Durée : 4 heures

Baccalauréat C Paris juin 1969

EXERCICE 1

Soit (C) l'hyperbole représentée, dans un repère d'axes orthonormé Ox et Oy, par l'équation

$$y^2 = 3x^2 - 12x + 9.$$

Déterminer le centre de symétrie de (C) (par ses coordonnées) et les asymptotes de (C) (par leurs équations).
Dessiner (C) et ses asymptotes.

EXERCICE 2

Soit f la fonction qui à x fait correspondre

$$f(x) = \frac{x^3 + x + 3}{x},$$

x décrivant l'intervalle fermé $[+1\ ;\ +3]$.

1. Déterminer la primitive, F, de f qui s'annule pour $x = 2$. Dans la suite, on pourra désigner par a et b respectivement les nombres $F(1)$ et $F(3)$ [qu'on ne demande pas de calculer].
2. Montrer, en énonçant avec précision le théorème utilisé, que cette fonction F de la variable x, x décrivant l'intervalle $[+1\ ;\ +3]$, admet une fonction réciproque, G, définie sur un intervalle que l'on précisera.

   Démontrer que la valeur 0 appartient à cet intervalle.

   Déterminer, pour la valeur 0 de la variable, la valeur de la fonction G et la valeur de sa dérivée.

PROBLÈME

À tout nombre complexe $x + \mathrm{i}y$ (x et y réels) on fait correspondre, dans un plan rapporté à un repère orthonormé Ox, Oy, le point M, de coordonnées x et y, qu'on appellera image du nombre $x + \mathrm{i}y$.
Dans tout le problème, on ne considérera que des nombres complexes $x + \mathrm{i}y$ pour lesquels y est strictement positif ; l'ensemble de leurs images sera donc un demi-plan, D, limité par l'axe Ox.
M et P étant deux points de D, M' le symétrique de M par rapport à l'axe Ox, on fait correspondre , au couple $(M,\ P)$ le nombre réel Log $\dfrac{PM' + PM}{PM' - PM}$ que l'on note $d(M,\ P)$. (Log désigne le logarithme népérien.)

1. Montrer que $d(M,\ P)$ est nul si, et seulement si, M et P sont confondus.

   M et P étant supposés distincts, démontrer que l'on a

   $$d(M,P) > 0$$

   et $$d(M,P) = d(P,M).$$

   Calculer $d(M,P)$ si M est l'image du nombre complexe $1 + 2\mathrm{i}$ et P l'image du nombre complexe i.

2. M et P étant les images de deux nombres complexes, $x+\mathrm{i}y$, $x+\mathrm{i}y'$, de même partie réelle, x, montrer que

$$d(M,\ P)=\left|\operatorname{Log}\frac{y'}{y}\right|=\left|\operatorname{Log}\frac{MH}{PH}\right|$$

H étant le point où la droite MP coupe l'axe Ox.
M, P, Q étant les images respectives des nombres complexes $x+\mathrm{i}y$, $x+\mathrm{i}y'$, $x+\mathrm{i}y''$, avec

$$0<y\leqslant y'\leqslant y'',$$

démontrer que

$$d(M,Q)=d(M,P)+d(P,Q).$$

3. **a.** On considère une inversion de puissance positive, dont le pôle (ou centre) I est sur l'axe Ox.
M et P étant deux points appartenant à D, m et p étant leurs inverses dans l'inversion précédente, démontrer que m et p appartiennent à D et que

$$d(m,\ p)=d(M,\ P).$$

(On rappelle la formule $mp=MP.\dfrac{|k|}{\mathrm{IP.I}M}$, m et p étant les inverses des points M et P dans l'inversion de pôle I et de puissance k.)

b. On donne deux points distincts, α et β, de l'axe Ox et le demi-cercle de diamètre $\alpha\beta$ situé dans le demi-plan D.
Si M, P et Q sont trois points de ce demi-cercle tels que P appartienne à l'arc MQ de ce demi-cercle, démontrer, en utilisant une inversion de pôle α, que

$$d(M,\ Q)=d(M,\ P)+d(P,\ Q).$$

c. Le demi-cercle de diamètre $\alpha\beta$ étant toujours donné, M et P étant deux points de ce demi-cercle et M' le symétrique de M par rapport à l'axe Ox, la droite αP coupe la droite MM' en J, la droite βP coupe la droite MM' en K, J et K appartenant à D. Démontrer que

$$d(M,\ P)=d(M,\ J)=d(M,\ K)=\left|\operatorname{Log}(\alpha M,\alpha P,\alpha\beta,\alpha T)\right|,$$

si $(\alpha M,\alpha P,\alpha\beta,\alpha T)$ désigne le birapport des droites $\alpha M,\alpha P,\alpha\beta,\alpha T$, αT étant la tangente en α au cercle de diamètre $\alpha\beta$.

4. On donne deux points M et P distincts, appartenant à D. Quel est l'ensemble des points Q de D tels que

$$d(M,\ Q)=d(M,\ P)?$$