Baccalauréat C Paris juin 1973

EXERCICE 1

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé.
Soit $z = x + \text{i}y$ l'affixe d'un point $M(x\,;\,y)$ de ce plan.

1. Déterminer l'ensemble des points M du plan P tels que

$$|(1+\text{i})z - 2\text{i}| = 2.$$

2. Étudier la transformation de P qui, à chaque point M d'affixe z, fait correspondre le point M' d'affixe $z' = (1+\text{i})z - 2\text{i}$.

   Trouver en particulier le point qui coincide avec son transformé.
3. En utilisant la transformation précédente, retrouver le résultat de la première question.

EXERCICE 2

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs -2, -1, 3, 4. avec les probabilités $0,10$, $0,65$, $0,15$, $0,10$.

1. Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type σ de X.
2. Déterminer suivant les valeurs de h la probabilité $P(h)$ de l'inégalité $|\text{X}| \geqslant h$, où h est un nombre positif donné.
3. Tracer dans un même repère orthonormé les courbes représentatives des fonctions

$$h \longmapsto P(h) \quad \text{et} \quad h \longmapsto \frac{\sigma^2}{h^2}$$

   Comparer $P(h)$ et $\dfrac{\sigma^2}{h^2}$.

PROBLÈME

Partie A

1. Étudier les variations de la fonction numérique g définie par

$$g(x) = x\text{e}^{2x}$$

   Tracer la courbe Γ représentative de g dans un repère orthonormé $\mathcal{R}$ (unité de longueur : 5 cm).
2. Soit μ un paramètre réel. Étudier les variations de la fonction g_μ définie par

$$g_\mu(x) = (x+\mu)\text{e}^{2x}$$

   Montrer que, pour $\mu \neq 0$, la courbe Γ_μ représentative de g_μ dans le repère $\mathcal{R}$ se déduit de la courbe Γ par une transformation, composée de deux transformations géométriques simples. (On ne demande pas de tracer Γ_μ).

3. Soient λ et μ deux paramètres réels. On considère l'ensemble E des fonctions numériques $f_{\lambda,\,\mu}$ définies par

$$f_{\lambda,\,\mu}(x) = (\lambda x + \mu)\mathrm{e}^{2x}$$

Montrer que, relativement aux opérations usuelles d'addition des fonctions et de multiplication des fonctions par un nombre réel, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, qui contient les fonctions g_μ définies précédemment. L'ensemble des fonctions g_μ est-il un sous-espace vectoriel de E ?
Montrer que les fonctions $f_{1,\,0}$ ($\lambda = 1$; $\mu = 0$) et $f_{0,\,1}$($\lambda = 0$; $\mu = 1$) constituent une base $\mathcal{B}$ de E. Quelles sont les coordonnées de $f_{\lambda,\,\mu}$ dans cette base ?

Partie B

On se propose de construire une suite de fonctions dérivables

$$G_0, \quad G_2, \quad G_2, \quad , \ldots, G_n, \ldots$$

appartenant toutes à l'espace vectoriel E défini en A - 3. et telles que

$$\begin{array}{lcll} G_0 & = & g & \text{et} \\ G'_n & = & G_{n-1} & \text{pour tout entier } n \text{ supérieur ou égal à 1.} \end{array}$$

(G'_n désigne la fonction dérivée de G_n).
À cet effet, on pose, pour $n \geqslant 0$:

$$G_n(x) = \left(\lambda_n + \mu_n\right)\mathrm{e}^{2x}$$

1. Pour $n \geqslant 1$, exprimer λ_n et μ_n en fonction de λ_{n-1} et μ_{n-1}. Déduire de ce résultat qu'il existe une application linéaire Φ de l'espace vectoriel E dans lui-même telle que

$$G_n = \Phi\left(G_{n-1}\right)$$

Écrire la matrice M de Φ relativement à la base $\mathcal{B}$ de E définie en A - 3.

2. On considère la matrice

$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

où a est un nombre réel donné.
Calculer P^2 et P^3. Calculer ensuite P^n (on rappelle que $P^n = P \times P^{n-1}$).
Écrire alors l'expression de la matrice M^n.
En déduire les expressions de λ_n et de μ_n à l'aide des coordonnées λ_0 et μ_0 de G_0.
Compte tenu des valeurs numériques de λ_0 et μ_0 donner enfin l'expression de $G_n(x)$.

3. Démontrer que

$$G_n(x) = \int_{\frac{n}{2}}^{x} G_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t$$

Vérifier cette formule en calculant l'intégrale

$$\int_{\frac{n}{2}}^{x} G_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t$$

à l'aide d'une intégration par parties.