

∞ Baccalauréat C Paris septembre 1972 ∞

EXERCICE 1

Calculer les intégrales

$$U = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x \, dx \quad \text{et} \quad V = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x \cos x \, dx.$$

EXERCICE 2

Soit (E) un espace vectoriel sur \mathbb{R} , de dimension 2, et une base (\vec{i}, \vec{j}) de (E), et soit a un nombre réel, fixé.

Montrer que, parmi toutes les applications linéaires f de (E) dans lui-même pour lesquelles $f(\vec{i}) = a\vec{i} - \vec{j}$, il en existe une, et une seule, telle que $(f \circ f)(\vec{i}) = f(\vec{i})$; on montrera à cet effet qu'on peut déterminer $f(\vec{j})$.

Vérifier que, pour cette application, $(f \circ f)(\vec{j}) = f(\vec{j})$; comparer $f \circ f$ et f ; vérifier alors que, pour tout vecteur \vec{u} de (E), le vecteur $\vec{n} = \vec{u} - f(\vec{u})$ appartient au noyau de f .

PROBLÈME

N. B. - Les paragraphes **a**, **b** et **c** de la deuxième question peuvent être traités indépendamment du reste du problème.

On désigne par (P) le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé d'axes Ox, Oy (unité de longueur : 3 cm).

1. **a.** Soit f la fonction de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = (x - 1)\sqrt{2x}.$$

Quel est son domaine de définition? Est-elle dérivable en tout point de ce domaine?

Étudier la variation de cette fonction f et tracer dans (P) la portion (C_1) de sa courbe représentative correspondant aux valeurs de x telles que $0 \leq x \leq 2$.

- b.** Soit (C) l'ensemble des points M de (P) dont les coordonnées x et y satisfont à l'équation

$$y^2 - 2x(x - 1)^2 = 0 \quad \text{à la condition} \quad 0 \leq x \leq 2.$$

Montrer que (C) est l'union de (C_1) et d'une courbe (C_2) , que l'on dessinera, déduite de (C_1) par une transformation simple de (P).

Préciser les coordonnées des points communs à (C) et à la droite (Δ) d'équation $y = x$.

- c.** Soit (Γ) l'ensemble des points M de (P) dont les coordonnées x et y satisfont à l'équation

$$(y^2 + 4x^2)^2 - 4x^2(x^2 + 1)^2 = 0 \quad \text{et à la condition} \quad -2 \leq x \leq 2.$$

Montrer que (Γ) est l'union de (C) et d'une courbe (C') , transformée de (C) dans une symétrie, que l'on précisera.

Dessiner (Γ) sur une figure distincte de la figure utilisée aux paragraphes **a** et **b**.

- d.** On considère enfin l'ensemble (Γ') des points M de (P) dont les coordonnées x et y satisfont à l'équation et à la condition $-2 \leq x \leq 2$.

Montrer que (Γ') se déduit de (Γ) par une symétrie, que l'on précisera (on ne dessinera pas (Γ) , dans cette question).

- 2. a.** À tout nombre complexe non nul, α , on associe l'application f_α , de \mathbb{C} dans \mathbb{C} , définie par

$$f_\alpha(z) = \alpha z$$

et l'application g_α de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par $g_\alpha(z) = \alpha \bar{z}$, où \bar{z} est le conjugué de z .

On désigne par \mathcal{E} l'ensemble de toutes les applications f_α et g_α ainsi définies.

Soit λ et μ deux nombres complexes non nuls, distincts ou non.

Déterminer les images de z par les applications composées

$$f_\mu \circ f_\lambda, \quad g_\mu \circ g_\lambda, \quad g_\mu \circ f_\lambda \text{ et } f_\mu \circ g_\lambda$$

et vérifier que ces applications composées appartiennent à \mathcal{E} .

Montrer que l'ensemble \mathcal{E} constitue un groupe pour la composition des applications (on précisera l'application réciproque de f_λ et celle de g_λ).

- b.** Montrer que l'ensemble $K = \{1, -1, i, -i\}$ est un groupe pour la multiplication.

En déduire que l'ensemble (E) des huit applications $f_1, f_{-1}, f_i, f_{-i}, g_1, g_{-1}, g_i, g_{-i}$ est un groupe pour la composition des applications (sous-groupe de \mathcal{E}); on ne demande pas d'écrire la table de ce groupe.

- c.** À chaque application f_α correspond une transformation T_α du plan (P) qui à M d'affixe z associe le point $T_\alpha(M)$ d'affixe $f_\alpha(z)$.

De même à chaque application g_α correspond une transformation S_α du plan (P) qui à M d'affixe z associe le point $S_\alpha(M)$ d'affixe $g_\alpha(z)$.

Quelle est la nature géométrique des transformations T_α et S_α ?

Préciser la nature géométrique des huit transformations $T_1, T_{-1}, T_i,$

$T_{-i}, S_1, S_{-1}, S_i, S_{-i}$ qui correspondent aux huit applications de (E) .

Déduire du 2. b. que ces huit transformations forment un groupe (G) pour la composition des transformations.

- d.** Vérifier que l'ensemble $(\Gamma) \cup (\Gamma')$ de la première question est invariant par l'une quelconque des transformations du groupe (G) .

En remarquant que $T_i = S_i \circ S_1$, montrer que T_i transforme (Γ) en (Γ') .

Dessiner alors (Γ') sur le même graphique que (Γ) (le candidat pourra utiliser à cet effet l'une ou l'autre des transformations S_i et T_i à son choix).