'une structure profonde fondamentalement différente (5), on comprendra que celle-ci peut s'avérer être la source de bien des difficultés d'ordre linguistique chez nos élèves. Mais pour peu que l'on accepte, en tant que professeur de mathématiques, de prendre en charge ces difficultés, il y a sans doute ici une réelle possibilité (6) de collaboration « à égalité » entre professeurs de maths et professeurs de français reposant, par exemple, sur la menée « de front » de l'apprentissage de la production écrite de textes argumentatifs en classe de français et de textes « démonstratifs » en classe de mathématiques.

Langage et mathématiques

La classe de mathématiques est donc un haut-lieu de manipulation des activités langagières, leur diversité et leur complexité excédant largement les deux exemples ici présentés. Pour qui voudrait prendre en charge ces difficultés — car après tout, mis à part l'élève, qui nous le demande ? —, il conviendrait avant tout, à mon sens, de se poser la question « Ne suis-je pas moi-même à l'origine de ces difficultés ? » en ayant constamment en tête que l'activité mathématique ne se résume pas à l'apprentissage d'un langage. Et pour qui voudrait s'aventurer plus loin, il reste une piste ambitieuse qui serait la suivante : les activités langagières propres à la discipline mathématiques participent bien entendu à l'apprentissage des mathématiques, mais aussi à l'apprentissage du langage d'un point de vue général et nous avons là beaucoup à apprendre des professeurs de français et en particulier des recherches en didactique de cette discipline. ■

Notes :

Patrick ENNEBECK est professeur de mathématiques au Collège Beaupré d'Haubourdin (59) et formateur au « Collectif Formation Innovation » de la MAFPEN de Lille.

Claire AUDIBERT est professeur de lettres au Collège Versailles de Marseille. Formateur MAFPEN Aix-Marseille.

(1) Ces lignes s'inspirent largement d'un texte de Bernard Charlot : « L'épistémologie implicite des pratiques d'enseignement des mathématiques » republié récemment dans :

« Faire des mathématiques : le plaisir du sens »

B. Charlot, R. Bkouche, N. Rouche (Armand Colin 1991).

(2) R. Delord, G. Vinrich : « Mathématiques 6e » (Hachette 1990)

L'expression « presque quelconque » n'est pas à prendre dans un sens péjoratif, mon propos dépassant ici largement la simple critique d'un manuel.

(3) Il est par ailleurs à remarquer que, dans le langage courant, le rectangle est souvent nommé en tant que carré : on dira aisément « C'est carré » au sujet d'une forme rectangulaire, mais jamais l'inverse.

(4) Les « définitions » ont en effet un caractère plus fonctionnel que structurel, en ce sens qu'elles sont avant tout formulées pour « convenir » à telle ou telle démonstration. Leur formulation n'est donc pas figée dans un quelconque « ciel » des mathématiques.

(5) Voir à ce sujet les travaux de Raymond Duval et en particulier : « Pour une approche cognitive de l'argumentation » R. Duval (1990) in « Annales de Didactique et de Sciences cognitives » n° 3 (publication de l'IREM de Strasbourg).

(6) Des recherches sont actuellement en cours sur ce thème, notamment au sein du groupe de recherche INRP « Langage et Mathématiques ».

L'Histoire des mathématiques

Une expérience interdisciplinaire fondée sur l'Histoire des mathématiques

Lucia GRUGNETTI - Cagliari

Travail interdisciplinaire fondé sur l'histoire des mathématiques et qui représente un exemple du rapport dynamique entre programmes et choix des maîtres. Ce travail concerne des aspects des mathématiques médiévales et leur «entrelacement» avec certains itinéraires didactiques.

La situation scolaire en Italie

— L'organisation scolaire :

l'école maternelle (3-5 ans) non obligatoire, le primaire (6-10 ans) et l'école moyenne (collège) (11-13/14 ans), obligatoires, l'école supérieure (14-18/19 ans) non obligatoire.

— Les programmes (les réformes)

Il y a quelques années, d'importantes réformes de l'enseignement ont été introduites en Italie.

En 1979, la réforme pour l'école moyenne est entrée en vigueur, tandis que c'est en 1985 qu'a débuté la réforme pour l'école primaire. Depuis 1986 une réforme partielle pour l'école secondaire supérieure est en cours.

Les programmes de mathématiques pour l'école moyenne ont représenté un moment fondamental pour l'enseignement des mathématiques en Italie ; à savoir la ratification d'un renouvellement méthodologique qui était dans l'air depuis longtemps.

On peut dire que les réformes nous offrent une chance d'enseigner d'une façon renouvelée et dynamique. Le nœud de la question est maintenant celui qui concerne un recyclage adéquat des maîtres.

— Indication des contenus et suggestions méthodologiques

Dans la désignation des contenus des différents programmes et les suggestions

méthodologiques s'y rapportant, on trouve plusieurs éléments essentiels tels que :

- l'indication des temps à bref et moyen termes dans lesquels les contenus pourront être concrétisés ;
- la suggestion de méthodologies appropriées ;
- l'ouverture vers de nouvelles formes de collaboration didactique entre les différentes disciplines, ce qui donne donc un caractère concret au besoin d'interdisciplinarité.

Des programmes au travail en classe

Dans les programmes de l'école moyenne on trouve, entre autres, la phrase suivante :

«On suggère de diriger l'élève vers une première réflexion sur la dimension historique de la science...»

Comment faire ?

«Pour un esprit scientifique toute connaissance

est une réponse à une question.

S'il n'y a pas eu de question,

il ne peut y avoir connaissance scientifique.

Rien ne va de soi

Rien n'est donné.

Tout est construit.»

(Bachelard in «La formation de la pensée scientifique).

On est certainement tous d'accord que l'élève doit non seulement être capable de redire ou de refaire, mais aussi de réinvestir dans des situations nouvelles (pour lui), d'adapter, de transférer ses connaissances pour résoudre des problèmes nouveaux (pour lui). Tout ceci nous a amené à considérer l'importance des problèmes :

- dans l'histoire
- dans le domaine de la didactique.

Le problème dans l'histoire

Si on refait, même à grands traits, l'histoire des mathématiques à partir des Babyloniens et des anciens Egyptiens, l'importance attribuée au problème comme chemin préférentiel pour la transmission du savoir apparaît clairement.

Les mathématiques ont été construites en réponse à des questions qui se sont traduites en autant de problèmes.

L'activité de résolution de problèmes a été au cœur même de l'élaboration de la science mathématique (Charnay, 1988).

Par le parcours suivant :

les problèmes (dans l'histoire)

↓
les stratégies (utilisées à différentes époques)

↓
les raisons de ces stratégies

↓
le contexte culturel, socio-économique...

on peut essayer de donner du **sens** au travail historique.

Le sens d'une connaissance mathématique se définit :

- **non seulement** par la collection des situations où cette connaissance est réalisée en tant que théorie mathématique ;
- **non seulement** par la collection des situations où le sujet l'a rencontrée comme moyen de solution,
- **mais aussi** par l'ensemble des conceptions qu'elle rejette, des erreurs qu'elle évite, des économies qu'elle procure, des formulations qu'elle reprend, etc... (G. Brousseau).

L'expérience dans les classes

C'est dans cet esprit qu'on a développé un travail interdisciplinaire selon le projet suivant :

Discipline : histoire



Moyen-Age en Europe et Islam :
l'importance de Leonardo Pisano :
le Liber Abbaci



la recherche en bibliothèque
(du Liber Abbaci)



les élèves (12 ans)
d'une classe du collège

les professeurs de :
langue maternelle,
mathématique,
éducation technique
(la problématique
historique de l'imprimerie)



le problème du langage du Liber Abbaci :
on doit comprendre une autre langue
pour comprendre les problèmes
de Leonardo Pisano



- une motivation pour analyser une langue qui a précédé la langue italienne

«Une langue étrangère n'est pas nécessairement un **obstacle** pour les élèves qui se prennent au jeu et ont plaisir à montrer leurs compétences en anglais, voire en latin»
(Grégoire, Hallez, 1988)



- l'analyse des stratégies des élèves



- l'analyse des stratégies de Leonardo Pisano



- la création par les élèves d'un problème avec une structure similaire à la structure d'un problème de Leonardo Pisano

Ce projet entre dans le parcours interdisciplinaire plus ample :



Zoom arrière sur le ...
(ICME 7)

MATHEMATIQUE	HISTOIRE ET GEOGRAPHIE	EDUCATION TECHNIQUE
Les systèmes de numération :	l'Egypte	La balance
• Babylonien	La Mésopotamie	Instruments astronomiques
• Egyptien	L'importance des fleuves	Les clepsydres
• Romain	Rome	
...	La Grèce avant Euclide	
Nombres Figures		
La numération décimale de position	Les Arabes	l'Astrolabe
		les moulins
		les horloges
La naissance de l'algèbre	Le Moyen-âge	l'imprimerie
Statistique et probabilité	La révolution industrielle	l'industrie textile
L'ordinateur		
Charles Babagge	L'Angleterre	Le métier Jacquard (1801)

Pourquoi Leonardo Pisano ?

Leonardo Pisano (Pise ~ 1170-id.1240), dit **Fibonacci** est le premier mathématicien de talent de l'Occident chrétien.

Il fut marqué par un séjour à Bougie (Algérie) et des voyages en Egypte, Syrie, Grèce et Sicile.

A son retour en Italie, il publie son **Liber Abbaci** dont la première version date de 1202.

Il reprit les méthodes euclidiennes et progressa en arithmétique ainsi que dans les méthodes de calcul.

Bien délicat est le tri entre ce qui incombe à son talent et ce qui revient aux influences qu'il a reçues (G. Beaujouan, 1985).

Comment on a utilisé le Liber Abbaci dans les classes

1) Un problème à traduire :

In quodam plano sunt due turres, quarum una est alta passibus 30, altera 40, et distant in solo passibus 50 ; infra quas est fons, ad cuius centrum uolitant due aues pari uolatu, descendentes pariter ex altitudine ipsarum ; queritur distantia centri ab utraque turri

2) Le problème à résoudre :

«Deux tours, l'une haute de 40 pas et l'autre de 30 pas, se trouvent à une distance de 50 pas.

Entre les deux tours se trouve une fontaine vers laquelle deux oiseaux, en descendant de chaque tour, se dirigent avec

la même vitesse et y arrivent en même temps.

Quelle est la distance de la fontaine à chaque tour ?»

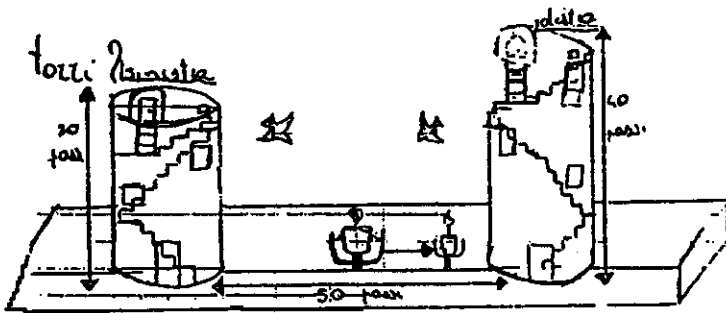
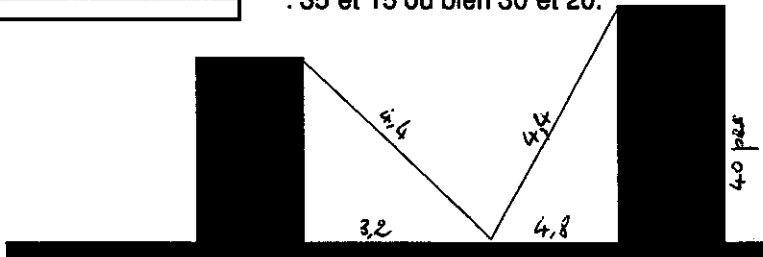
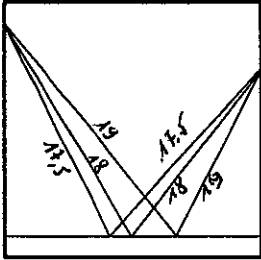
3) Les stratégies des élèves et leurs explications :

- Les élèves de 14/15 ans, qui connaissent le théorème de Pythagore, l'ont utilisé ;

- Les élèves de 12/13 ans ont suivi les stratégies suivantes :

- stratégies graphiques (par tâtonnements) :

- stratégies additives (évidemment fausses) qui les ont amenés aux résultats : 35 et 15 ou bien 30 et 20.



4) Les stratégies de Leonardo Pisano (traduction mot à mot)

«Si la tour la plus haute est à une distance de 10 de la fontaine, 10 fois 10 font 100 qui ajouté à la tour plus longue multipliée par soi-même est 1600, qui donne 1700, il faut multiplier la distance qui reste, par elle-même, qui ajouté à la tour plus petite multipliée par soi-même, à savoir 900, donne 2500.

Cette somme et la précédente diffèrent de 800. Il faut éloigner la fontaine de la tour la plus haute. Par exemple de 5, à savoir globalement de 15, qui multiplié par soi-même est 225, qui ajouté à la tour la plus haute multiplié par soi-même donne 1825.

35 (distance de la fontaine de la tour plus petite) multiplié par soi-même est 1225, qui ajouté à la tour plus petite par soi-

même donne 2125.

Les deux sommes diffèrent de 300.

Avant, la différence était de 800. Donc, quand on a ajouté 5 pas, on a diminué la différence de 500.

Si on multiplie par 300 et on divise par 500, on a 3, qui ajouté à 15 pas, donne 18, qui est la distance de la fontaine à la tour plus haute.»

En utilisant le théorème de Pythagore, Fibonacci a d'abord supposé que la distance de la tour la plus haute était 10, donc (selon les notations modernes)

$$10^2 + 40^2 = 100 + 1600 = 1700 \text{ et}$$

$$(50 - 10)^2 + 30^2 = 40^2 + 30^2 =$$

$$1600 + 900 = 2500$$

(«Cette somme et la précédente diffèrent de 800»).

Il continue

$$15^2 + 40^2 = 225 + 1600 = 1825 \text{ et}$$

$$35^2 + 30^2 = 1225 + 900 = 2125.$$

(«les deux sommes diffèrent de 300»)

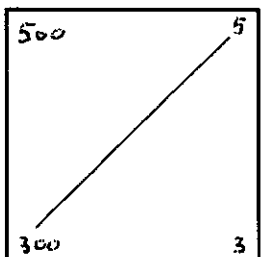
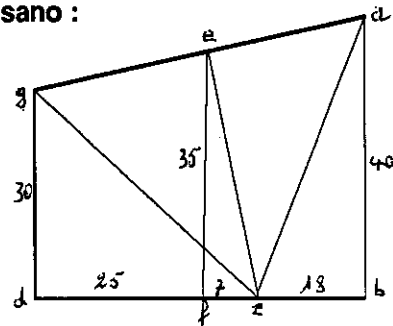
A ce point-là Fibonacci, comme il l'explique lui-même, utilise un raisonnement proportionnel : «Avant, la différence était de 800. Donc quand on a ajouté 5 pas, on a diminué la différence de 500. Si on multiplie 5 par 300 et on divise par 500, on obtient 3, qui ajouté à 15 pas, donne 18...».

Auparavant on a parlé du «sens d'une connaissance mathématique», par, entre autres, les **économies qu'elle procure**.

La discussion critique, avec les élèves plus âgés, de la première stratégie de Leonardo Pisano, met clairement en évidence l'économie des procédures algébriques que les élèves utilisent normalement (je dirais mieux mécaniquement) et qui n'étaient pas encore connues à l'époque de l'auteur du Liber Abbaci.

C'est la bonne occasion d'expliquer aux élèves qu'en algèbre, l'usage des lettres est apparu seulement dès le début du XVI^e siècle.

— Seconde stratégie de Leonardo Pisano :



Après avoir expliqué que le triangle agz est isocèle sur la base ag (avec $ae = eg$) par construction, il ajoute :

40 et 30 font 70 ; la moitié est 35, à savoir la ligne ef.

Les lignes df et fb ont 25 de longueur, la différence entre 35 et la tour la plus petite est 5, qui, multiplié par 35 fait 175, qui, divisé par la moitié de la distance entre les deux tours, à savoir 25, donne 7 (la ligne fz).

Donc dz est 32 et il ne reste que 18 pour la ligne zb.

On peut proposer aux élèves de l'école secondaire supérieure d'essayer de comprendre le procédé de Leonardo Pisano: procédé, qui, comme on peut le voir, est basé sur la similitude du triangle efz et du triangle ghe où h est l'intersection de ef et de la parallèle à df passant par g.

La chose la plus importante n'est pas forcément la réussite, mais plutôt, les hy-

pothèses que les élèves font et la discussion sur ces hypothèses. En outre on peut mettre en évidence l'usage des Eléments d'Euclide dans le Liber Abbaci.

Conclusions

Cet article, concernant mon atelier, est seulement un exemple du travail qu'on peut développer en classe en partant de l'histoire. Etant donné qu'en général la formation des enseignants de math ne touche pas le domaine historique, on a peur d'aborder la question en classe.

Mais si on s'aperçoit que l'histoire et l'histoire de mathématiques peuvent être utiles du point de vue didactique, on peut se faciliter la tâche en commençant par une période localisée et riche de possibilités d'implications interdisciplinaires.

Mais quelle période historique n'est pas riche d'idées ? ■

Bibliographie

- [1] BROUSSEAU G., **Les obstacles épistémologiques et les problèmes d'enseignement**, RDM n. 4.2, 1983.
- [2] CHARNAY R., **Apprendre (par) la résolution de problèmes**, COMMISSION INTER-IREM «Premier Cycle», ICME 6, 1988, pp. 13-29.
- [3] DAHAN DALMEDICO A., PEIFFER J., **Une histoire des mathématiques**, Point-Sciences, Le Seuil, 1988.
- [4] GHEVARUGHESE JOSEPH G., **Foundations of Eurocentrism In mathematics**, Race & Class, XXVIII, 3, 1987, pp. 13-28.
- [5] GRUGNETTI L., **The Role of the history of Mathematics In a Interdisciplinary Approach to**
- Mathematics Teaching**, ZDM, Karlsruhe, 89/4, pp. 133-138.
- [6] GRUGNETTI L., ORRU' G., SUSNIK G., VANNUCCI V., **Les programmes de mathématique : évolution en Italie**, Actes de la 41e Rencontre internationale de la CIEAEM, Bruxelles, 23-29 juillet 1989, pp. 315-318.
- [7] IREM, GROUPE EPISTEMOLOGIE ET HISTOIRE, **Mathématiques au fil des âges**, Gauthier-villars, 1987.
- [8] PISANO L., **Liber Abbaci (Sec. XIII)**, Edizione critica di Baldassarre Boncompagni, Roma, Tipografia delle Scienze Matematiche e fisiche, 1857.
- [9] STRUIK D.J., **A concise history of mathematics**, New-York, 1967.

Images analogiques, images numériques

Jean DELERUE - Nice

Deux médias complémentaires pour l'enseignement des mathématiques.

Le monde de l'image n'appartient plus uniquement aux audiovisualistes et aux images analogiques puisque depuis quelques temps apparaissent les images numériques stockées sur disquettes ou sur DON (disques optiques numériques). Ces nouvelles images sont traitées par des informaticiens ou des infographistes.

Analogique et numérique : deux mondes différents qui se rapprochent et qui risquent de se confondre ; deux mondes qui ont pourtant leur propre spécificité dans les applications pédagogiques.

Spécificité analogique numérique

Nous avons l'habitude des images analogiques : ce sont celles des magnétoscopes et des téléviseurs. Un signal continu restitue sur les 625 lignes de nos petits écrans une infinité de couleurs, le mouvement, la réalité, la vie. L'arrêt sur une image permet son analyse mais il est très difficile de la modifier. L'image analogique se prête à l'observation.

L'image numérique est un signal discontinu : tous ses points sont accessibles ; il est possible de retirer des éléments de l'image, d'en surligner d'autres, de changer des couleurs donc de modifier la lecture qui sera faite de cette image. Mais plus l'image numérique reflète la réalité en finesse et en couleur plus elle prend de place en mémoire et en stockage. Très pratique pour un travail de schématisation elle se prête très mal au montage en séquences animées à moins d'avoir été tellement dépouillée qu'elle fera difficilement référence à la vie.

Les outils

Le matériel de base est connu ; les prix des magnétoscopes, TV, lecteurs de vidéodisques ou micro ordinateurs équipés de sorties graphiques ont constamment baissé et beaucoup d'établissements scolaires se sont équipés. Par contre les passerelles qui permettent le passage entre le numérique et l'analogique sont moins connues et encore chères.

J'utilise la carte Meye 1C qui coûte à peu près 8 000 francs pour passer d'un signal analogique vidéo PAL ou RVB à un signal numérique EGA VGA MCGA (320*200 en 256 couleurs) ou même VGA étendu. Le résultat est satisfaisant par contre le logiciel pourrait être amélioré surtout pour le traitement des palettes de couleurs. D'autres cartes sont disponibles, la couleur n'est pas toujours indispensable, des niveaux de gris suffisent parfois et c'est moins cher !

Dans le même ordre de prix une carte IMAGO 2500 prêtée par la DLC 15 me permet le passage des images numériques en vidéo avec possibilité d'incrustation. Le résultat est lui aussi très correct. Cette carte remplit le double rôle de carte graphique informatique et de carte de sortie analogique en PAL ou en S-VHS.

Les logiciels de traitement de l'image numérique sont nombreux. Deluxe Paint, qui est en licence mixte, donne souvent satisfaction.

Pourquoi intégrer des images dans un cours de mathématiques ?

... l'enseignement des mathématiques comporte deux aspects :

— il apprend à relier des observations du réel à des représentations : schémas, tableaux, figures ;

— il apprend aussi à relier ces représentations à une activité mathématique et à des concepts.

Ces quelques lignes en tête des instructions officielles pour l'enseignement des mathématiques, invitent les enseignants à partir d'observations du réel. Mais en dehors des deux plans parallèles (plafond-plancher) ou de quelques autres polyèdres visibles par la fenêtre, la salle de mathématique offre peu de situations à observer. Nous avons donc choisi d'amener par la vidéo des images du réel dans la classe. Ces images sont compliquées mais les élèves retrouvent leur environnement et l'une des tâches de l'enseignant sera d'amener l'élève à sentir la structure mathématique présente derrière l'image. Les concepts abstraits seront alors pour l'élève issus de situations concrètes.

Utiliser des images du réel pour appréhender une notion mathématique demande une attitude dynamique et critique des élèves et du professeur. Les élèves, fréquemment sollicités, participent activement au cours. Il faut pouvoir s'arrêter sur une image, revenir sur une autre, ne montrer qu'un passage précis d'une séquence pour, à chaque fois, consolider un peu plus la structure ou la notion mathématique qui est en train d'être élaborée. L'accès à la source d'images doit être souple, rapide et précis pour pouvoir rapidement confirmer le raisonnement des élèves ou poser une question en les confrontant à une autre image de cette réalité. Ces critères nous ont fait intégrer à nos cours le vidéodisque. Sur un tel disque les images et les séquences sont repérées et peuvent être appelées soit par une télécommande, soit par un logiciel informatique.

OBJECTIF GEOMETRIE Vidéodisque du C.N.D.P.

Ce vidéodisque destiné à l'enseignement des mathématiques se propose d'aider les enseignants sur les thèmes suivants :

Trois thèmes de géométrie dans l'espace :

- Solides et surfaces
- Prismes et pyramides
- Cônes et cylindres

Cinq thèmes de géométrie plane :

- Translation rotation
- Symétrie axiale
- Symétrie centrale
- Homothétie
- Isométrie

Un thème sur art et géométrie.

150 exemplaires de ce disque doivent être actuellement utilisés dans des établissements scolaires. Un film montre l'insertion de ce média dans un cours de Mathématiques.

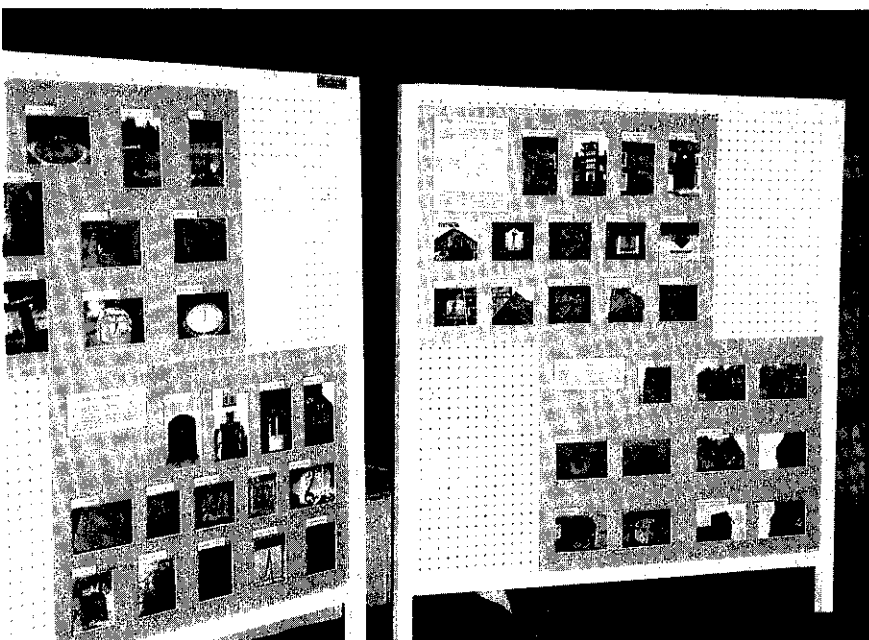
De l'observation à la schématisation

Un exemple à propos de translations et de rotations

L'exemple utilise une séquence de 2 minutes du vidéodisque «Objectif Géométrie» du CNDP. On y voit un escalier roulant, des manèges, des balançoires, des essuie-glaces de voitures ou d'autobus, un bas-relief Assyrien, un funiculaire, un monte-charge, des ascenseurs, un baby-foot, etc...

De cet univers où manquent les rats laveurs de Prévert, il faut que les élèves dégagent les notions de translation et de rotation. Faire dessiner rapidement par les élèves une des images permet à l'enseignant de partir des choix des élèves. Expliquer ce que l'on a dessiné est difficile et souvent l'élève mime plus qu'il ne décrit son choix. Un vocabulaire précis s'impose pour différencier les balançoires par exemple. C'est le premier pas vers la modélisation. L'utilisation de quelques dessins d'élèves sur transparent permet un travail collectif.

L'image, pendant le cours, n'est pas seulement une source figée d'informations. Il faut pouvoir intervenir sur l'image et la modifier. Quelques traits au feutre à tableau blanc sur l'écran de télévision permettent de passer de l'image du funiculaire à celle de deux segments parallèles et de même longueur. On peut souligner sur l'image même, le début d'une structure mathématique. C'est en général ce que je demande de faire à un élève. La touche «pause» de la télécommande offre ensuite la possibilité de faire disparaître l'image de la réalité présente sur le



L'exposition portugaise sur les cadrans solaires (ICME 7)

vidéodisque pour ne conserver que le dessin fait sur l'écran de télévision. on dégage ainsi petit à petit des lignes, une structure à partir d'observations du monde réel. Une démarche analogue se retrouvera pour «l'homme sur l'escalier» ou pour «le petit garçon sur la grande balançoire». Il y a des balançoires où l'on reste droit m'a dit il y a quelques années un élève pour caractériser la translation ; sur les autres on reste raide!

Sentir une notion, voir la construction de la canne dans une translation AB ce n'est pas suffisant. On peut voir des illusions d'optique comme celles présentes sur le vidéodisque. Pour valider l'observation et sa modélisation, une démarche mathématique s'impose. Cahier de cours et d'exercice ont toujours leur place.

L'image analogique du vidéodisque ou du magnétoscope se prête à l'observation mais il n'est pas possible d'ajouter sur l'image le parallélogramme ou les représentants du vecteur.

Apports des images numériques à la schématisation

Des images provenant du vidéodisque ou d'un magnétoscope peuvent être numérisées ; c'est-à-dire transformées au format des images informatiques et sauveées sur disquettes à la disposition des élèves ou des enseignants. Elles peuvent ainsi être traitées par ordinateur. L'image obtenue perd en qualité et en détails ; il n'y

a plus que 16 ou 256 couleurs suivant le format. Il n'est pas simple de les organiser en film mais les logiciels graphiques permettent une intervention directe sur ces images. Deux exemples sont proposés : d'une part un traitement d'image fixe, d'autre part une animation sur une image numérisée.

a) Sur l'image du porte-téléphone l'élève doit mettre en évidence la structure géométrique qui permet d'affirmer la présence d'une translation. Les parallélogrammes ne sont pas visibles sur le bras articulé ; le logiciel graphique permet d'identifier des segments qui se coupent en leur milieu puis de tracer les côtés manquants des parallélogrammes. L'image est devenue une page sur laquelle il est possible de travailler et de redessiner des objets géométriques. Les figures géométriques créées peuvent être extraites en utilisant les possibilités de masques ou de stencils de ce logiciel puis imprimées.

b) Cette fois c'est l'image du funiculaire qui a été numérisée ; elle sert de toile de fond à une animation faite avec FANTAVISION. L'élève recréera le mouvement de la cabine en décidant du vecteur de translation. La perception intuitive puis le modèle forgé seront confrontés à la réalité.

Il serait intéressant d'accompagner le vidéodisque ou les films vidéo de banques d'images numérisées prêtes à être retravaillées par les élèves. Ces travaux peuvent être imprimés et photocopiés sur transparents de rétroprojecteur pour une analyse collective.

Il est possible d'importer sous LOGO une image numérisée du vidéodisque, par exemple la vitre de l'autobus, de faire dessiner la tortue sur cette image ou de superposer une animation LOGO en prenant un angle ou une distance comme variable. Ce langage, présent sur tous les sites informatiques, permet, entre autres, du tracé géométrique avec peu d'ordres informatiques. Le Logo plaque sur l'image un repère, les coordonnées de chaque point sont accessibles par l'ordre POS. La réussite du dessin est surtout liée à l'analyse préalable de la situation géométrique et à l'emploi correct des propriétés mathématiques. Les élèves réinvestissent ce qu'ils ont précédemment appris et le transfèrent dans un autre «monde».

G. LAURET formateur au CFAIR de la Réunion a développé un LOGOVGA qui récupère directement des images LBM issues de Deluxe Paint. Associé aux procédures d'Euclide il permet un travail très intéressant de bonne qualité et plus aisé que ce que permet la version classique du LOGO.

Autres exemples

Le dernier film du CNDP «Le merveilleux voyage de Flora au pays des vecteurs» est d'un genre un peu nouveau, les séquences sont présentées 2 fois ; la deuxième fois des incrustations informatiques sont faites pour aider les élèves. Le document papier qui accompagne le film contient des

vues numérisées du film destinées à être photocopiées sur transparents.

Une technique analogue a été utilisée pour une série d'émissions de mathématiques sur le réseau câblé EDUCABLE de MASSY 91.

Conclusion

L'image ne remplace ni la manipulation d'objets ni la recherche de règles ou de preuves. Elle aide les élèves à forger un concept, et à le valider. Dans cette démarche l'image analogique et l'image numérique sont deux outils complémentaires au service de l'enseignant et des élèves.

B I B L I O G R A P H I E

- Vidéodisque Objectif Géométrie
- Le Merveilleux voyage de Flora

Notion de vecteur, somme, produit par un réel

- Vidéodisque et enseignement de la géométrie

Témoignages pédagogiques des élèves, des professeurs et des images dans une salle de classe.

Ces trois documents figurent au catalogue du CNDP «Des images à lire» présent dans les CDI ou au CRDP. On y trouve également d'autres films destinés à l'enseignement des mathématiques.

Cassettes disponibles au CDDP 91 extraits d'éducable :

Jouons avec les maths

Les cercles

Les triangles

Les quadrilatères

Les solides

Information des professeurs

Le rétroprojecteur en classe de mathématiques

L'audiovisuel en classe de mathématiques I et II

Des films sont également publiés par des IREM notamment à Lille et à Toulouse

par La Villette

de nombreux titres existent à l'étranger

Pochettes de transparents publiées par l'IREM d'Orléans

Diapositives et transparents publiés par l'IREM de Poitiers

Logiciels de traitement graphique et d'animation :

FANTAVISION 1+1 dsk

DELUXE PAINT ANIMATION 4 dsk

AUTODESK ANIMATOR 4 dsk

DELUXE PAINT 2 dsk

3D STUDIO nécessite un coprocesseur mais...

Images numérisées du vidéodisque de Mathématiques

IREM de Nice

LOGO VGA

Georges LAURET MAFPEN St Denis La REUNION

Revue sur l'image

et les mathématiques :

- PLOT n° 45 décembre 88

APMEP ORLEANS

- Bulletin de la commission

InterIREM Images et Maths

CIIM 150 pages en 1988

Bulletin édité par l'IREM

de Lille février 91

- Actes du colloque Audiovisuel

et Informatique

IREM d'Orléans HO n° 21.

- Articles dans SONOVISION

n° 309 et 310.

Didactique des mathématiques et formation des maîtres

Michel HENRY



...et au cours de la session de la ...
...de la ...
...de la ...
...de la ...



Interlude ou le poster-session (ICME 7)

Objectifs de l'atelier :

Présentation détaillée d'un curriculum possible de formation au métier d'enseignant de mathématiques, étalé sur cinq années. Place de la didactique dans ce curriculum, présentation de deux stratégies de formation en didactique. Le texte qui suit est le résumé de l'exposé. La discussion a vite dévié sur le fonctionnement hypothétique de l'épreuve « professionnelle » du CAPES.

- Intégrer la didactique dans une continuité de la formation étalée sur cinq années d'enseignement supérieur.

La préparation à l'enseignement des mathématiques ne peut plus être limitée au supplément pratique et pédagogique de type CPR venant chapeauter 4 années d'enseignement supérieur en mathématiques.

La formation à l'enseignement des mathématiques doit être progressivement intégrée à l'ensemble des études universitaires, ne serait-ce que pour les effets induits sur le rapport personnel des étudiants aux mathématiques elles-mêmes.

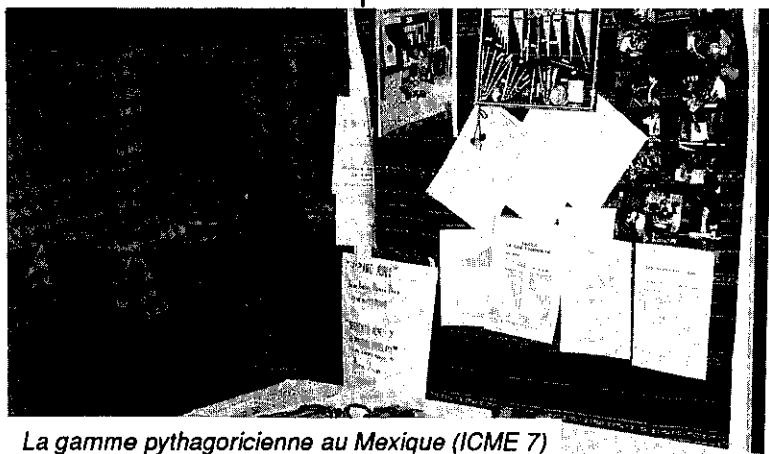
Des dispositifs existent d'ores et déjà, avec les préprofessionnalisations en DEUG prolongées par les UV dites improprement de « didactique des mathématiques » en Licence. Cette progression permet dès l'entrée en IUFM d'accentuer le caractère professionnalisant de la formation, tel qu'on peut en proposer maintenant une description.

En DEUG :

Les préprofessionnalisations aux métiers de l'enseignement sont les seules à avoir trouvé une certaine cohérence sur le plan national. Elles accueillent un nombre de plus en plus pléthorique d'étudiants, car elles répondent dans une certaine mesure à une demande, celle d'introduire, dès l'arrivée à l'université, la perspective professionnelle.

Pour ce qui nous concerne, la sensibilisation aux faits d'enseignement et aux conditions de fonctionnement du système éducatif trouve un écho non négligeable chez de jeunes étudiants dont le passé d'écoliers, de collégiens et de lycéens est encore très présent.

Beaucoup ont adopté une attitude plutôt négative vis-à-vis de l'enseignement tel qu'il se pratique généralement dans les classes. Une relativisation des questions qu'ils se posent, le recul nécessaire à l'analyse de leurs représentations du mé-



La gamme pythagoricienne au Mexique (ICME 7)

tier d'enseignant, permettent de mettre en place un véritable processus d'orientation. Celui-ci va donc fonctionner pendant les deux années de DEUG, à partir de lectures, de dialogues, de visites de classes et stages de premières observations donnant lieu à des comptes rendus dans lesquels les étudiants doivent s'impliquer avec leurs conceptions.

Les questions relatives à l'Education, les phénomènes d'apprentissage évoqués ou observés peuvent être examinés dans un contexte dédramatisé, sans pour autant faire l'objet de réponses ni élaborées ni définitives.

Le choix d'une spécialité est lui-même progressif et l'acquisition non encore achevée des techniques de base d'une discipline rendent peu pertinente l'introduction d'une formation systématique à la didactique en DEUG. Il n'en reste pas moins que quelques références historiques, des remarques de nature épistémologique ou des questions ouvertes sur les choix de transposition didactique seraient de nature à éclaircir et donner plus de sens à tous les enseignements universitaires.

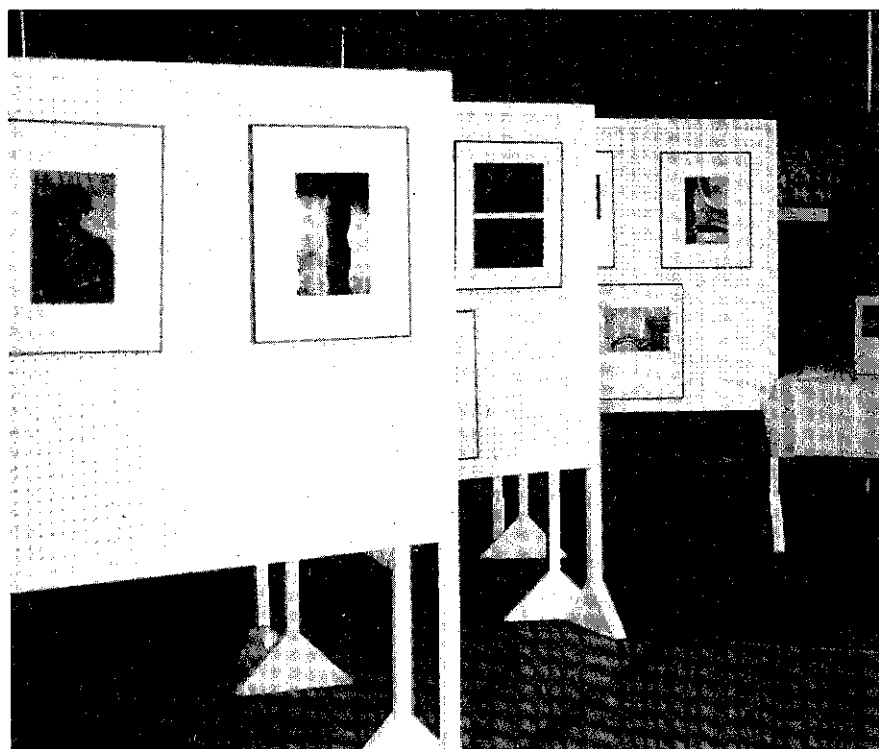
En Licence :

Au niveau de la licence, l'orientation vers l'enseignement est formulée pour la grande majorité des étudiants qui poseront leur candidature à l'IUFM au cours de l'année.

Le caractère abstrait de l'exposé actuel des mathématiques en licence ne fait que renforcer les interrogations qui s'expriment au sujet de leur enseignement et les choix pédagogiques l'accompagnant.

Il y a donc la place dans l'attente des étudiants pour poser explicitement ces questions, à partir des outils conceptuels que nous offre la didactique.

J'entame pour la 5^{ème} année à Besançon cette UV de 50 heures en licence «Enseignement des mathématiques et didactique». Des exposés accompagnés de lectures permettent une présentation synthétique des théories et concepts de base développés en didactique des mathématiques. Parallèlement, les étudiants sont en observation de classes, avec un sujet de mémoire précis portant sur une question



de didactique ou plus largement sur la description et l'analyse de choix pédagogiques observés. Ce mémoire fait l'objet d'un exposé de séminaire en fin d'année.

*L'exposition espagnole
"Art et Maths" (ICME 7)*

A ce niveau, l'objectif n'est pas de donner une formation en didactique et les étudiants pour la plupart ne seront pas didacticiens. Il est par contre de donner les outils théoriques permettant de formuler de bonnes questions, de découvrir à la fois la complexité des phénomènes d'apprentissage et le fait qu'il existe des connaissances structurées à leur propos. Il est indéniable que les étudiants en Licence se destinant à l'enseignement, se posent des questions à ce sujet. Ces questions peuvent être reformulées et problématisées. Au contraire d'être déstabilisante, cette approche de la didactique se révèle rassurante chez les étudiants de ce niveau, même s'ils manquent d'expérience pour relier clairement les comportements observés des élèves aux éléments abordés en didactique.

On a pu critiquer le côté abstrait de cet enseignement qui cherchait à répondre à des questions que les étudiants ne se poseraient pas encore du fait de cette inexpérience. Cet argument me semble tout à fait sérieux, mais ne me semble pas conduire automatiquement au rejet d'une formation en didactique avant toute expérience professionnelle. Il en va de même pour les mathématiques.

Par exemple, la théorie de l'intégration, complexe et difficile en licence, n'est pas pour autant reportée à plus tard sous prétexte qu'elle ne peut être opératoire pour résoudre dans la foulée des problèmes réels, ou de peur que son niveau d'abstraction ne s'adapte pas aux conceptions initiales des étudiants.

Mon appréciation, après plusieurs années de cet enseignement, est que le comportement des étudiants dans cette U.V. est très différent de celui des enseignants expérimentés qui suivent une formation en didactique : ces derniers, souvent, s'interrogent sur leur pratique et les idées qu'ils s'en font. Ils cherchent à les évaluer moralement, demandent où est le bien et le mal et sont stupéfaits devant l'ampleur de la tâche qu'exigerait un changement complet de style d'enseignement intégrant les données de la didactique. Le stage est alors suivi d'une phase de grandes hésitations et de remises en question, puis progressivement un autre regard sur les élèves et les mathématiques se reconstruit.

Chez les étudiants, observateurs plus neutres de la classe, il n'y a pas cette remise en questions qui peut être douloureuse. Il y a d'abord une certaine attente sur les résultats, les connaissances qu'ils espèrent acquérir par la suite de leur formation. Il y a ensuite la satisfaction, voire le plaisir de «faire des maths autrement» en abordant les questions de leur enseignement.

En IUFM :

Ayant exploré en profondeur une question de didactique en licence, ayant un aperçu sur les objets de la didactique, les élèves de l'IUFM peuvent alors s'engager dès la première année sur le terrain de la professionnalisation.

1ère année :

Cette première année doit permettre aux étudiants de se transformer en enseignants : la préparation au CAPES (écrits et 1er oral) est l'opportunité de la reconstruction nécessaire du rapport personnel au savoir. Y. Chevallard a montré que l'enseignant n'a pas la même place dans la topogénèse que l'élève qui sait et même qui maîtrise une connaissance. L'enseignant doit avoir pris du recul par rapport à l'architecture d'ensemble des mathématiques

de base, il doit comprendre mieux les articulations, le fonctionnement des outils dans des cadres différents.

Enfin, ce rapport personnel au savoir doit pouvoir accepter le rapport institutionnel attendu. Ce ne sera pas le même pour les futurs ingénieurs se formant dans leurs «Grandes» Ecoles ou pour les futurs chercheurs dans leurs Universités. C'est en ce sens que l'on peut parler de professionnalisation. Former des futurs enseignants, avant de leur donner une formation technique et pédagogique, c'est surtout les aider à établir ce rapport spécifique au savoir (savant et scolaire) et aux élèves apprenants. C'est de mon point de vue la mission essentielle de la 1ère année d'IUFM.

Ainsi, avec une préparation au concours permettant les remises à niveau et compléments de connaissances nécessaires (la géométrie !), la dimension doit faire appel à la didactique pour engager la reconstruction décrite ci-dessus.

Il ne s'agit donc pas de faire un cours de didactique (style DEA). Il s'agit de recourir à des outils de la didactique qui feront l'objet d'une présentation (s'ils ne l'ont pas été en licence) pour s'en servir à l'analyse de situations de classes d'abord, à la construction et l'expérimentation de séquences ensuite, centrées sur des thèmes déjà déblayés par les didacticiens et accessibles dans la littérature, en liaison avec l'étude des articulations et des objectifs des programmes.

La présence des étudiants dans les classes peut donc être plus active qu'en licence : ils ont à «monter» une ingénierie et conduire un enseignement, qui peut être bref, dans des conditions d'école où le travail d'analyse peut être approfondi. Les connaissances en didactique sont un moyen puissant pour cette analyse, à condition qu'elles soient maîtrisées par les formateurs en IUFM, autrement que par une approche abstraite. En fait, toute la question réside dans la formation des formateurs des I.U.F.M.

2ème année :

La deuxième année d'IUFM est centrée sur le stage en responsabilité qui permet de poser concrètement les questions de chronogénèse, et d'aborder avec quel-

ques chances d'efficacité certaines techniques pédagogiques (travail en groupes, débats dans la classe, mise en place de contrats...).

Mais cette 2ème année ne doit pas être limitée à ce stage en responsabilité qui va mobiliser la plus grande partie de l'énergie du stagiaire. Il y a encore la place pour poursuivre la formation en mathématiques, peut-être en vue d'élargir la culture du futur enseignant à des domaines qui n'ont pas fait l'objet de ses études, intégrant histoire, épistémologie. Il y a aussi la place de poursuivre la formation en didactique par l'expérimentation et l'analyse d'autres séquences dans lesquelles le temps de l'apprentissage, et la structure complexe de l'assimilation peuvent être l'objet du travail.

Les questions d'évaluation, aussi bien des compétences attendues que des comportements des élèves font aussi partie de la formation. Et si l'année se terminait par la mise au point d'un plan pluriannuel de formation continue dans lequel le développement de connaissances plus théoriques en didactique aurait sa place, il me semble que le pari de la professionnalisation serait gagné, sans pour autant préjuger des réussites ou échecs des futurs enseignants dans l'exercice d'un métier de plus en plus complexe et difficile, et où la didactique n'est qu'un des éléments permettant de mieux comprendre et peut-être mieux orienter le comportement des élèves en vue de leur réussite.

- Quels contenus pour cette formation en didactique ?

Éléments pour un débat.

Le deuxième chapitre du rapport BANCEL pose la question de l'articulation théorie-pratique.

Comment aborder le problème de cette articulation en formation initiale ?

Il semble se poser en des termes contradictoires, tels que l'indiquent Annie et Robert Noïrfalise (2) :

« Proposition n° 1 : il est vain de vouloir proposer des modélisations des situations d'enseignement à des étudiants sans référence à des pratiques réelles, à des contacts effectifs avec le terrain. Sans cela, on risque par là-même de répondre à des questions que les étudiants ne se sont pas posées. »

Dans ce débat, ces deux auteurs avancent les remarques qui suivent :

« Il en est ainsi des questions portant sur la régularité des erreurs commises par des cohortes d'élèves qui conduit à chercher à « comprendre pourquoi certains élèves ne comprennent pas » sans référer à des théories naïves et inopérantes des échecs et des réussites. Il en est ainsi de questions portant sur la construction du sens de concepts mathématiques ; certains enseignants, dans des classes difficiles, sont parfois démunis et conduits à négliger le travail sur le sens d'un concept au profit d'aspects opératoires. Pour les enseignants que l'on rencontre en formation continue, ces quelques problèmes évoqués font partie du quotidien : la problématique des outils didactiques n'est donc pas à faire (le détour théorique n'est pas cependant sans poser de problèmes relativement à certains publics qui sont plus dans l'attente de réponses concrètes immédiates). »

Cette position peut conduire à penser qu'il conviendrait de retarder un apprentissage ayant pour objet la modélisation des phénomènes d'apprentissage en milieu scolaire, d'attendre en particulier l'expérience cruciale de la conduite d'une classe en responsabilité. On est ainsi amené à envisager surtout un enseignement théorique de la didactique en seconde année d'IUFM, le stage en responsabilité étant là pour valider les apports théoriques. On peut cependant imaginer une formation à la didactique en première année en se référant par exemple à des expériences possibles, autorisées par le contrat de formation (à ce titre les contenus et la forme du CAPES seront déterminants).

Cette première proposition vise à s'assurer que les concepts enseignés aient du sens pour l'étudiant. Cependant, on peut aussi développer une seconde proposition qui conduit à contredire la précédente et qui pourtant a également une légitimité didactique. »

Proposition n° 2 : il vaut mieux enseigner les concepts théoriques de la didactique en amont des premières expériences en responsabilité du futur enseignant.

Annie et Robert Noïrfalise ajoutent :

« En effet, l'approche des modèles théori-

ques nécessite une mise à distance du vécu professionnel quand celui-ci est problématique : or, le stage en responsabilité peut être problématique en ce sens qu'il convient pour un débutant, de trouver des réponses concrètes, et ne pouvant être différées dans le temps, à des problèmes très pratiques : construction de son cours, de batteries d'exercices, de situations, image de soi en tant qu'enseignant et assise de son autorité, gestion de sa responsabilité et surtout mise au point de ce que des auteurs comme Tochon appellent des « routines », c'est-à-dire des façons de faire la classe s'automatisant au fil des ans et contenant un répertoire de conduites souvent inconscientes et permettant à l'enseignant de prendre des décisions dans l'instantanéité du vécu scolaire quotidien. A ce titre ce n'est pas un hasard si on voit en formation continue peu de jeunes en-

théoriques. Cela risque d'autant plus d'être vrai qu'un modèle est nécessairement incomplet, n'est qu'un reflet local de la réalité et qu'ainsi il ne répond pas forcément à toutes les questions que peut se poser un jeune enseignant : que dire par exemple de l'autorité, de la peur d'être chahuté de certains débutants ou encore du thème de la liberté qui apparaît souvent comme une préoccupation éthique chez d'autres. Le caractère local d'un modèle n'en empêche pas la complexité : l'urgence de la situation professionnelle fait qu'il est difficile d'intégrer dans le temps matériel de l'action tous les éléments d'un modèle. Ce type d'argumentation conduit à penser à une intégration de référents théoriques en formation initiale, assez tôt, à un moment où l'étudiant est disponible à des constructions théoriques ; cela pourrait se faire en première année d'IUFM si les contraintes institutionnelles le permettent, voire même avant l'entrée à l'IUFM dans des modules de préprofessionnalisation (mais alors ceux-ci deviendraient de vrais modules de professionnalisation).»

Cette apparente contradiction nous appelle à revenir sur les objectifs assignés à une formation en didactique qui, dès qu'elle s'insère dans un cursus de formation initiale, est considérée comme théorique et non adaptée aux questionnements présusés des étudiants.

Quels objectifs pour cette formation initiale en didactique ?

Comme je l'ai déjà indiqué, il ne s'agit pas de former des didacticiens. Ce serait d'ailleurs une erreur de confondre professeurs de mathématiques et didacticiens. (La formation des didacticiens pose d'ailleurs d'autres problèmes : les DEA de didactique intervenant directement après la maîtrise de maths ne sont-ils pas prématurés, si l'on veut que les didacticiens des mathématiques soient aussi des mathématiciens, reconnus par leurs pairs ?).

D'autre part, il faut relativiser la place de la didactique dans la formation des maîtres, l'insérer à la fois dans une continuité et une diversité qui doivent faire la place à l'histoire et à l'épistémologie de la discipline, situer son statut entre connaissances et méthodes. De mon point de vue de formateur, la didactique n'a pas encore bien posé ces questions, au stade actuel du développement de ses recherches.



*Partie centrale
des stands.
Au fond, à gauche,
les IREM (ICME 7)*

seignants : on trouve en effet en stage de formation continue des enseignants ayant plus de trente ans, ceux qui ont routinisé d'une certaine façon leurs pratiques et qui peuvent avoir alors une position plus réflexive sur leur métier.

Un deuxième argument est que l'étudiant, dans la définition du contrat régissant son rôle à l'université, est dans une logique d'apprentissage de modèles théoriques ; le praticien débutant est dans une logique d'action (on peut penser d'ailleurs que l'étudiant de deuxième année à l'IUFM attendra une aide concrète relevant de cette logique). Cette logique de l'action dans l'immédiateté de la vie professionnelle, si elle a le mérite de mettre au contact de la réalité professionnelle, est ainsi peu propice à la distanciation nécessaire pour un apprentissage de modèles

Je résume donc ici quelques objectifs qui se dégagent aujourd'hui :

Un premier objectif est donc de prendre le relais de la préprofessionnalisation en DEUG : sensibilisation au fonctionnement du système éducatif, orientation des étudiants, formulation de questionnements relatifs à l'apprentissage, pour aborder, dans cette perspective, les questions d'enseignement de la discipline : en l'occurrence des mathématiques.

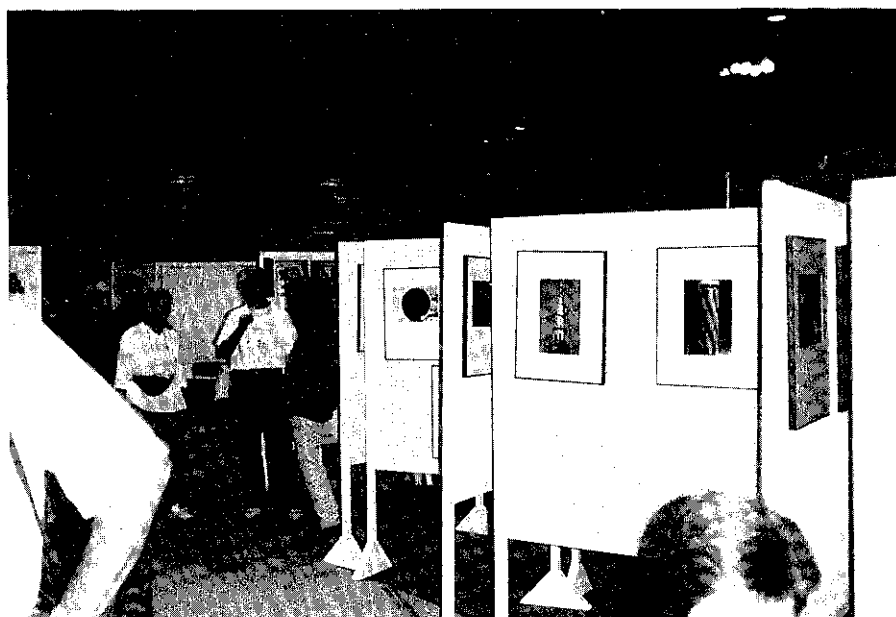
Un deuxième objectif est de permettre, dans le cadre de l'enseignement universitaire, de vivre un autre style pédagogique. On dit beaucoup que le futur maître aura tendance à reproduire dans sa pratique le style pédagogique qu'il aura « subi » lors de ses études universitaires : en réalité, massivement, le cours magistral suivi des applications.

Un travail de réflexion sur l'enseignement des maths, basé sur des hypothèses constructivistes, ne peut lui-même se développer de manière magistrale : travail en ateliers, études de documents suivis de questions de lectures, illustration permanente des questions d'enseignement abordées par des références aux contenus du second degré ou des cours universitaires, y compris de la licence, relations avec l'observation de classes...

Ce vécu devrait aboutir (et les interviews des anciens étudiants me renforcent dans cette conviction) à une plus grande facilité ultérieure à se libérer du schéma magistral, pour se lancer dans un enseignement basé sur l'activité mathématique des élèves.

Un troisième objectif est de donner des éléments de base : concepts, vocabulaires associés, exemples et références, permettant de situer et formuler des questions relatives à l'enseignement des mathématiques et aux comportements des élèves.

Ces questions peuvent être issues du vécu des étudiants, filtrées par leurs systèmes de représentations, ou issues de l'observation de classes ou encore de leurs pratiques empiriques de transmissions (cours particuliers par exemple). Car sur ces questions, aussi, ils se sont fait des conceptions.



*L'exposition espagnole
"Art et Maths" (ICME 7)*

Un quatrième objectif : faire évoluer ces conceptions.

Cela est possible, et même spectaculaire à ce niveau. Il faudrait plus de temps pour en examiner les ressorts.

Mon interprétation actuelle est que ces conceptions relativement peu stables, se sont constituées pour apporter des éléments d'interprétation à des questions encore naïves, peu formulées, dans une approche non systématisée. Dès que l'on s'engage dans l'examen d'outils théoriques d'analyse, ces questions sont reformulées et en appellent d'autres plus précises, plus pertinentes. Alors les conceptions évoluent, le système de représentations du métier d'enseignant se réorganise.

Un cinquième objectif : provoquer la demande de formation professionnelle, qui viendra ultérieurement dans les 2 années d'IUFM et au cours de la formation continue en liaison avec l'expérience professionnelle.

Pour cet objectif, je garantis qu'il est atteint. La pression, le désir d'approfondir sur des bases plus systématiques les connaissances abordées sur les phénomènes d'enseignement et d'apprentissage, s'expriment très spontanément et largement.

Pour résumer ces objectifs, je dirai qu'à ce niveau de la formation, il n'est pas souhaitable de vouloir apporter des réponses, dont on sait d'ailleurs qu'elles ne sont pas univoques ni toujours transférables, à des questions ainsi reformulées.

La formation professionnelle doit être con-

que non comme un apport dogmatique de connaissances en didactique ou en psychologie cognitive, mais comme des outils d'analyse, parmi d'autres, permettant au futur enseignant de se construire lui-même sa compétence et d'apporter lui-même ses réponses en termes de pratiques pédagogiques adaptées aux situations qu'il doit être à même d'analyser de manière pertinente.

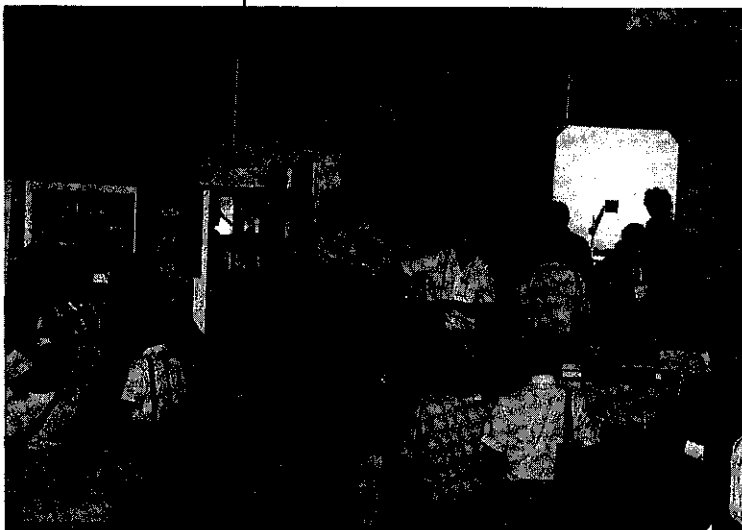
- Quelle stratégie ?

Michèle Artigue (actes de l'Ecole d'Eté de Didactique des mathématiques 1991 (1) propose une stratégie mise en œuvre en maîtrise à Paris :

Celle-ci consiste, à partir d'une question de mathématiques, à développer un travail approfondi de nature historique, épistémologique et didactique. Les concepts de la didactique s'introduisent alors naturellement sans que soit recherché à leur égard un exposé théorique général. Mon expérience à Besançon est diffidente, bien que je n'aie pas d'idées préconçues (1). La stratégie que j'y développe donne également d'excellents résultats si l'on en juge par la qualité des mémoires rédigés et soutenus par les étudiants : description «théorique» des concepts de base de la didactique des mathématiques (hypothèses constructivistes, rapport au savoir, transposition didactique, théorie des situations, contrat didactique, obstacles, évaluation), accompagnée de lectures d'articles permettant d'en situer leur exploitation, observations de classes et mémoires conduisant à la formulation, en termes adaptés, des phénomènes observés et analysés si possible, donnant du sens aux éléments présentés.

Zoom sur les IREM
(ICME 7)

32



Ces deux stratégies, aussi intéressantes l'une que l'autre pourraient faire l'objet d'une étude systématique quant à leurs retombées sur la formation.

- Effets sur la formation

Il y a des effets observables immédiatement, des effets inobservables mais explicites dans les déclarations et sans doute des effets à long terme.

Quelques remarques sous la forme de réponses à des remarques entendues ici et là :

1 - Le temps qu'ils passent à cette U.V., ils ne le passent pas à faire des maths, ce qui est catastrophique vu leur niveau.

50 heures de plus en licence de maths (sur les 500 qu'elle comporte) ne changent pas grand chose à la situation.

Au contraire, dans ces 50 heures, ils font des maths autrement. «A quoi sert d'empiler les théorèmes, si on ne sait pas s'en servir» disent souvent les étudiants.

La plupart déclarent qu'ils sont à saturation dans leur travail en mathématiques et que cette U.V. leur permet un «changement d'air». De fait, elle relance leur intérêt pour les autres U.V., leur rapport au savoir évoluant, ils travaillent un peu différemment. On en observe surtout les effets lors de la préparation au CAPES.

2 - Leur niveau en maths ne leur permet pas de comprendre les questions d'enseignement.

On se trompe sur le «niveau». Les enseignements de licence se situent tous à la limite de l'efficacité des connaissances antérieures. Placés dans des conditions d'apprentissage difficiles, dans un temps condensé, les étudiants s'y révèlent maladroits, y compris sur des terrains qui devraient leur être familiers.

Le travail de préparation du mémoire les place dans un autre contexte, où ils prennent un peu plus de temps pour réfléchir, et les productions sont alors de grande qualité.

On peut dire aussi qu'ils sont plus motivés pour ce travail de type nouveau, qu'ils investissent plus d'énergie.

J'en veux pour illustration cette répartie d'une étudiante à l'objection précédente : «Croyez-vous que le samedi matin de 8 h

à 9 h 30, au lieu de mes observations de classe, je serais en train de faire des maths ?».

3 - Sans expérience professionnelle, les questions de didactique ou d'épistémologie ne peuvent avoir de sens. Cette initiation théorique ne peut déboucher sur un véritable savoir, elle peut même donner une fausse idée de la manière dont les questions se posent réellement.

Ma réponse est complexe. Je la résumerai en termes de contrat didactique, comme me l'a suggéré l'une des étudiantes.

«En licence, on est encore là pour apprendre, et la théorie fait partie du contrat. C'est vrai en topologie ou en intégration. Cela ne gêne personne de découvrir qu'en didactique il y a aussi des mots nouveaux, des concepts abstraits. La règle du jeu étant de les mettre en réserve pour les applications ultérieures».

En fait, sans se faire d'illusion sur ce qui est réellement observé, les stages dans les classes viennent donner un certain sens à ces concepts. Cela pose le problème de la formation des professeurs d'accueil (animateurs de l'IREM et proches).

Mais je pense aussi que cette sensibilisation aux questions d'enseignement des mathématiques ne débouche pas en elle-même sur un véritable savoir, ni en didactique, ni en termes de compétences professionnelles pratiques. Ce n'est pas l'objectif.

Par contre, elle débouche sur un autre regard sur les élèves. Pour illustrer cela, je livrerai cette appréciation unanime : «On ne s'imaginait pas à ce point l'importance des erreurs des élèves et de leur analyse».

C'est dans le traitement de l'erreur que l'impact de cette formation est sans doute le plus évident. Cet autre regard sur les élèves a été remarqué, lors des épreuves de CPR, par notre IPR : «On repère les étudiants bisonins par le fait qu'ils s'intéressent aux élèves au moins autant qu'à leur propre exposé.»

4 - En entamant trop tôt ce type de formation, on déflöre le sujet pour les années où la dimension professionnelle aura véritablement sa place.

Tout prouve le contraire : demande renforcée de prolonger la formation professionnelle, ils sont même très étonnés d'apprendre que ce type d'U.V. ne fonctionne pas dans toutes les licences et déclarent qu'elles devraient être obligatoires.

De plus, le niveau de la licence me semble être le bon pour réaliser ce «pas de côté» par rapport à l'apprentissage des mathématiques.

Trop tôt en DEUG, les connaissances servant d'illustrations ne sont pas vraiment maîtrisées. De plus, le style de l'enseignement universitaire doit pouvoir être encore accepté : il faut être prudent avec les changements de contrat didactique. Enfin en DEUG, l'acquisition de techniques ne pose pas les mêmes exigences de prise de recul épistémologique.

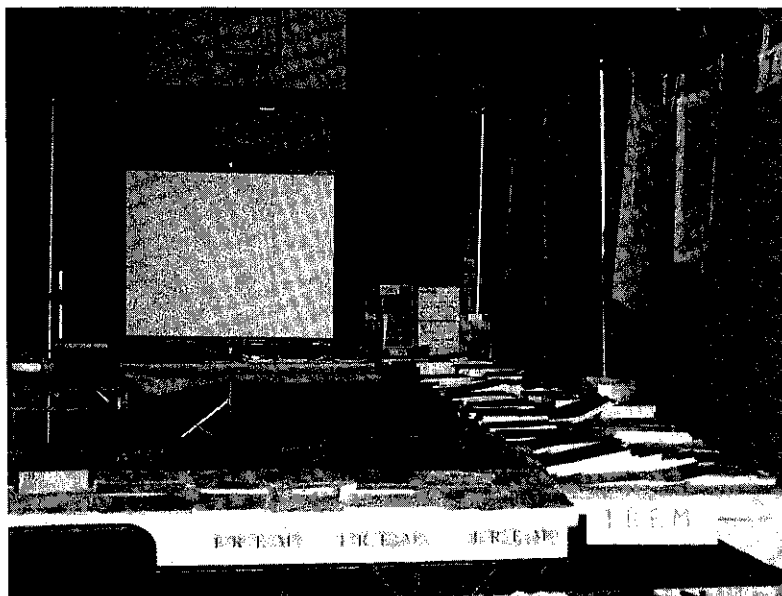
Après la licence, le contrat est très différent : on doit préparer un concours, avec ses règles du jeu. Il faut donc mettre en place un objectif précis.

La nouvelle épreuve à caractère professionnel va induire la possibilité de poursuivre, sous un angle limité, cette formation : préparation d'un dossier, à partir d'un autre type de présence sur le terrain ; préparation d'une séquence ; mise en œuvre d'une situation-problème par exemple, avec toute l'étude théorique, épistémologique, didactique et pédagogique l'accompagnant. Mais cela est encore du domaine des spéculations. Cependant, le mini-mémoire de licence permettra la mise en place de méthodes de travail par rapport à l'usage de la bibliographie, au traitement des observations, à la rédaction de synthèses.

Enfin, au niveau de la 2ème année IUFM, la demande est beaucoup plus pragmatique.

Nous y sommes confrontés dans les IREM, comme à Besançon, auxquels sont confiés les compléments de formation de ce niveau : Appel à des «trucs» pédagogiques, des recettes immédiates (car la classe en responsabilité exige des réponses), dans le meilleur des cas, des ingénieries toutes construites : l'activité clés en mains en quelque sorte.

Gardons nous de répondre à cette attente, mais il faut reconnaître que l'accompagnement de formation à ce niveau est grandement facilité si celle-ci a démarré deux ans plus tôt.



Les IREM lors des Happy Hour (ICME 7)

Conclusion

Je dirai que cette «innovation» dans le cursus universitaire peut servir à l'avancée des réflexions sur la formation professionnelle.

J'en ai souligné quelques avantages et prouvé la faisabilité.

Elle souffre aussi de défauts évidents : pas d'intégration réelle avec le reste des enseignements universitaires, rupture de contrat par rapport aux pratiques antérieures, apports théoriques insuffisants s'il ne sont pas poursuivis dans les années ultérieures.

Cependant, son impact sur les pratiques me semble réel.

Je l'illustrerai par cette anecdote, en attendant que de véritables recherches se développent sur ce sujet :

Il s'agit d'une étudiante s'étant particulièrement manifestée dans l'UV de «didactique» par un intérêt soutenu et un excellent travail au niveau de son mémoire (sur «pratiques pédagogiques et échec en mathématiques»). Arrivée en CPR, elle prend sa classe de seconde en responsabilité, après une année de préparation au CAPES de laquelle était exclue toute référence didactique.

Pendant les 3 premières semaines, elle a «balancé» un cours magistral, illustré par de simples exercices d'applications ; tout en se désolant des difficultés rencontrées par les élèves.

Son tuteur lui a été désigné tardivement, leur premier contact fut fait à l'occasion d'une activité en seconde, à partir d'une situation - problème suivie d'institutionnalisation.

Ce fut, dit-elle, comme un déclic, se souvenant d'un seul coup qu'elle avait analysé en didactique ce type de pratique, et même observé une classe dans ce cadre.

Il a suffi que la conviction s'installe qu'elle était également capable de faire ce choix pédagogique, pour que sa pratique change radicalement, ainsi que ses rapports avec les élèves.

Documents exploités :

1) Introductions au débat sur les rapports entre IUFM et didactique (Michèle ARTIGUE et Michel HENRY : actes de l'école d'été de didactique 1991).

2) Formation professionnelle initiale des enseignants du second degré en mathématiques : le lien théorie pratique professionnelle, un paradoxe ? (Annie et Robert NOIRFALISE, actes de la commission inter IREM université du 6/04/91 édités par l'IREM de Paris VII, cahiers n° 3).

3) Rôle et objectifs d'une UV de sensibilisation à l'enseignement des mathématiques en formation initiale, au niveau de la licence (Michel HENRY, actes de la commission inter IREM université du 6/04/91 édités par l'IREM de Paris VII, cahiers n° 3).

4) Fonctionnement d'une UV de didactique (Michel HENRY, exposé au séminaire national de didactique du 27 octobre 1991).

5) Plan de présentation de la didactique, thèmes et titres de mémoires et bibliographie de l'UV de didactique de Besançon.

6) Didactique des mathématiques : une présentation de la didactique en vue de la formation des enseignants (Michel HENRY : exposés de l'UV de didactique rassemblés en brochure éditée par l'IREM de Besançon).

7) Plan de formation des deux années de l'IUFM de Franche-Comté.



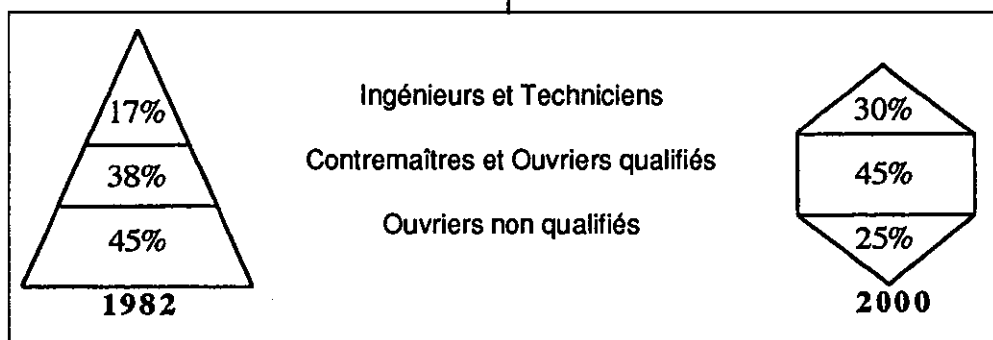
La frontière ... n'est pas nouvelle !

Jean AYMES - Montauban

Le franchissement bac - post bac n'est pas sans problèmes pour les jeunes, pour le système... éducatif, scientifique, social,... etc. Il y a là une frontière... pas nouvelle, nous avons été 25 pour examiner les contours, les obstacles, les ouvertures.

D'abord la pression des attentes supposées de l'économie

Un document d'information sur l'orientation de l'académie de Toulouse citant une source D.E.P. (au Ministère, Direction de l'Evaluation et de la Prospective) rappelle que l'évolution des emplois dans l'industrie est appelée, selon les prévisions, à un profond bouleversement que résume le schéma ci-dessous :



Cette prévision engage une exigence d'amélioration de la qualité des formations pour un nombre plus important de jeunes. Par exemple, il faut probablement au moins doubler le nombre d'ingénieurs et surtout considérablement le nombre de jeunes qui n'atteignent pas le niveau des terminales.

On connaît bien le manque d'ingénieurs, de professeurs, de chercheurs des disciplines scientifiques. Audi-math n° 1, le trop éphémère dossier des enseignants de

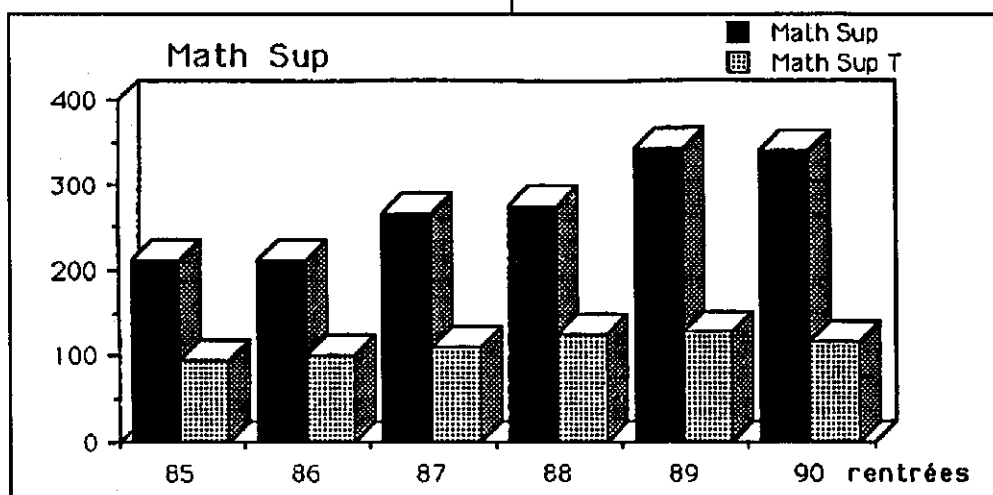
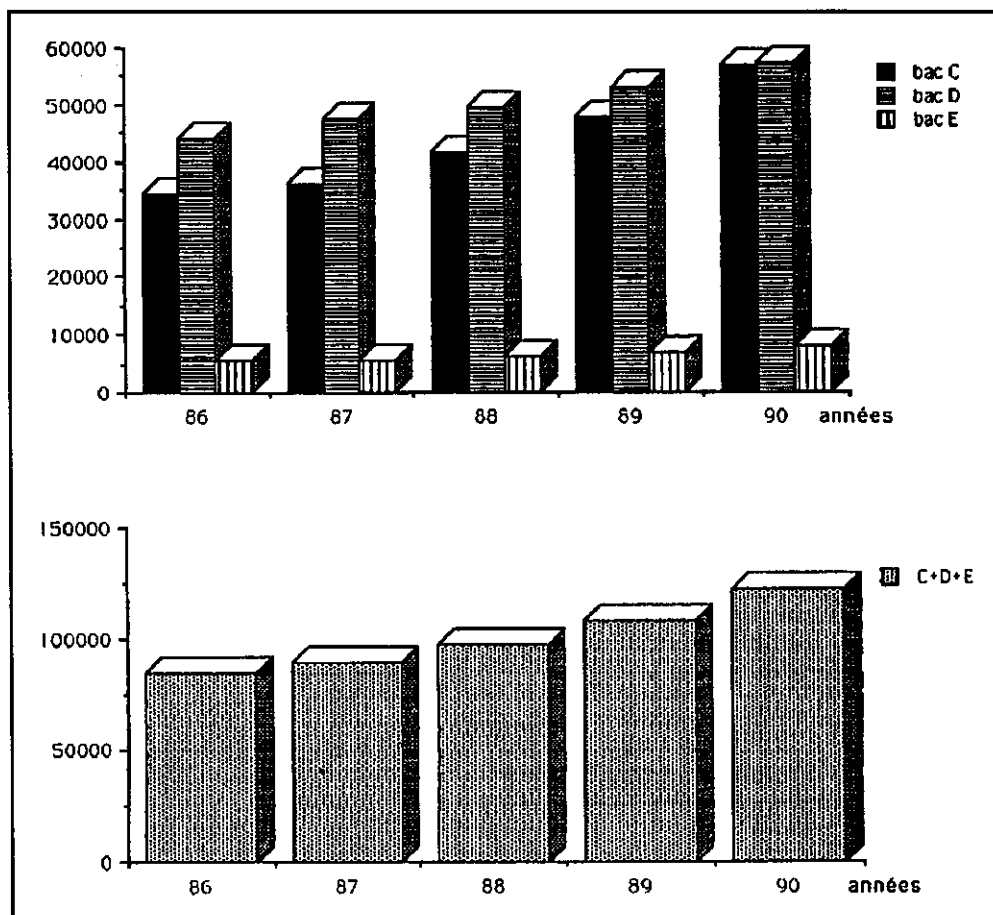
Mathématiques publié en septembre 1989 par le Ministère de l'Education Nationale a publié les pyramides des âges des professeurs de Mathématiques et celle des mathématiciens de l'enseignement supérieur. Elles indiquent les besoins très importants pour faire face à l'évolution de la démographie des lycéens et des étudiants et pour remplacer les enseignants retraités. Ainsi en 2000, il faudrait recruter 2 500 professeurs de Mathématiques et 5 000 en 2005. La situation est semblable pour les autres disciplines scientifiques.

La marche accélérée des effectifs de lycéens

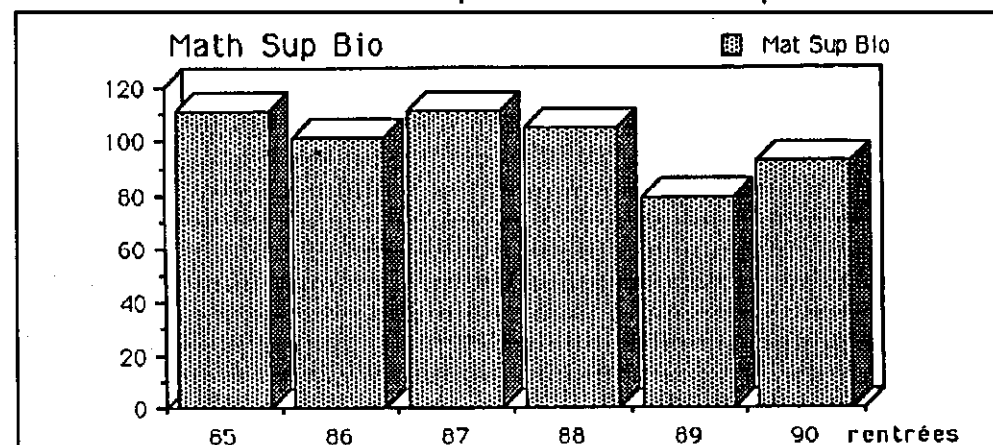
L'accès au niveau IV (c'est-à-dire le niveau des terminales Bac, B.T., B.Tn.) était de 20 % en 1966, en 1986 il a été de 45 %, l'évolution se poursuit... dans le cadre des objectifs fixés par la loi d'Orientation pour l'Education : atteindre 65 % d'ici 1994. Dans l'académie de TOULOUSE de 1985 à 1990 :

- les entrées en seconde IES augmentent de 27,1 %
- les entrées en première S augmentent de 46,2 %
- les entrées en terminale C augmentent de 37,8 %
- le nombre de bacheliers C augmente de 58,9 %.

Cette situation est semblable dans le pays, les graphiques ci-dessous des effectifs de bacheliers en témoignent.



Les effectifs en Bio Math sup tendent à se réduire un peu.



L'enseignement secondaire scientifique est donc résolument moins élitiste depuis quelques années : il y a d'avantage de bacheliers scientifiques, un équilibre entre le nombre de bacheliers C et le nombre de bacheliers D est en train de s'établir.

Quelques exemples de flux d'entrées dans les filières post bac pour l'académie de TOULOUSE (cf. page 36)

L'entrée en Math Sup évolue par sauts au gré de créations de divisions qui sont complètes dès leur ouverture.

A cela s'ajoute depuis ces deux dernières années une forte tendance à l'augmentation des recrutements d'élèves hors académie : d'une part du fait de stratégies de choix des élèves candidats qui hésitent de moins en moins à envisager de grands déplacements au profit supposé d'un lycée « plus performant », d'autre part du fait de l'élargissement de l'impact géographique des lycées par exemple du fait des effets de la publication de leurs résultats par la presse à grand tirage. Est-ce sans dommage pour tous ?

Elle aussi est fonction des créations de classes : la dotation en moyens précède l'affectation ; le nombre d'entrées est directement lié au nombre de places offertes.

Ceci souligne une question d'adéquation avec les objectifs de formation d'un plus grand nombre de scientifiques.

Les carrières du commerce ont visiblement plus d'attraits auprès de jeunes que les carrières scientifiques proprement dites, en particulier les carrières de l'enseignement et de la recherche : il ne s'agit pas là que de simples considérations intellectuelles !

Staps désigne la filière de formation aux métiers de l'Education Physique et Sportive.

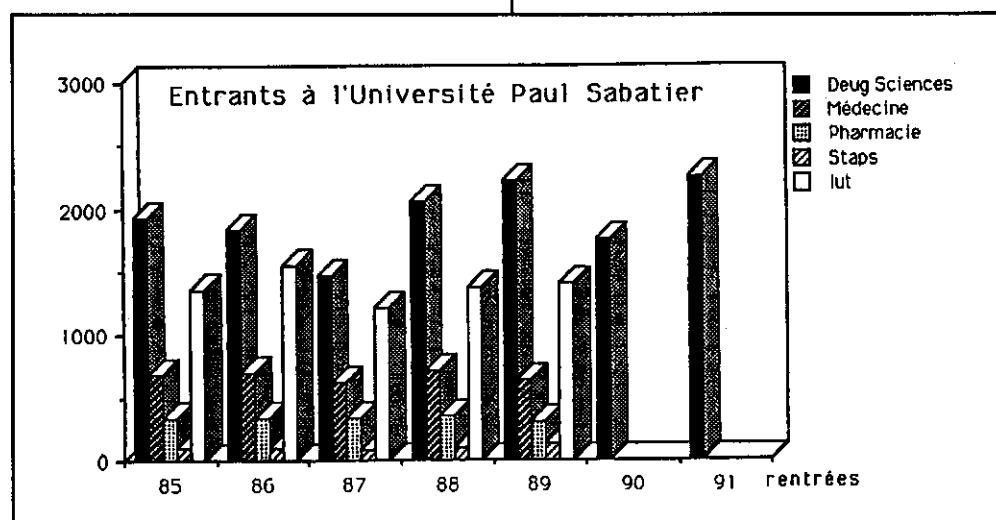
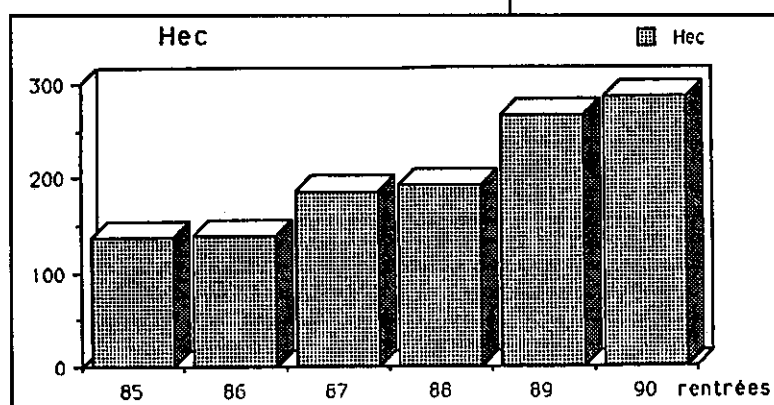
Les statistiques ne sont pas encore complètes pour les deux dernières années.

L'évolution des effectifs est ici beaucoup moins rationalisée que dans les classes préparatoires. Ceci est susceptible d'induire, à terme, quelques difficultés dans le recrutement des enseignants. On atteint à

l'université Paul Sabatier des effectifs peu conformes aux possibilités d'accueil (en locaux par exemple).

Mais les lycées sont tous différents

L'article premier de la loi d'Orientation



C'est la croissance des effectifs d'entrants en Hec qui est la plus forte sur la période.

indique que : « L'éducation est la première priorité nationale. Le service public de

l'éducation est conçu et organisé en fonction des élèves et des étudiants. Il contribue à l'égalité des chances». Simple rappel !

Une brochure du rectorat de TOULOUSE diffusée dans chacun des lycées de Midi Pyrénées présente le résultat d'une étude statistique du suivi de la cohorte des élèves entrés en seconde en 84-85 : ils sont suivis nominativement, ce qui permet de mieux percevoir leurs trajectoires scolaires et le fonctionnement de l'ensemble du système ainsi que de chaque lycée.

Présentons ici quelques données, sous des noms de créateurs illustres (ce ne sont pas des noms de lycées de l'académie) on voit se dessiner des profils de lycées assez différenciés.

Lycée	Effectif 2 nd e	Math Brevet	Term C en 3 ans	Bac C en 3 ans	Prépa
Vincent Van Gogh	337	11,2	37	34	4
Charles Baudelaire	257	11,1	20	17	4
Auguste Comte	175	11,2	17	14	8
Evariste Galois	211	12,8	38	34	6
Blaise Pascal	348	14,0	90	87	31
René Descartes	471	12,6	89	79	31
Académie	11 377	11,4	1 158	1 008	266

Il y a des différences dues à la carte scolaire spécifique de chaque établissement : il peut être en fait plus ou moins ouvert aux diverses possibilités d'entrée en classe préparatoire.

Mais y-a-t-il des stratégies implicites ou conscientes de prises en charge différentes d'un lycée à un autre selon les caractéristiques de sa population d'élèves ?

Au lycée, une formation différente, des élèves différents

Les programmes d'enseignement des Mathématiques sont renouvelés : en seconde en 1990, en première en 1991, en terminale en 1992.

Il s'agit d'un point de vue différent sur l'enseignement des Mathématiques :

La spécialisation est retardée par le main-

tien de la première S débouchant sur terminale C ou terminale D ; c'est une confirmation de la réforme du début des années 80 et le projet de rénovation des lycées à venir tend vers une unification des séries scientifiques y compris en terminale ;

La méthode axiomatique est abandonnée : la tendance amorcée en 82-83 est à cet égard confirmée ;

Mais on tente de renforcer l'activité scientifique des élèves en insistant sur un état d'esprit et des objectifs longuement décrits en préambule aux textes des différents programmes. En particulier les principaux moments d'une activité scientifique sont rappelés : formuler un problème, conjecturer un résultat, expérimenter sur des exemples, bâtir une démonstration, mettre en œuvre des outils théoriques, mettre en forme une solution, contrôler les résultats obtenus, évaluer leur pertinence en fonction du problème posé ;

Le formalisme mathématique est affaibli : le langage des ensembles est réduit au minimum, la notion de limite n'est pas formalisée ;

L'algèbre moderne (structures, linéarité), l'arithmétique, la construction des nombres réels ou complexes, la théorie des applications affines du plan ou de l'espace, les espaces probabilisés ne sont pas enseignés ;

La résolution des systèmes linéaires par la méthode du pivot de GAUSS ne fait que manifester un point de vue algorithmique qui ne se prolonge par aucun développement d'algèbre linéaire ;

La convergence des suites monotones bornées introduite en 82-83 est confirmée.

Ceci manifeste un certain essor de l'enseignement de l'analyse des suites aux lycéens.

Une évolution corrélée des épreuves du baccalauréat procure des sujets beaucoup moins formels depuis quelques années.

Avec des élèves plus nombreux à tous les niveaux, en particulier dans la réussite au bac C ; avec les exigences qui évoluent au lycée ; avec une concurrence plus grande entre établissements dotés de classes préparatoires ; avec un plus grand nombre de bacheliers D entrant à l'université ; avec des grandes disparités dans la perception de cette situation de la part des enseignants en post bac (la connaissent-ils assez ?), on retrouve une situation qui renforce semble-t-il les difficultés d'insertion des jeunes dans les études post bac. Après

la terminale C, c'est peut-être d'autant plus vrai que les études choisies sont plus scientifiques ce qui est presque un comble ! En tout cas un bachelier C qui fait du Droit réussit généralement très bien. Après la terminale D l'insertion dans les études scientifiques de l'université est-elle une gageure ?

Et les lycéens... qu'en disent-ils ?

Nous avons conduit une petite enquête auprès d'anciens élèves : loin d'avoir une valeur scientifique, elle peut simplement servir de révélateur... pour cerner ou confirmer quelques caractéristiques de la question. Ce n'est pas la stricte objectivité qui est ici rendue... on se contente d'une certaine écoute.

Voyons quelques questions :

— *Qu'est ce qui vous a le plus dérouté cette année ?*

« Tout le travail à fournir sans relâche, pas le temps de penser à soi ; la chute vertigineuse des notes (on travaille mais pour quels résultats !!! ?) » Véronique (Math sup).

« L'organisation du travail à l'université » Jean-Pierre (Deug A).

« Finalement c'est la similitude avec le lycée qui m'a le plus surprise » Pascale (Math sup).

« D'être seul à Rouen ! » Patrick (Insa).

Donc les formes du travail, pour des raisons distinctes en prépa., à la fac. (avec l'importance du suivi pour les prépas), puis le changement de situation relationnelle ou sociale.

Véronique, Pascale sont en Math Sup ; sait-on assez combien le pourcentage de jeunes filles faisant des études est comprimé au fur et à mesure du déroulement du cursus ? Dans l'académie de TOULOUSE, il y a plus de 60 % de filles en seconde IES, puis 47 % en première S, moins de 40 % en terminale C, une nouvelle réduction se produit encore dans le post bac. Il n'y a aucun progrès récent puisque l'ouverture de la filière scientifique semble beaucoup plus profiter aux garçons.

— *Qu'est-ce qui vous a le plus surpris ?*

« Le niveau de l'évaluation » Jean-

Christophe (Hec), Véronique (Math sup). « Beaucoup trop haut à mon avis (si les notes ne sont pas remontées d'ici la fin de l'année, 20 % seront admis !) » Marie (Deug Mass).

Avec les professeurs, « le dialogue est assez restreint après le cours » Sandrine (Deug A).

« Les méthodes pédagogiques sont différentes de celles du lycée. Souvent le professeur arrive dans l'amphi, « récite » son cours sans se soucier d'avoir été compris, et s'en va. De plus certains cours sont peu clairs, sans plan, sans lien entre les idées. « Cependant, il y a aussi des professeurs qui font un cours très clair et expliquent en détail ce qui peut paraître abstrait, qui cherchent vraiment à « faire passer » leur cours » Jean-Pierre (Deug A).

« On passe parfois 2 h à copier des choses qu'on ne comprend pas ; ne pas s'imaginer que le contact est impossible avec les profs. Il est vrai qu'il est un peu plus difficile. » Karine (Deug A).

« La plupart sont chercheurs et maîtrisent leur science, d'où dénigrement systématique des ignorants que nous sommes » Patrick (Insa).

Ici la question de l'évaluation : à vrai dire un point sensible de la difficulté d'insertion en classe préparatoire ; or l'évolution même de l'évaluation au lycée qui prend une autre direction pourrait bien, si rien n'est envisagé, aggraver le problème. Comment gérer trois facteurs contradictoires : une évaluation continue en terminale dont le but est de produire des dossiers de candidatures, une évaluation sommative au baccalauréat donnant des notes avantageuses pour un nombre important de jeunes (voir les moyennes académiques au bac C) et une évaluation en post-bac qui repose sur des critères tout à fait différents ? L'article de Claude PARISELLE dans le bulletin APMEP n° 379 apporte d'intéressantes suggestions.

La remarque de Marie vaut par ce qu'elle souligne comme capacité à prendre de la distance : elle prend conscience d'un certain changement dans le contrat d'évaluation avant et après le bac. Comment accompagner les jeunes étudiants dans ce cheminement, pour prévenir des abandons en début d'année ?

La forme des cours est souvent signalée : les jeunes étudiants regrettent parfois la

froideur dans la communication des connaissances, or le savoir lui-même est très désincarné par rapport à ce qu'on a dit des contenus enseignés au lycée. Il n'y a pas de transition pédagogique assez assurée entre le lycée et le post bac.

— *Avez-vous trouvé une différence entre les méthodes pédagogiques au lycée et dans les études que vous suivez ?*

«Grande, au lycée on nous aide davantage, on nous soutient» Sandrine (Deug A).

«Grande, les profs ne sont plus là pour nous faire comprendre leur cours mais pour le transmettre» Nicolas (Deug A).

«Les méthodes sont peu différentes de celles utilisées au lycée ; il faut dire que nous sommes toujours dans un lycée, encadrés par des profs qui en fait s'occupent beaucoup de nous ; le contenu des cours est assez différent ; par exemple en math, nous démontrons toutes les formules que nous utilisons, ainsi nous faisons beaucoup de théorie, ce qui est très abstrait et donc gênant (conclusion tout à fait subjective !)» Sylvie (Hec).

Là aussi la différence entre prépa et fac est sensible : la relation pédagogique en prépa est plus proche du style lycée. Mais la transposition du savoir fait difficulté. L'évolution des enseignements au lycée va à contre sens, l'abandon de la méthode axiomatique et la réduction du formalisme mathématique ne garantissent plus des formes suffisantes de préparation à ce qui va venir après le bac. C'est un point important du passage de la frontière... comment aider les jeunes à franchir l'accès aux mathématiques plus formelles ? il ne faut plus éluder cette question.

— *Estimez-vous que l'enseignement secondaire (collège et lycée) vous a préparé aux études ?*

«Un peu» Jean-Christophe (Hec), Véronique (Math sup).

«Beaucoup, pour les méthodes de travail» Sandrine (Deug A).

«A peu près, sur le plan des connaissances ; sur le plan des méthodes de travail, je crois que l'on n'insiste pas assez sur leur importance» Jean-Pierre (Deug A).

«A peu près, il faudrait peut-être éveiller plus l'esprit critique des élèves sinon la façon de travailler n'est pas si différente,

bien que plus intensive» Pascale (Math sup).

C'est l'insistance sur les méthodes qu'il faut noter, à condition de s'entendre sur le sens à donner à cette notion... il peut s'agir de capacités à gérer la résolution des problèmes. Faut-il encourager l'élaboration au lycée de situations problèmes permettant de mettre mieux en œuvre les moments de l'activité scientifique que les programmes évoquent ? C'est un peu ce que semble dire Pascale en insistant sur «l'esprit critique».

— *Où vous êtes-vous senti le moins bien préparé ?*

«En thermodynamique, c'est une matière nouvelle pour laquelle il est nécessaire d'utiliser des outils mathématiques que l'on ne voit que plus tard au 2e trimestre et que l'on n'a jamais utilisés» Jean-Pierre (Deug A).

«En probabilité, les cours sont faits comme si on savait déjà tout, lois variables aléatoires etc... et qu'on comprenait les choses supposées nouvelles immédiatement... De plus je ne «vois» pas les méthodes comme en géométrie» Marie (Deug Mass).

«A l'attitude des profs de la fac, rapidité des cours» Karine (Deug A).

«Les maths, on découvre en effet un nouvel aspect, en apparence très théorique, car souvent irréprésentable géométriquement et dont on ne connaît pas les applications pratiques» Sylvie (Insa).

«En philosophie» Jean-Christophe (Hec).

«En dessin industriel» Véronique (Math sup).

Ce n'est pas toujours des Mathématiques que provient la difficulté, mais ce peut être dans d'autres disciplines par un défaut dans l'utilisation des Mathématiques. Il y a, semble-t-il, en début du post bac des progressions qui font impasse sur les acquis (et non-acquis !) des élèves au lycée.

— *Ce que vous estimez nécessaire au lycée pour mieux réussir les études que vous suivez ?*

«Maîtriser l'abstraction mathématique (théorie des ensembles) mais aussi le calcul (binôme de Newton, intégration) et bien approfondir les probas (!) ; LA METHODE» Marie (Deug Mass).

«Savoir travailler intelligemment, savoir réfléchir, analyser (facile de donner des conseils !)» Karine (Deug A).

«Il faudrait être moins habitué à réciter et plutôt incité à réfléchir» Sylvie (Hec).

«Je crois que la liaison Lycée-enseignement supérieur devrait être plus marquée, plus solide, plus nette : d'abord en informant les lycéens sur l'enseignement supérieur en général puis en introduisant quelques notions de base utiles une fois qu'on est étudiant» Jean-Pierre (Deug A).

«En math, il faudrait peut-être une initiation à l'algèbre linéaire et notamment aux structures» Sylvie (Insa).

«D'avoir un bon mental et de ne jamais se décourager,... d'arriver très en forme à la rentrée pour en prendre plein la tête pendant un an» Patrick (Insa).

Les jeunes ne s'embarrassent pas de considérations contournantes : ils n'hésitent pas à souhaiter des anticipations pures et simples des programmes du post bac... c'est naturel et au fond une idée évidente. Mais la diversité même des filières rend le procédé difficile à appliquer. En outre quel serait son impact sur l'objectif d'un plus grand nombre de jeunes formés au niveau bac ?

Ils perçoivent aussi certaines injustices : la structure pédagogique de certains lycées leur permet de constituer des classes de terminales dans lesquelles le rythme et la puissance de travail autorisent effectivement de telles anticipations (dans ces terminales, on traite des pans entiers d'algèbre linéaire, de théorie des structures, ...). Or dans la majorité des classes de terminales, c'est pratiquement impossible sauf à renoncer à la formation du plus grand nombre.

A titre d'illustration éloquente, signalons le rapport du concours de l'EHEC, ESCP, EEA, ESCL.

L'épreuve de Mathématiques II du concours du 9 mai 1990 comprenait trois exercices : le premier étudie une suite de matrices 3×3 , le deuxième porte sur une étude de fonction, le troisième est un exercice de probabilités. Citons le rapport : «Les deux premières parties, dont la réunion n'aurait pas suffi à constituer une épreuve de baccalauréat dans la plupart des séries, permettaient pourtant d'arriver à une note honorable.» Comment mieux montrer à quel point les programmes des lycées sont ignorés ? Comprendra-t-on un jour qu'avec de tels implicites dans l'ac-

cueil des élèves, les chances de réussite des jeunes soient gravement altérées. Et dire que la loi d'orientation pour l'éducation parle «d'égalité des chances» !

La suggestion «bon mental» nous rappelle qu'il s'agit de jeunes en formation, dont l'avenir s'élabore. Que tenter pour activer et prendre appui sur les motivations ?

— *Quels conseils pour un futur étudiant ?*

«Renseignez-vous auprès des écoles de commerce, des entreprises, vous saurez si vous êtes motivés sinon changez de voie» Jean-Christophe (Hec).

«il faut s'imposer de travailler régulièrement» Jean-Pierre (Deug A).

«Bien décider et bien choisir son orientation post bac» Karine (Deug A).

Notons le conseil bienveillant du travail régulier, mais plus encore l'indication souvent répétée sur le projet et la motivation : Jean-Christophe a des stratégies d'élaboration de son projet personnel assez résolues.

Alors que tenter ?

— La piste de l'accompagnement des personnes

Renforcer l'information sur les cursus pour que l'étudiant se situe vis-à-vis de perspectives d'études ou de devenir humains possibles, on sait en particulier l'importance de rencontre avec des personnes qui peuvent faire modèle dans l'élaboration d'un projet.

Pour qu'il perçoive les nouveaux enjeux de ses apprentissages... c'est une aventure nouvelle qui commence.

Un délai d'adaptation est peut-être nécessaire : la rupture n'est pas toujours synonyme d'échec, les premières semaines sont une période particulière, on sait aussi qu'il y a parfois des déperditions non négligeables dans les apprentissages passés.

Tenter de gouverner le présent eu égard aux projets d'avenir, apprendre à relativiser, éclairer la diversité des parcours de formation pour atteindre le but souhaité.

La gestion du temps : motivation, projet personnel, image de soi.

Très peu est fait dans la première année du post bac pour prendre et charge ces

questions. il faudrait faire connaître les expériences réalisées ici ou là, les recherches faites et organiser des échanges.

Le suivi... qui échoue ?

Y a-t-il des étudiants à « haut risque d'échec » ? Cela peut-il être anticipé ? Leur devenir fait-il question ? En particulier si, comme on peut le constater, en changeant de voie de formation ils atteignent quand même leur but premier.

Le traitement des premiers résultats

Ils influencent fortement l'estime de soi, laquelle conditionne les résultats ultérieurs ; on peut peut-être aider les jeunes à faire face ? Former peut-il devenir prépondérant sur sélectionner ?

Des exemples sont signalés à propos des premiers devoirs en math sup : on peut tenter une éducation aux critères d'évaluation des concours.

— La piste des moyens de l'enseignement

«Le pari de l'enseignement supérieur de masse ne pourra être gagné que si les moyens nécessaires sont mis en œuvre, moyens matériels et humains mais aussi pédagogiques.» Rapport DA CUNHA, Juin 89.

La question du sens... comment vivifier le sens des mathématiques formelles ?

Les raccords avec le savoir antérieur : la connaissance révélée sous une forme achevée laisse l'étudiant deviner seul « le pourquoi et le comment ».

En post bac peut-on adopter des progressions peut-être moins linéaires... par des choix didactiques plus argumentés... il y a des recherches publiées.

La métaphore est-elle interdite ? Pour certaines formes de médiation vers l'accès au savoir.

Le fonctionnement des concepts dans des cadres articulés... c'est assez créateur de sens, or l'enseignement au lycée est une réserve considérable d'illustrations des grands concepts mathématiques, puiser dans ce vivier est une façon de démystifier bien des notions.

Le rôle des problèmes dans la construction du savoir mathématique...

Ces concepts théoriques d'où viennent-ils ? De brèves genèses peut-être utiles.

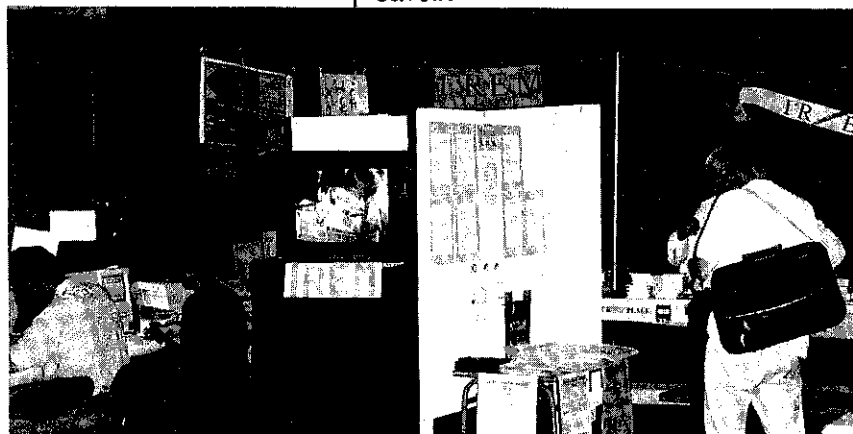
La notion d'objectif peut-elle être évoquée ?

Il faut bien faire un tri (« enseigner c'est choisir »), le niveau d'exigence est en question en fonction des buts de réussite clairement repérée : une phrase des programmes de lycée est inspiratrice : « La résolution d'exercices et de problèmes doit aussi jouer un rôle central dans les travaux proposés aux élèves. Pour leur choix, il est utile de se poser quelques questions. Font-ils appel aux seules capacités requises des élèves ? Sinon, les élèves disposent-ils des indications utiles pour les résoudre ? Leur contexte mathématique est-il compréhensible par un élève de la classe considérée ? Leur résolution a-t-elle valeur de méthode ? » L'appliquer en début de post bac est peut-être exagéré, ... mais l'implicite qu'elle contient en termes d'esprit de formation et de jaugeage des exigences est tout de même significatif !

L'appropriation du savoir comme « objet », comme « outil »... le temps de la réflexion sur ce qui est appris dans le but de développer l'aptitude à inscrire la connaissance en procédures de résolutions de problèmes... Savoir des mathématiques ce n'est pas seulement savoir comment les notions sont organisées les unes par rapport aux autres ou connaître des théorèmes avec leurs conditions de validité indépendamment de tout contexte. A trop mettre l'accent sur les fondements des mathématiques on risque de gommer leur fonctionnement dans différentes situations : application d'un savoir enseigné, capacité à imaginer et à mettre en œuvre une méthode de résolution.

Renforcer la préparation à de nouvelles méthodes de travail

La suggestion vaut en terminale aussi bien qu'en début de post bac.



Re-zoom sur les IREM (ICME 7)

D'autres formes d'enseignement

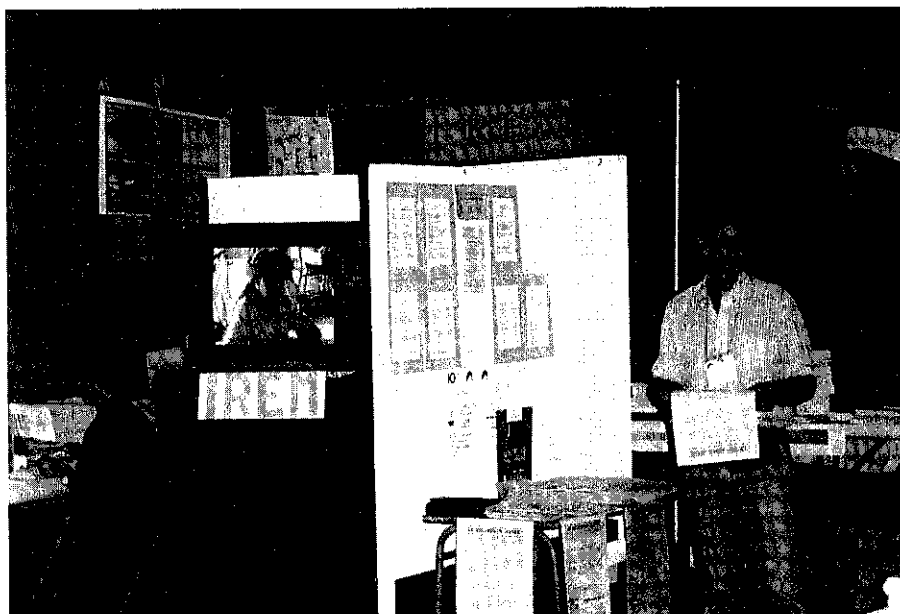
Permettre aussi à l'étudiant de pratiquer la démarche scientifique, comme on l'a déjà dit : formuler un problème, expérimenter, conjecturer, bâtir une démonstration, mettre en œuvre des outils théoriques, mettre en forme une solution, contrôler les résultats obtenus, évaluer leur pertinence en fonction du problème posé ; permettre à l'étudiant de montrer intérêt et ténacité dans le travail : participer à un débat scientifique, travailler en groupe, conduire un projet...

— Un enjeu qui vaut bien un travail de liaison

La séparation des corps enseignants du lycée et du post bac et la diversité des filières en post bac induisent un cloisonnement néfaste. Or on ne peut que gagner à connaître réciproquement les enjeux respectifs des formations mises en œuvre. Il y a lieu d'organiser les échanges pour de réelles assistances aux jeunes. Dans plusieurs académies des rencontres entre professeurs, des formations communes sont organisées : à TOULOUSE à l'initiative de Eric SERRA avec le relais des Inspecteurs Généraux de Sciences Physiques et de Mathématiques, à GRENOBLE à l'initiative de l'IREM. Ces rencontres ont au moins trois raisons :

- permettre de situer la question dans les orientations globales du système scolaire ; la formation d'un plus grand nombre de jeunes dans la filière scientifique ; cette vision globale est très importante pour asseoir l'action quotidienne des enseignants dans la classe, ... elle donne du sens (direction et signification) ;
- repérer concrètement les difficultés dans la spécificité académique pour examiner avec réalisme ce qui peut être fait autour des élèves qui passent ; c'est un rapprochement humain pour agir.
- engager des travaux de type pédagogique : il faut cultiver une connaissance réciproque des programmes, des exigences raisonnablement requises, des acquis et non acquis des élèves. C'est plus facile avec les professeurs de lycée ou de classe préparatoire qu'avec l'université ou les écoles qui recrutent directement après le baccalauréat.

La liaison lycée post bac doit être organisée même si la relation est difficile à établir. □



Les G.A. des IREM (ICME 7)

Bibliographie

Loi d'orientation pour l'éducation (14 juillet 1989), Journal Officiel de la République Française.

Rapport « DA CUNHA » sur l'enseignement des Mathématiques, juin 1989.

Objectif le bac, brochure rectorale d'informations statistiques sur le suivi de cohorte dans l'académie de TOULOUSE.

Orientation des bacheliers session 1990, région Rhône-Alpes, académies de GRENOBLE et de LYON, rectorat de GRENOBLE et de LYON (SAIO).

Audi-math n° 1, dossier de l'enseignant, Ministère de l'Education Nationale.

La transition terminale/enseignement supérieur, article de Patrick BARANGER, MAPEN de NANCY-METZ.

Quels mathématiciens pour l'an 2000 ? Mathématiques à venir, disponible à l'APMEP. Images et métaphores, article d'Annie MICHEL PAJUS, bulletin APMEP.

Diminuer le temps consacré aux corrections et le réinvestir autrement, article de Claude PARISELLE, IREM de GRENOBLE, dans le bulletin APMEP n° 379.

Un test de capacités en fin de terminale C (réalistes ou exagérées exprès), rédigé par Eric SERRA, lycée BELLEVUE à TOULOUSE, pour l'animation de la rencontre entre professeurs de terminale et du post bac.

Enseigner autrement les Mathématiques en DEUG A première année, principes et réalisations, commission Inter IREM Université.

Avec les contributions de Madame Claude PARISELLE (Grenoble), Jean PAPIN (Grenoble), Claude GACHET (Grenoble), Jean-Yves CHEVROLAT (Lyon) et Albert HUGON (Grenoble).

La micro-fusée, outil pédagogique pour un projet scientifique de l'école au collège.

Annick DELCOURT, Jeannine et Lucien OSOUF
Saint-Etienne du Rouvray



L'exposition "Esprit Informatique" (ICME 7)

Origine de l'action

Depuis plusieurs années, des mouvements associatifs d'Education Populaire, proposent l'astromodélisme à des jeunes dans le cadre des loisirs (clubs, centres aérés...).

Devant l'intérêt qu'il provoque, nous avons pensé pouvoir l'utiliser à des fins pédagogiques en l'incluant aux activités scolaires obligatoires.

Depuis 1988, au niveau de la seconde année des cycles 4ème-3ème en trois ans, deux des quatre heures hebdomadaires de mathématiques sont consacrées à un atelier micro-fusées encadré simultanément par deux enseignants, un professeur de mathématiques et un professeur de sciences.

Les activités qui lui sont liées permettent de traiter la moitié du programme de mathématiques et d'aborder de nombreuses notions de physique.

Les sciences expérimentales apportent, par rapport à l'enseignement traditionnel, une dimension nouvelle :

- le sens du concret,
- l'esprit d'observation,
- une attitude active.

On découvre soi-même des problèmes que l'on tente de résoudre. C'est une démarche différente faite de curiosité, d'initiative, de ténacité. La connaissance n'est pas apportée, on la construit par un jeu d'essais et d'erreurs.

Chaque élève peut élaborer un projet qu'il mènera à travers ses différentes étapes : conception, description, réalisation, vérification.

Les micro-fusées, de vraies «petites» fusées

Lancées sur une rampe, les micro-fusées, suivant le type de propulseur, atteignent des altitudes s'échelonnant de 50 à 250 mètres pour des masses variant entre 20 et 150 grammes. Leur vitesse, en fin de propulsion, est de l'ordre de 200 km/h ! A leur apogée un système de récupération est éjecté permettant un retour en douceur vers le sol, offrant ainsi la possibilité d'un nouveau vol, après échange du moteur.

Progression proposée au Collège

— Première phase :

«COMME ON VEUT !»

C'est la période de découverte. On construit un engin selon son imagination, sans contrainte technique. c'est la phase dite «sauvage» au cours de laquelle on abordera l'activité par son côté ludique et spectaculaire.

— Deuxième phase :

«ET SI L'ON ESSAYAIT DE COMPRENDRE ?»

Suite au lancement des fusées de la phase 1, les enfants sont amenés à remarquer que leur stabilité pendant le vol dépend probablement de nombreux éléments (par exemple, des ailerons placés vers l'avant perturbent la trajectoire).

On amènera progressivement le groupe à réfléchir sur la notion de «paramètre». On essaiera de mettre au point une stratégie qui permettrait de contrôler expérimentalement l'influence de quelques-uns de ces paramètres.

— Troisième phase :
«C'EST MA MICRO-FUSEE LA PLUS PERFORMANTE»

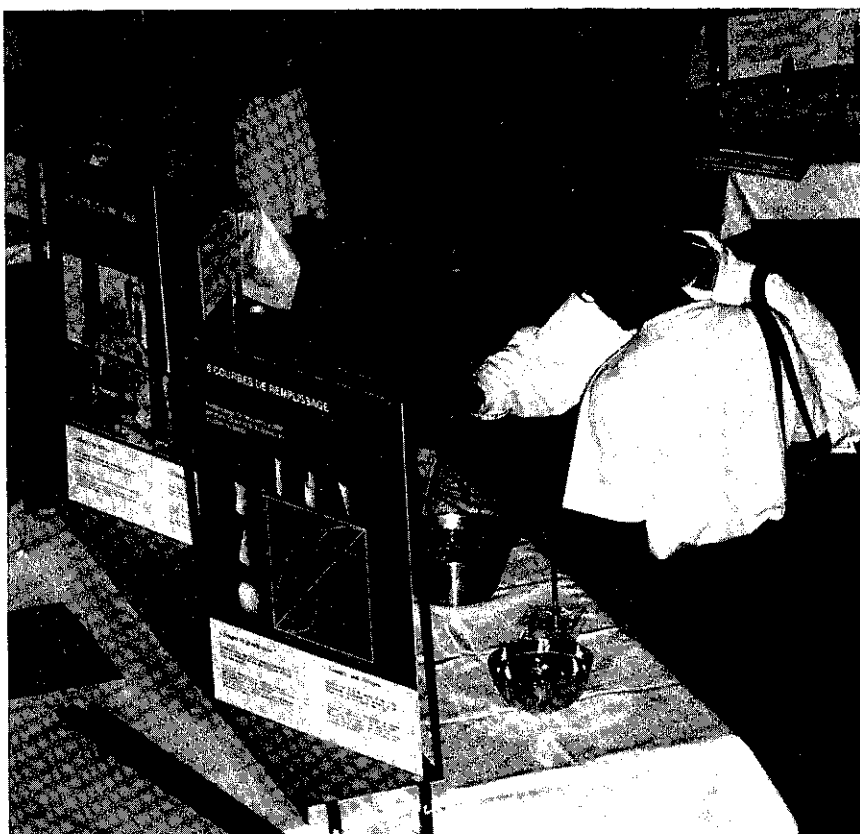
A la lumière des réponses apportées par les observations effectuées lors du second lancement on pourra dégager quelques consignes importantes à respecter dans la conception d'une fusée si l'on veut qu'elle ait un vol correct. Cette dernière phase s'attachera donc à faire que chaque enfant ait un projet, et qu'il le mène à terme, à travers ses différentes étapes (conception, étude de fiabilité, construction et lancement).

REMARQUE : Il est bien sûr possible, si les enfants sont très motivés, d'envisager une phase 4 «**ALLER ENCORE PLUS HAUT**», dans laquelle pourront être abordées les constructions de fusées à moteurs multiples ou bien de fusées à étages.

Mathématiques, physique et micro-fusée

Les activités liées aux micro-fusées ont permis de couvrir 50 % du programme de mathématique (usage des instruments de mesure et de dessin, usage de la calculatrice, calculs sur les angles, calculs d'aires, projections orthogonales, repérage d'un point dans un plan, relations trigonométriques dans le triangle rectangle, tracés à l'échelle, construction de tableaux et interprétation, gestion de données, constructions de graphiques, calcul littéral, utilisation de formules, règles de priorité et d'organisation d'un calcul, calculs prévisionnels, approximation décimale de quotients, vecteurs, utilisation de l'ordinateur, d'un tableur, établir et organiser une feuille de calcul...)

Un grand nombre de notions de sciences physiques ont pu être abordées (rappels sur les combustions, les gaz et leur structure moléculaire, pression d'un gaz, isoler un paramètre et le faire varier, notion de force, caractéristiques d'une force, forces appliquées à la fusée, masse et poids, centre de gravité, interactions, propulsion



par réaction, pesanteur, impesanteur, les satellites...).

L'exposition
 "Horizons mathématiques"
 (ICME 7)

Prolongements à l'Ecole

En classe de 3ème certains collégiens, ayant manifesté le désir de donner un prolongement à l'activité, ont adhéré, avec enthousiasme, à l'idée d'intervenir dans des classes élémentaires.

Ils ont ainsi participé en 1990 aux travaux d'un cours moyen et en 1991 à ceux d'un cours préparatoire. Pour 1992, une grande section de maternelle sera concernée.

Ces adolescents apportent un soutien technique dans la phase de conception des micro-fusées et une aide logistique lors des lancements en mettant à disposition tout un matériel qu'ils ont produit (poste de mise à feu, rampe, alidades pour estimation des altitudes atteintes...). Cet autre aspect de l'activité, très enrichissant, est valorisant.

A l'Ecole, l'expérience menée dans un cours préparatoire sur l'année 90/91 nous a montré que la micro-fusée constituait un centre d'intérêt très riche pouvant concerner aussi bien le français, les mathématiques, les activités d'éveil (physique, technologie, biologie, dessin, éducation manuelle...).



Des visiteuses passionnées
(ICME 7)

46

Les ateliers scientifiques

Depuis la rentrée 91 fonctionne au Collège, à titre expérimental pour l'Académie de Rouen, un atelier scientifique dans lequel on pratique également la micro-fusée avec des élèves volontaires de 4^{ème} et 3^{ème}. L'encadrement est assuré par deux professeurs de physique assistés d'un professeur de mathématiques. Celui-ci est amené à intervenir à chaque fois que cela s'avère nécessaire pour pouvoir poursuivre ou approfondir l'une des étapes du projet.

Jusqu'à présent les ateliers ne se concevaient que dans les domaines artistiques et littéraires. Espérons que leur ouverture aux sciences expérimentales se généralisera dans les Collèges, à l'heure où la physique disparaît des programmes de 6^{ème} et de 5^{ème} il est souhaitable que la Science ne demeure pas exclue de la Culture.



Conclusions

Grâce à cette activité valorisante (face au restant de la communauté scolaire), pratiquée dans une structure inhabituelle (deux enseignants en même temps dans la classe) nous avons pu faire aborder, à des élèves en difficulté, des contenus de physique et de mathématique qu'ils auraient probablement rejetés par le biais d'un enseignement traditionnel.

Si nous n'avons toutefois pas réalisé de miracle (hélas...), il faut cependant reconnaître que nous avons constaté chez ces enfants :

- une meilleure confiance en eux,
- l'acquisition d'habitudes de travail,
- une bonne intégration dans le groupe classe,
- une certaine complicité avec les enseignants...

Ces quelques points positifs nous permettent de vous encourager à essayer si, comme nous, vous vous sentez quelque peu démunis devant une classe pour laquelle le menu concocté ne semble pas éveiller beaucoup d'appétit...

Nous avons rassemblé dans une brochure d'une centaine de pages :

- des éléments techniques liés à la construction et au lancement,
- le descriptif des diverses activités menées depuis quatre ans dans le domaine de la micro-fusée au collège et à l'école,
- une liste d'adresses utiles, une bibliographie...

Nous la tenons à la disposition des collègues intéressés au prix de 55 F (+ 18 F pour envoi postal), chèque libellé à l'ordre de «FOYER COOPERATIF DU COLLEGE ROBESPIERRE», rue Jules RAIMU, 76800 SAINT-ETIENNE-DU-ROUVRAY.



Les mêmes passionnées (ICME 7)

Processus de vérification en situation de résolution de problème

COPPE - GUICHARD - Lyon

Nous présentons ici quelques résultats d'un travail de recherche, mené depuis quelques années, sur les processus de vérification chez les élèves de 1ère S. Pour le moment, nous utilisons les termes vérifier/vérification dans le sens courant donné par le Petit Robert, par exemple «examiner la valeur de quelque chose», «contrôler». Le problème des vérifications nous semble tout à fait crucial en mathématiques puisqu'il est étroitement lié au problème de la vérité et plus largement au contrôle de l'activité par l'élève.

Mise en place de la problématique

Avant tout nous nous intéressons à l'élève, face à un problème de mathématiques, dans différentes situations (exercice, devoir à la maison, devoir en classe, etc) qui a produit un résultat partiel ou final et qui entre (ou pas) dans un processus de vérification. Nous faisons l'hypothèse que cette attitude est rendue possible par l'existence de doute(s). Nous avons ainsi repéré trois facteurs qui engendrent ce(s) doutes(s) :

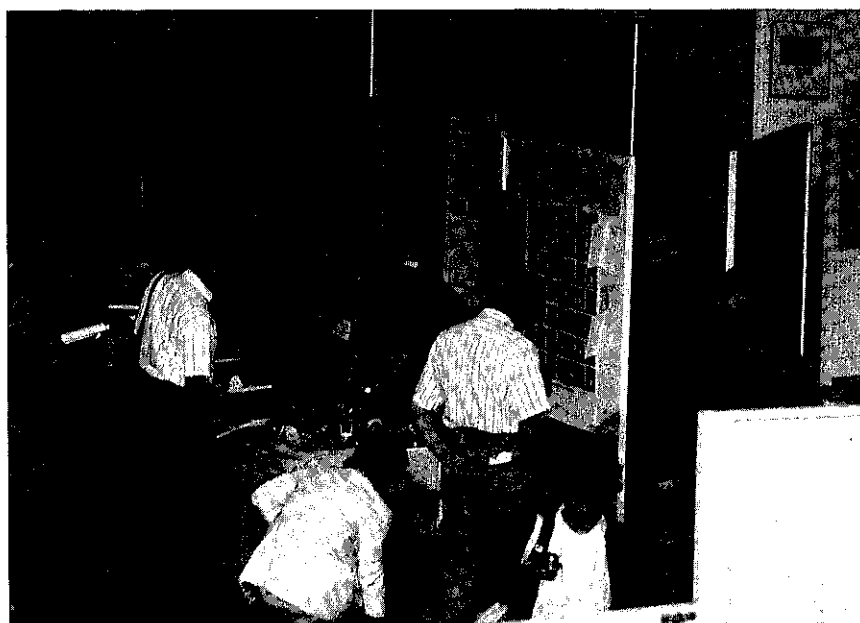
- la psychologie personnelle de l'élève
- l'allure du résultat
- la gestion du problème en terme de situation

A propos des processus de vérification nous avons cherché à savoir :

- quel intérêt l'élève a-t-il à vérifier ?
- le fait-il toujours ? sinon quand ?
- quels sont ces processus ?

Cette (ces) vérification(s) étant faite(s), cela peut engendrer :

- le rejet de la solution et (éventuellement) un retour en arrière si les conditions psychologiques, de temps, d'énergie, etc... le permettent,



— l'accroissement de la certitude ou de la vraisemblance et la production d'un résultat.

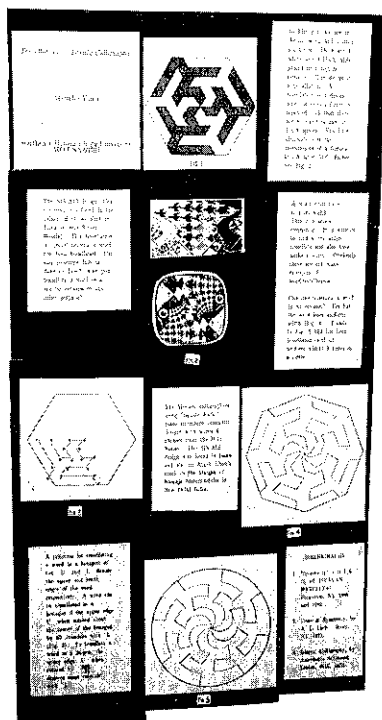
Nous mettons ici en évidence un travail privé de l'élève, auquel le maître n'a pas accès, en opposition avec un travail public, qui peut être la production d'une solution qui sera évaluée par le maître. Ajoutons que les contraintes dues à la situation influencent fortement ce travail privé.

Les différentes entrées dans le sujet

Pour affirmer cette problématique, nous avons exploré différents domaines, sachant que notre sujet principal reste l'élève :

- le savoir savant
- les enseignants
- les élèves en situation de recherche de problèmes
- les élèves en situation de devoir surveillé.

Le stand Femmes et maths (ICME 7)



Un des meilleurs
panneaux
des posters-sessions
(ICME 7)

Le savoir savant

Nous nous sommes appuyés sur les écrits de J. Hadamard et de A. Connes. Précisons que très peu de chercheurs en mathématiques ont écrit sur leur façon de chercher, et pour ceux qui l'ont fait, on peut penser que leur récit est reconstruit et déjà rationalisé.

Cependant, on peut noter un certain parallélisme entre l'activité du chercheur et celle de l'élève dans la distinction travail privé/travail public. Par contre, ce qui diffère c'est le contrat (produire des résultats valides pour la communauté mathématique ou pour le professeur qui évalue) ainsi que le statut de la démonstration (outil ou objet).

Les enseignants

A partir d'entretiens avec des enseignants nous avons pu mettre en lumière des pratiques très différentes au sujet de l'emploi professionnel des termes vérifier/vérification :

- non utilisation consciente et systématique
- emploi dans des cas précis
- intégration dans le cours.

Par contre, pour tous les enseignants, ces termes sont toujours associés à des expressions moins nobles, du point de vue mathématique, que celles associées à démontrer/démonstration.

Les élèves

1 - en situation de recherche de problème

A partir d'observations et d'analyses de binômes entrain de chercher un problème, nous avons mis en évidence des situations et des processus de vérification. Cela nous a amené à bâtir une typologie des processus de vérification qui, pour le moment, semble assez complète.

2 - en situation de devoir surveillé

Depuis quelques temps, nous nous attachons à des situations typiquement scolaires. Nous étudions donc les attitudes des élèves en devoir en classe (donc en situation d'évaluation) et pour cela nous sommes allés plusieurs fois dans une même classe de 1ère S ramasser copies et brouillons de tous les élèves après un devoir surveillé. Nous avons ensuite réalisé des entretiens en utilisant les techniques d'explicitation pour avoir accès au travail privé de l'élève. Cette étude est en cours.

Conclusions provisoires

Contrairement à de nombreux discours, nous pouvons affirmer que les élèves font des vérifications, mais celles-ci relèvent du domaine privé de la personne, donc ne sont pas accessibles aux enseignants, ce qui explique toutes les remarques à propos du manque de contrôle des élèves sur leur activité.

L'entrée dans un processus de vérification va de pair avec une attitude de doute.

Les élèves en difficulté, par contre, ne passent pas par une phase de doute (ou doutent de tout) et souvent ne vérifient pas. Un travail de recherche plus approfondi sur ce point nous semble tout à fait pertinent.

Il devient de plus en plus important d'étudier sur quoi portent les vérifications. Il y a là, semble-t-il, une différence très nette entre l'attitude de l'expert et celle de l'élève. □