Baccalauréat C Paris septembre 1970

EXERCICE 1

Considérons la fraction $\dfrac{2n-3}{n+1}$ ou n est un entier relatif différent de -1.
Pour quelles valeurs de n la fraction est-elle équivalente à un entier relatif ?
Pour quelles valeurs de n est-elle irréductible ?

EXERCICE 2

1. On considère la fonction f qui, au nombre réel x, fait correspondre

$$y = f(x) = \sqrt{x}\,\text{Log}\,x$$

(où Log désigne le logarithme népérien, de base e).
Déterminer le domaine de définition de f et étudier ses variations dans ce domaine ; pour étudier $f(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs positives on pourra poser $x = \dfrac{1}{u^2}$.
Construire la représentation graphique de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\text{O}x,\ \text{O}y)$.

2. Trouver la fonction dérivée φ' de la fonction φ définie par

$$\varphi(x) = x\sqrt{x}\,\text{Log}\,x \quad (x > 0).$$

En déduire une primitive de la fonction f, puis calculer l'intégrale définie

$$A(x) = \int_1^x f(t)\,\text{d}t \quad (x > 0).$$

Étudier la limite de $A(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs positives.

EXERCICE 3

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\text{O}x,\ \text{O}y)$, on considère le cercle (I) de centre I$(0\ ;\ +1)$ et de rayon 1.

1. Soit $M(m\ ;\ a)$ un point de l'axe $x'\text{O}x$, distinct du point O ; on lui associe la tangente δ_M (autre que $x'\text{O}x$) menée de M au cercle (I).
Montrer que δ_M a pour équation

$$2mx + \left(m^2 - 1\right)y - 2m^2 = 0.$$

2. Soit $M(m\ ;\ a)$ et $M'\left(m'\ ;\ 0\right)$ deux points distincts de l'axe $x'\text{O}x$, tous deux distincts de O. Montrer que les droites δ_M et $\delta_{M'}$ associées sont sécantes si, et seulement si, m et m' satisfont à la relation

$$mm' + 1 \neq 0.$$

Lorsque cette condition est réalisée, calculer les coordonnées $(x\ ;\ y)$ du point, P, intersection des droites δ_M et $\delta_{M'}$ en fonction de m et m'.

3. **a.** Inversement, étant donné un point $P(x\ ;\ y)$ du plan, déterminer les points M et M' correspondants (c'est-à-dire tels que P soit l'intersection de δ_M et $\delta_{M'}$.
Préciser dans quelle région du plan on doit choisir P pour que M et M' existent.

b. Soit A$(a\,;\,0)$ un point fixé sur l'axe $x'\mathrm{O}x$, distinct de O. Supposons que les points M et M' varient sur l'axe $x'\mathrm{O}x$ (sauf en O) de telle sorte que la division $(M, M', \mathrm{O}, \mathrm{A})$ soit harmonique ; montrer que A et P sont conjugués par rapport au cercle (I). En déduire l'ensemble (Δ) des points P.

c. Trouver l'ensemble des points P lorsque M et M' varient de façon à vérifier la relation

$$\frac{1}{\overline{\overline{\mathrm{O}M}}} - \frac{1}{\overline{\overline{\mathrm{O}M'}}} = \frac{2}{\overline{\overline{\mathrm{OA}}}}.$$

On exprimera le résultat en fonction du paramètre $\lambda = \dfrac{1}{a^2} - 1$.

On obtient la courbe (Γ_λ) d'équation

$$x^2 - \lambda y^2 - 2y = 0.$$

Discuter, suivant les valeurs de λ correspondant aux valeurs de $a \neq 0$, la nature de la courbe (Γ_λ). Construire la courbe correspondant à $\lambda = \dfrac{1}{2}$. Préciser ses éléments.

4. (Cette question peut être traitée géométriquement.) À tout point $M(m\,;\,a)$ distinct de O, on associe le cercle γ_M passant par O et tangent en M à δ_M.

a. La droite MI coupe ce cercle en M et N. Montrer que N est le milieu d'un des arcs $(\mathrm{O}M)$ de γ_M. En déduire que γ_M est un cercle tangent à la droite (D) d'équation $y = \dfrac{1}{2}$.

Montrer que, réciproquement, un cercle passant par O et tangent à (D) est un cercle γ_M.

b. Deux cercles γ_M et $\gamma_{M'}$ se coupent en O et R.

En utilisant l'inversion de pôle O et de puissance 1, trouver l'ensemble des points R lorsque M et M' varient sur $x'\mathrm{O}x$ (sauf en O) de telle sorte que les cercles γ_M et $\gamma_{M'}$ soient orthogonaux.