Durée : 4 heures

Baccalauréat C Paris septembre 1984

EXERCICE 1 **5 points**

1. Les complexes a_1, a_2, a_3, a_4 sont donnés.
Résoudre l'équation :

$$\left\{\begin{array}{lcl}(z_1,\, z_2,\, z_3,\, z_4) \in \mathbb{C}^4 & & \\ z_1+z_2 & = & 2a_1\\ z_2+z_3 & = & 2a_2\\ z_3+z_4 & = & 2a_3\\ z_4+z_1 & = & 2a_4\end{array}\right.$$

2. Dans le plan, on considère un quadrilatère $A_1A_2A_3\,A_4$.
   a. Montrer qu'il existe un quadrilatère $M_1M_2M_3\,M_4$ dont les milieux des côtés sont les points $A_1\,A_2A_3\,A_4$ si et seulement si le quadrilatère $A_1A_2A_3\,A_4$ est un parallélogramme.
   b. Montrer que, s'il en est ainsi, le point de concours des diagonales du parallélogramme $A_1A_2A_3\,A_4$ est l'isobarycentre des points M_1, M_2, M_3 et M_4.

EXERCICE 2 **4 points**

1. Déterminer la solution f de l'équation différentielle :

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

vérifiant les conditions initiales : $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

2. On désigne par F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. Justifier l'existence de F.
À l'aide de deux intégrations par parties, déterminer F.

PROBLÈME **11 points**

Les parties A et B sont indépendantes

Dans tout le problème, $\mathscr{P}$ est le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

Partie A

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(0) & = & 0\\ f(x) & = & -x\ln x \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^{\star}.\end{array}\right.$$

   a. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (Γ) dans $\mathscr{P}$.
   b. Étudier, suivant les valeurs de x, les positions relatives de (Γ) et de la droite (D) d'équation $y = x$.

2. Soit g la fonction définie dans $\mathbb{R}$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} g(0) & = & 0\\ g(x) & = & -x\ln |x| \ \forall x \in \mathbb{R}_+^{\star}.\end{array}\right.$$

a. En utilisant les résultats de la question précédente, tracer la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de g.

b. Soit T l'application définie dans $\mathscr{P}$, qui à tout point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ associe le point M_1 de coordonnées $\left(x_1\ ;\ y_1\right)$ avec :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & \mathrm{e}x\\ y_1 & = & -\mathrm{e}x+\mathrm{e}y.\end{array}\right.$$

Quelle est l'image par T de la courbe $(\mathscr{C})$?

3. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 \in \big]0\ ;\ \big[\\ u_{n+1} = g\left(u_n\right)\ \forall n \in \mathbb{N}.\end{array}\right.$$

Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée et strictement croissante.
En déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite.

Partie B

Dans cette partie, $x \in [0\ ;\ 1]$ et $n \in \mathbb{N}^{\star}$.
Soit f_n la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par :

$$\left\{\begin{array}{l} f_n(0) = 0\\ f_n(x) = x\left(\ln\dfrac{1}{x}\right), \forall x \in]0\ ;\ 1]\end{array}\right.$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f_n sur $[0 ; 1]$.

2. Démontrer que f_n admet un maximum d'abscisse $a_n = \mathrm{e}^{-n}$.
On pose $b_n = f_n\left(a_n\right)$; calculer b_n en fonction de n.

3. Donner le tableau de variations de f_n sur $[0 ; 1]$ (on ne demande pas de courbe représentative).

4. **a.** Démontrer que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et calculer sa limite.

b. Démontrer l'inégalité : $\forall x \in [0\ ;\ \mathrm{e}^{-n}],\quad f_n(x) \geqslant \dfrac{b_n}{a_n}x.$

5. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x,\quad J_n = \displaystyle\int_0^{\mathrm{e}^{-n}} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$

a. Démontrer que $\forall n \geqslant 1,\quad I_n \geqslant J_n \geqslant \dfrac{1}{2}n^n\mathrm{e}^{-2n}.$

b. En déduire que la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ est divergente.