∽ Baccalauréat C Paris, Créteil, Versailles juin 1983 ∾

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Dans un espace affine euclidien E rapporté à un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on donne les points A(0 ; 0 ; −2), B(0 ; 1 ; −1), C(0; 0; 4), D(0 ; −1 ; 3).

1. Montrer qu'il existe un et un seul retournement (ou demi-tour), noté f, tel que $f(O) = A$ et $f(B) = B$. Caractériser géométriquement ce retournement et donner sa représentation analytique.
2. Soit g l'application : E → E qui à tout point $M(x ; y ; z)$ associe $M'\left(x' ; y' ; z'\right)$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' &=& x\\ y' &=& -y\\ z' &=& -z+2\end{array}\right.$$

   Déterminer la nature de g et ses éléments caractéristiques; on précisera les images de A et de B par g.
3. Soit $h = f \circ g$.
   Montrer que h est un déplacement dont on déterminera la nature et les éléments caractéristiques.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

On considère des entiers a, b, c tels que :

$$\text{P. G. C. D.}(a ; b) = 3 \quad \text{et} \quad \text{P. G. C. D. } (b ; c) = 4. \quad (1)$$

1. Montrer que a, b, c sont premiers entre eux dans leur ensemble.
2. On suppose dans cette question que a et c sont premiers entre eux. Montrer que l'on a la relation suivante :

$$abc = \text{P. P. C. M.}(a ; b ; c)\text{P. G. C. D.}(a ; b)\text{P. G. C. D. } (b ; c)\text{P. G. C. D. } (c ; a).$$

3. On suppose dans cette question que $abc = 12\,096$, a, b, c vérifiant le système (1). Trouver tous les triplets (a, b, c).

PROBLÈME **12 POINTS**

On définit, pour $t \in \mathbb{R}^{\star}$, l'application $f_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f_t(x) &=& x\text{Log}\,|x| - (x-t)\text{Log}|x-t| \quad \text{pour } x \in \mathbb{R} - \{0 ; t\}\\ f_t(0) &=& f_t(t) = t\text{Log}\,|t|\end{array}\right.$$

où $x \longmapsto \text{Log}x$ désigne la fonction logarithme népérien de x.
On appelle $\mathcal{C}_t$, la courbe représentative de f_t dans un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Montrer que, $\forall t \in R^{\star}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $f_{-t}(x) = -f_t(-x)$; que peut-on en déduire pour les courbes $\mathcal{C}_t$ et $\mathcal{C}_{-t}$?

   On suppose dans toute la suite du problème que $t > 0$.

b. Montrer que la courbe $\mathscr{C}_t$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \dfrac{t}{2}$.

2. Soit l'intervalle $I_t = \left[\dfrac{t}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

a. Montrer que pour tout réel a fixé, on a $\displaystyle\lim_{h \to 0} \dfrac{\text{Log}\,(1 + ah)}{h} = a$.

b. Montrer que f_t est continue sur I_t.

c. Étudier la dérivabilité de f_t sur I_t et en déduire le sens de variation de f_t sur I_t.

d. Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f_t(x)}{x} = 0$.

e. Dessiner sur la même figure les courbes $\mathscr{C}_t$ pour $t = 1,\ t = 4,\ t = \dfrac{1}{4}$ en prenant 2 cm pour unité.

f. Déterminer l'image J_t de I_t par f_t.
On pose :

$$g_t :\ \begin{array}{ccc} I_t & \to & J_t \\ x & \longmapsto & f_t(x) \end{array}$$

Montrer que g_t est bijective. On note h_t la fonction réciproque de g_t.

3. a. Montrer que si $t > 2$, f_t ne s'annule pas.

b. En combien de points s'annule f_2 ?

c. Montrer que si $t \in]0\ ;\ 2[$, f_t s'annule en deux points dont on appelle les abscisses $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ avec $\alpha(t) < \beta(t)$.
Montrer que $\alpha(t) + \beta(t) = t$.

4. On suppose dans cette question que $t \in]0\ ;\ 1[$.

a. Montrer que $t < \beta(t) < 1$.

b. Montrer que $f_1\left(\dfrac{\beta(t)}{t}\right) = -\text{Log}\,t$ et en déduire que :

$$\beta(t) = t h_1(-\text{Log}\,t).$$

(on rappelle que h_1 est définie dans 2. f).

c. i. Pour $x \in I_1$, on pose $\varphi(x) = f_1(x) - 1 = \text{Log}\,x$.
Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$.

ii. On définit une fonction ψ sur I_1 par $\psi = \varphi \circ h_1$. Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \psi(x) = 0$ et que :

$$\forall x \in J_1, \quad h_1(x) = \exp(x - 1 - \psi(x))$$

d. Montrer que $\displaystyle\lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \beta(t)$ existe et la calculer.