ACADÉMIE d'AIX-MARSEILLE

« Maison de la Presse »

Durant une semaine, une Maison de la Presse a relevé les données ci-dessous concernant la vente de trois quotidiens particuliers, La Provence (P), Le Monde (M) et Libération (L).

	lundi	mardi	mercredi	jeudi	vendredi	samedi
nb. de clients	875	802	947	784	847	904
La Provence	857	784	895	728	784	902
Le Monde	634	692	780	640	681	612
Libération	832	737	872	696	750	817

Sachant que chaque jour, chaque client a acheté 0, 1, 2 ou 3 de ces quotidiens et n'a acheté qu'un seul exemplaire du même quotidien,

a) est-on sûr pour certains jours qu'au moins 550 personnes ont acheté les trois ?
b) est-on sûr pour certains jours qu'au moins 700 personnes ont acheté au moins deux de ces quotidiens ?

SOLUTION

Il s'agit à proprement parlé de combinatoire booléenne ou plus généralement de programmation linéaire en entiers positifs ou nuls. La correction proposée ci-dessous ne se réfère qu'à de la réflexion et des connaissances élémentaires.

a)

Le nombre de clients ayant acheté *au moins* l'un des deux de P ou de M est égal à la somme du nombre de P vendus et du nombre de M vendus, moins le nombre de clients ayant acheté P et M.

L'étude sur une colonne suffit à expliciter la forme générale du raisonnement :
le lundi, ceux qui ont acheté P et M ne peuvent être au maximum que 634 et au minimum 857 + 634 – 875 = 616.

Pour la même raison, ceux qui ont acheté L et (P et M) ne peuvent être au maximum que 634 et au minimum 832 +616 – 875 = 573.

La forme combinatoire générale du raisonnement tient au fait que pour A_1, A_2 *deux parties de* E, *le tout de cardinal respectif* a_1, a_2, e,
de $\text{cardinal}(A_1 \cap A_2) = \text{cardinal}(A_1) + \text{cardinal}(A_2) - \text{cardinal}(A_1 \cup A_2)$,
il résulte que $(a_1 + a_2)$ '–' $e \leqslant \text{cardinal}(A_1 \cap A_2) \leqslant \inf(a_1, a_2)$,
(*où '–' désigne la soustraction dans* $\mathbb{N}$: x '–' $y = \dfrac{x - y + |x - y|}{2}$)

Situation qui s'étend à A_1, A_2, ... A_n *parties de* E *: le cardinal de* $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ *peut et ne peut que prendre les valeurs de l'intervalle :*

$$\left[(\Sigma a_1)\text{'}-\text{'}\ (n-1)e, \inf(a_1, a_2, \ldots a_n)\right]$$

b) Notons respectivement p, l, m et c les nombres d'acquéreurs de P, de L, de M et de clients (C) pour un même jour.

Dans notre cas, $m \leqslant l \leqslant p$ (et évidemment $\leqslant c$).

Ceux qui ont acheté (au moins) P et L peuvent et ne peuvent être qu'en nombre compris entre $(p + l)$ '–' c et l (cf. **a**)).

Supposons donc ce nombre fixé par une de ces valeurs q.

Le minimum recherché dans ce cas est donc supérieur ou égal à q.

Ce minimum I_q du nombre d'acquéreurs d'au moins deux de ces trois quotidiens sera alors atteint si un maximum d'acquéreurs de M se trouve être :

1) Soit des clients ayant acheté P et L,

(ils sont, de toute façon, en nombre q dans notre cas).

2) Soit des clients n'ayant acheté ni P ni L,

(ils sont, de toute façon, en nombre $(c + q) - (p + l)$)

Ce qui s'exprime par :

si $m \leqslant q + (c + q) - (p + l)$ alors $I_q = q$;

si $m > q + c + q - (p + l)$ alors $I_q = q + m - (q + (c + q) - (p + l))$.

Qui en fait n'exprime rien d'autre que

$$I_q = \mathrm{Sup}(q\ , (p + l + m) - (c + q)).$$

Le minimum général recherché I, est donc le minimum atteint par I_q lorsque q appartient à l'intervalle $[(p + l)$ '–' $c\ , l]$.

Une petite étude comparative des fonctions affines

$f(x) = x$ et $g(x) = (p + l + m) - (c + x)$ sur l'intervalle $[(p + l)$ '–' $c\ , l]$

conduit à : I est le plus petit entier positif ou nul supérieur ou égal à :

$$\frac{1}{2}(p + l - c + \mathrm{Sup}(p + l - c, m)).$$

Ainsi, le minimum du nombre de clients ayant acheté au moins deux de ces quotidiens est :

le lundi :	814	le mardi :	719
le mercredi :	820	le jeudi :	640
le vendredi :	687	le samedi :	815