Durée : 4 heures

Baccalauréat C Paris juin 1970

EXERCICE 1

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé (Ox, Oy), on appelle image du nombre complexe $z = x + \text{i}y$ le point M dont les coordonnées sont $(x\ ;\ y)$; le nombre z est dit affixe de M.
On considère les deux points A et B, d'affixes respectives $1 - \text{i}$ et $\sqrt{3} + \text{i}$. Calculer les affixes z des points C pour lesquels le triangle ABC est

1. rectangle isocèle, l'angle droit étant en B (deux cas possibles) ;
2. rectangle isocèle, l'angle droit étant en C (deux cas possibles).

EXERCICE 2

On considère l'ensemble $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$; ses éléments sont les couples $(a\ ;\ b)$, où a et b sont des entiers relatifs. On munit l'ensemble E de la loi, notée $\star$, définie par

$$(a\ ;\ b) \star \left(a'\ ;\ b'\right) = \left(aa'\ ;\ ab' + a'b\right).$$

1. La loi $\star$ est-elle commutative ; associative ? Montrer qu'il existe un élément neutre et le calculer.
2. À un élément fixé $(a\ ;\ b)$ de E, on associe l'application

$$f : E \longrightarrow E$$

   définie par

$$(x\ ;\ y) \longmapsto (a, b) \star (x, y).$$

   Montrer que, si $a \neq 0$, l'application f est injective. Montrer que, pour que f soit surjective, il faut et il suffit que $a = 1$ ou $a = -1$.
3. **a.** On considère l'équation

$$3x + 5y = 1.$$

   Déterminer tous les couples $(x\ ;\ y)$ d'entiers relatifs qui sont solutions de cette équation [on pourra remarquer que le couple $(+2\ ;\ -1)$ est une solution].

   b. On considère l'application $f : E \longrightarrow E$ associée à l'élément $(a\ ;\ b) = (5\ ;\ 3)$ de E.
   Pour quelles valeurs de l'entier relatif α l'élément $(x\ ;\ 1)$ de E est-il l'image, par f, d'un élément de E ?

EXERCICE 3

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé (Ox, Oy), on considère l'équation

$$x^2 + y^2 - 2[\text{Log}(-t)]x - 2ty + 2t = 0,$$

où t est un nombre réel (Log désigne le logarithme népérien, de base e).

1. Déterminer l'ensemble, A, des valeurs (réelles) de t pour lesquelles l'équation précédente est celle d'un cercle, noté (C_t). On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des cercles (C_t), lorsque t parcourt A.

2. Montrer que tout cercle (C_t) de $\mathscr{E}$ est orthogonal à un cercle fixe, (Ω), de centre $\omega(0\ ;\ +1)$, dont on déterminera le rayon.

3. On appelle γ_t le centre du cercle (C_t). C'est la position à l'instant t d'un mobile M (le paramètre représente le temps, qui varie en croissant dans A).

Déterminer et dessiner

a. la trajectoire du mobile M et le sens de son déplacement ;

b. le vecteur vitesse $\overrightarrow{MV}$ de M à l'instant t ;

c. l'ensemble des points v définis par la relation

$$\overrightarrow{\mathrm{O}v} = \overrightarrow{MV}$$

d. le vecteur accélération $\overrightarrow{M\Gamma}$ de M à l'instant t.

Indiquer si le mouvement de M sur sa trajectoire est accéléré ou retardé.

4. **a.** Déterminer l'équation de l'axe radical, $D_{(t,\ t')}$, des cercles (C_t) et $(C_{t'})$ $(t \neq t')$.

Démontrer qu'il existe une position limite, (Δ_t), de cette droite $D_{(t,\ t')}$ lorsque t' tend vers t fixé. Donner l'équation de (Δ_t).

b. On a ainsi défini une application φ de A dans l'ensemble, $\mathscr{D}$, des droites du plan, qui, à l'élément t de A, fait correspondre la droite $\varphi(t) = (\Delta_t)$.

L'application φ est-elle injective ? Préciser l' ensemble des images par φ des éléments t de A.

5. *Solution géométrique de la question* 4.

À l'aide de propriétés géométriques de l'axe radical $D_{(t,\ t')}$ démontrer à nouveau l'existence de la position limite (Δ_t) lorsque t' tend vers t fixé. Caractériser géométriquement la droite (Δ_t). En déduire les propriétés de l'application φ démontrées dans la question 4.