

❧ Baccalauréat C Paris, Créteil, Versailles juin 1983 ❧

EXERCICE 1

4 POINTS

Dans un espace affine euclidien E rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points $A(0; 0; -2)$, $B(0; 1; -1)$, $C(0; 0; 4)$, $D(0; -1; 3)$.

1. Montrer qu'il existe un et un seul retournement (ou demi-tour), noté f , tel que $f(O) = A$ et $f(B) = B$.
Caractériser géométriquement ce retournement et donner sa représentation analytique.
2. Soit g l'application : $E \rightarrow E$ qui à tout point $M(x; y; z)$ associe $M'(x'; y'; z')$ tel que :

$$\begin{cases} x' &= x \\ y' &= -y \\ z' &= -z + 2 \end{cases}$$

Déterminer la nature de g et ses éléments caractéristiques; on précisera les images de A et de B par g .

3. Soit $h = f \circ g$.
Montrer que h est un déplacement dont on déterminera la nature et les éléments caractéristiques.

EXERCICE 2

4 POINTS

On considère des entiers a, b, c tels que :

$$\text{P. G. C. D.}(a; b) = 3 \quad \text{et} \quad \text{P. G. C. D.}(b; c) = 4. \quad (1)$$

1. Montrer que a, b, c sont premiers entre eux dans leur ensemble.
2. On suppose dans cette question que a et c sont premiers entre eux. Montrer que l'on a la relation suivante :

$$abc = \text{P. P. C. M.}(a; b; c) \text{P. G. C. D.}(a; b) \text{P. G. C. D.}(b; c) \text{P. G. C. D.}(c; a).$$

3. On suppose dans cette question que $abc = 12096$, a, b, c vérifiant le système (1). Trouver tous les triplets (a, b, c) .

PROBLÈME

12 POINTS

On définit, pour $t \in \mathbb{R}^*$, l'application $f_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f_t(x) &= x \text{Log}|x| - (x-t) \text{Log}|x-t| \quad \text{pour } x \in \mathbb{R} - \{0; t\} \\ f_t(0) &= f_t(t) = t \text{Log}|t| \end{cases}$$

où $x \mapsto \text{Log} x$ désigne la fonction logarithme népérien de x .

On appelle $\mathcal{C}_t$, la courbe représentative de f_t dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Montrer que, $\forall t \in \mathbb{R}^*, \forall x \in \mathbb{R}$, on a $f_{-t}(x) = -f_t(-x)$; que peut-on en déduire pour les courbes $\mathcal{C}_t$ et $\mathcal{C}_{-t}$?

On suppose dans toute la suite du problème que $t > 0$.

- b. Montrer que la courbe $\mathcal{C}_t$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \frac{t}{2}$.
2. Soit l'intervalle $I_t = \left[\frac{t}{2}; +\infty \right[$.

- a. Montrer que pour tout réel a fixé, on a $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{Log}(1+ah)}{h} = a$.
- b. Montrer que f_t est continue sur I_t .
- c. Étudier la dérivabilité de f_t sur I_t et en déduire le sens de variation de f_t sur I_t .
- d. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_t(x)}{x} = 0$.
- e. Dessiner sur la même figure les courbes $\mathcal{C}_t$ pour $t = 1, t = 4, t = \frac{1}{4}$ en prenant 2 cm pour unité.
- f. Déterminer l'image J_t de I_t par f_t .

On pose :

$$\begin{array}{ccc} g_t : I_t & \rightarrow & J_t \\ x & \mapsto & f_t(x) \end{array}$$

Montrer que g_t est bijective. On note h_t la fonction réciproque de g_t .

3. a. Montrer que si $t > 2$, f_t ne s'annule pas.
- b. En combien de points s'annule f_2 ?
- c. Montrer que si $t \in]0; 2[$, f_t s'annule en deux points dont on appelle les abscisses $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ avec $\alpha(t) < \beta(t)$.
- Montrer que $\alpha(t) + \beta(t) = t$.

4. On suppose dans cette question que $t \in]0; 1[$.

- a. Montrer que $t < \beta(t) < 1$.
- b. Montrer que $f_1\left(\frac{\beta(t)}{t}\right) = -\text{Log } t$ et en déduire que :

$$\beta(t) = t h_1(-\text{Log } t).$$

(on rappelle que h_1 est définie dans 2. f).

- c. i. Pour $x \in I_1$, on pose $\varphi(x) = f_1(x) - 1 - \text{Log } x$.
Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$.
- ii. On définit une fonction ψ sur I_1 par $\psi = \varphi \circ h_1$. Montrer que
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) = 0$ et que :

$$\forall x \in J_1, \quad h_1(x) = \exp(x - 1 - \psi(x))$$

- d. Montrer que $\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \beta(t)$ existe et la calculer.