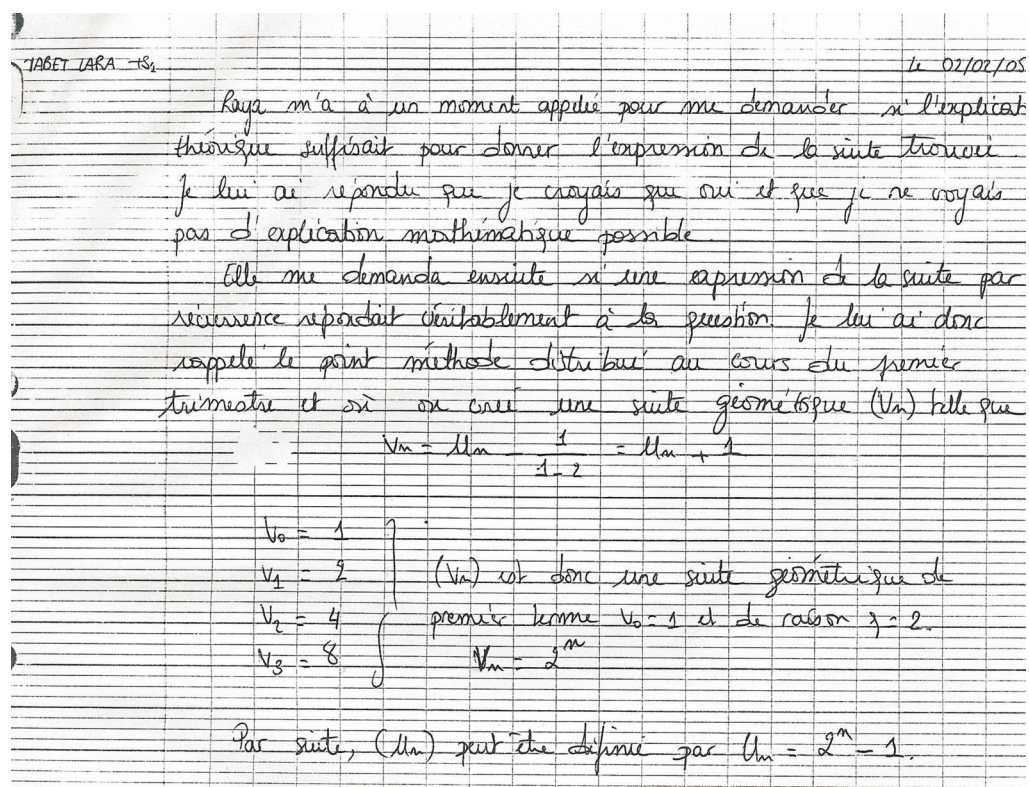


Sortons des sentiers battus



Avec un quadrillage et une équerre

Henry Plane

Résolution de l'équation $x^2 + px + q$ à l'aide d'un quadrillage et d'une équerre.
Précisons : une équerre à angle droit, comme le quadrillage.

Sur un quadrillage de centre O, situons les points A, B, P et Q tels que
 $\overline{OA} = 1$, $\overline{OB} = 1$, OA orthogonal à OB,
 $\overline{AP} = p \overline{OB}$, $\overline{QP} = q \overline{OA}$.

Cherchons alors à placer l'équerre avec son sommet de l'angle droit sur (AP), un côté passant par O et l'autre par Q.
 Si cela est possible, ce sommet M est tel que $\overline{MA}$ est racine de l'équation.

En effet, calculons OQ^2 de deux manières.
 $OQ^2 = (\overline{OA} + \overline{AP})^2 + AP^2 = (1-q)^2 + p^2$

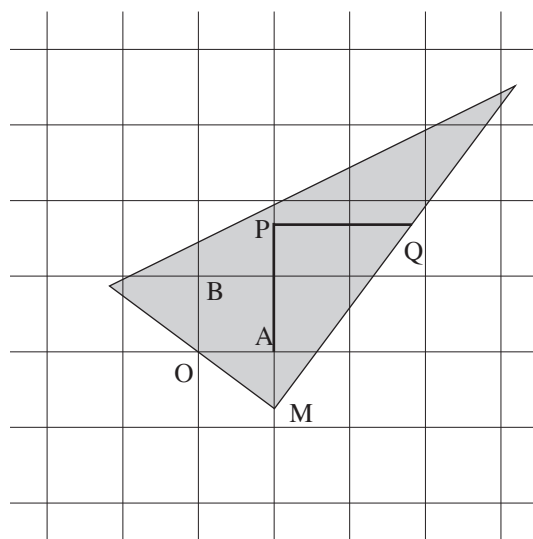


Figure avec $p > 0$, $q < 0$

Sortons des sentiers battus

$$\begin{aligned}
 \text{ou } OQ^2 &= OM^2 + MQ^2 \\
 &= (OA^2 + AM^2) + (MP^2 + PQ^2) \\
 &= OA^2 + AM^2 + (\overline{AP} - \overline{AM})^2 + PQ^2 \\
 &= 1 + AM^2 + (p - \overline{AM})^2 + q^2
 \end{aligned}$$

En égalant ces deux expressions, il vient :

$$\begin{aligned}
 1 + 2AM^2 + p^2 - 2p\overline{AM} + q^2 &= 1 - 2q + q^2 + p^2 \\
 \text{soit : } MA^2 + p\overline{MA} + q &= 0.
 \end{aligned}$$

$\overline{MA}$ est bien racine de l'équation étudiée.

Peut-être existe-t-il une autre position de l'équerre, autrement dit plusieurs triangles OQM rectangles en M et dont le sommet M appartient à (AP) ?

Discussion

Entre en jeu le cercle de diamètre OQ.

- Si O et Q sont de part et d'autre de la droite (AP) (q négatif), il y a deux intersections, donc deux racines.
- Si O et Q sont d'un même côté de (AP) (q positif), il n'y a intersection de (AP) et du cercle que si la distance de son centre Z à (AP) est inférieure à son rayon.

Distance de Z à (AP) :

$$\frac{1}{2}(OA + QP) = \frac{1}{2}|1 + q|$$

Rayon :

$$\frac{1}{2}OQ = \frac{1}{2}\sqrt{(1 - q^2) + p^2}$$

Il faut donc :

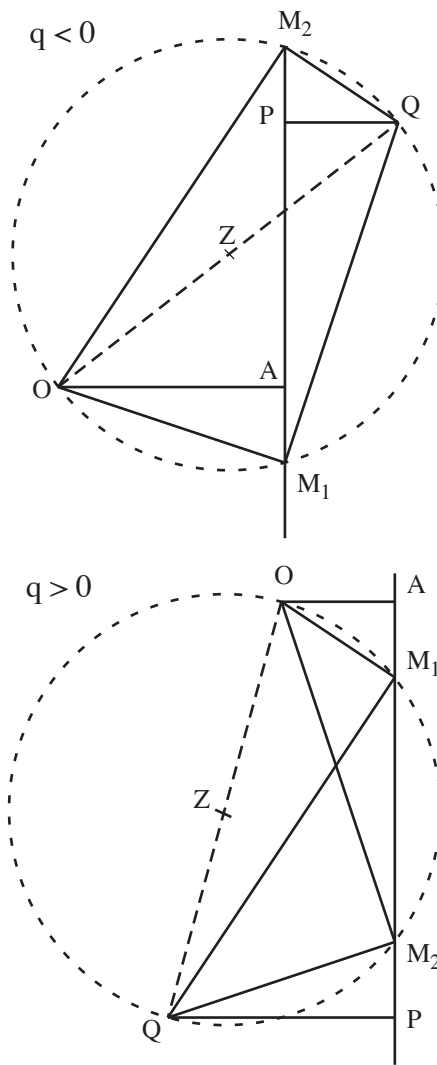
$$\frac{1}{2}|1 + q| \leq \frac{1}{2}\sqrt{(1 - q)^2 + p^2}$$

$$\text{ou } (1 + q)^2 \leq (1 - q)^2 + p^2$$

On retrouve bien $4q \leq p^2$.

Si vous vous croyez autorisé à user d'un instrument appelé « compas » et à condition de déterminer le milieu de [OQ], il suffira de tracer ce cercle pour obtenir les éventuels points solutions. Papier millimétré et bonne équerre donnent des approximations acceptables.

APMEP - PLOT n° 17



En ce qui concerne l'équerre à dessin, il convient de noter que son usage n'est pas très ancien car sa fabrication est assez délicate manuellement, son orthogonalité étant souvent mise en doute. L'équerre sert essentiellement à tracer des parallèles. Sa dénomination apparaît en bas latin — exquadra — en lien avec le carré. La notion d'orthogonalité chez les géomètres grecs s'adresse à ce qui se tient debout, droit, normalement sur un plan. Pour ce faire, Vitruve disposait d'un instrument d'une autre facture appelé « norma ».

L'outil à tracer le cercle peut être autre que celui à reporter des distances, lequel a donné son nom — cum passus — à notre instrument classique.