Baccalauréat C Paris [1] juin 1984

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Le plan P est rapporté au repère $\left(O~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
On considère l'application affine f qui à tout point M de P, de coordonnées x et y associe le point M' de coordonnées x' et y' données par :?

$$\left\{\begin{array}{l c r}x' &=& x-2y+2\\ y' &=& -2x+4y-1.\end{array}\right.$$

1. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
2. Montrer que l'image de P par f est une droite D.
3. Montrer que $f = h \circ p$, où h est une homothétie qu'on déterminera et p la projection orthogonale sur la droite D.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Dans le plan, rapporté au repère orthonormé $\left(O~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, on considère la courbe $(\mathscr{C}_m)$ d'équation

$$mx^2 + y^2 - 2x = 0.$$

1. Discuter suivant les valeurs de m la nature de la courbe $(\mathscr{C}_m)$.
2. Tracer les courbes $(\mathscr{C}_0)$ et $(\mathscr{C}_2)$ sur une même figure. L'unité de longueur est 4 cm.

PROBLÈME **2 POINTS**

Le symbole ln désigne la fonction logarithme népérien.
Les courbes de la partie A sont à construire dans le plan muni rapporté au même repère orthonormé $\left(O~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. L'unité de longueur est 2 cm.

Partie A

1. À tout réel x, tel que $\cos x \neq 0$, on associe :

$$f(x) = -\ln|\cos x|.$$

   a. Étudier la fonction f ainsi définie.

   b. Construire la courbe représentative de f, notée $(\mathscr{C})$.

2. On note S l'ensemble des solutions de l'équation

$$x \in \mathbb{R}\ \cos x + \sqrt{3}\sin x = 0.$$

   a. Résoudre cette équation.

   b. On considère la fonction

$$g = \left(\begin{array}{l c l}\mathbb{R} - \{S\} & \to & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & -\ln\left|\cos x + \sqrt{3}\sin x\right|\end{array}\right)$$

   Montrer que (Γ), courbe représentative de g, est l'image de $(\mathscr{C})$ par une application affine que l'on caractérisera.

1. Paris, Créteil, Versailles

3. On note $\tilde{f}$ la restriction de f à l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

a. Montrer que $\tilde{f}$ admet une fonction réciproque, notée $\tilde{f}^{-1}$. Calculer $\tilde{f}^{-1}\left(\ln\sqrt{2}\right)$.

b. Étudier la dérivabilité de $\tilde{f}^{-1}$. Montrer que, pour tout réel strictement positif x, on a :

$$\left(\tilde{f}^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-1}}.$$

c. Dessiner la courbe représentative de $\tilde{f}^{-1}$, notée (C).

4. La suite u est définie par $u_0 = \dfrac{\pi}{4}$ et, pour tout entier naturel non nul n, $u_n = f\left(u_{n-1}\right)$.

a. Montrer que l'équation

$$x \in \left]\frac{\pi}{3}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[, \quad f(x) = x$$

admet une unique solution, notée ℓ. Donner un encadrement de ℓ dans un intervalle de longueur 10^{-2}.

b. Montrer, par récurrence, que tous les termes de la suite u appartiennent à l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{4}\right]$.

Montrer que u est décroissante.

c. Montrer que u est convergente et trouver sa limite.

Partie B

On considère la fonction G, définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par

$$G(x) = \int_{\ln\sqrt{2}}^{x} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^{2t}-1}}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer qu'il existe un réel k, que l'on calculera, tel que pour tout réel strictement positif, on ait

$$G(x) = f^{-1}(x) + k.$$

2. Montrer que G admet une limite en plus l'infini et une limite en 0. Calculer ces limites.

Partie C

1. **a.** α est un nombre réel, résoudre l'équation

$$\mathcal{E}_{\alpha,1} \quad \begin{cases} z \in \mathbb{C} \\ z^2 - 2z\cos\alpha + 1 = 0. \end{cases}$$

b. En déduire la forme trigonométrique des solutions de l'équation

$$\mathcal{E}_{\alpha,n} \quad \begin{cases} z \in \mathbb{C} \\ z^{2n} - 2z^n\cos\alpha + 1 = 0. \end{cases}$$

dans laquelle n est un entier naturel non nul donné.

2. Pour tout entier naturel non nul n, pour tout réel α, pour tout complexe z, on pose

$$P_\alpha(z) = z^{2n} - 2z^n \cos\alpha + 1.$$

On admet que, pour tous z, α et n, on a

$$P_\alpha(z) = \left(z^2 - 2z\cos\frac{\alpha}{n} + 1\right) \times \cdots \times \left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + 1\right) \cdots$$

$$\times \cdots \times \left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) + 1\right).$$

et on note

$$P_\alpha(z) = \prod_{k=0}^{n-1}\left[z^2 - 2z\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + 1\right].$$

a. Calculer $P_\alpha(1)$ et en déduire que

$$\prod_{k=0}^{n-1} \sin^2\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) - \frac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{4^{n-1}}.$$

b. Pour tout α élément de l'intervalle $[0 ; \pi[$ et pour tout naturel n supérieur ou égal à 2, on pose

$$H_n(\alpha) = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right).$$

Montrer que, pour α non nul, on a

$$2^{n-1} H_n(\alpha) = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2n}\right)}.$$

c. Quelle est la limite de $H_n(\alpha)$, lorsque α tend vers 0 ?

d. En déduire que pour tout naturel n supérieur ou égal à 2 :

$$\sin\frac{\pi}{n} \cdot \sin\frac{2\pi}{n} \cdots \cdot \sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$