∽ Baccalauréat C Paris juin 1971 ∾

EXERCICE 1

Soit f la fonction

$$x \longmapsto f(x) = \sqrt{1 - \text{Log}\, x},$$

où Log désigne le logarithme népérien.
Préciser le domaine de définition de f, et celui des deux premières dérivées f' et f'' de f.
Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
Étudier la variation de f et construire sa courbe représentative (C) (repère orthonormé).
Construire la tangente à (C) au point A, d'ordonnée nulle, puis la tangente à (C) au point I, d'abscisse α telle que $f'(\alpha) = 0$.
Montrer que f admet une fonction réciproque g, définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$; calculer explicitement $g(x)$.

EXERCICE 2

À tout réel $\lambda \in]0~;~+1[$ on associe, dans un plan rapporté à un repère orthonormé d'axes Ox, Oy, l'ellipse (E_λ) d'équation

$$y^2 = 2x - \frac{x^2}{\lambda}.$$

1. Déterminer par leurs coordonnées le centre Ω et les sommets de cette ellipse (E_λ).
   Trouver et tracer la courbe S constituant l'ensemble des sommets du grand axe quand λ décrit l'intervalle $]0~;~+1[$. Préciser la nature de S.
2. Déterminer par leurs coordonnées les foyers de l'ellipse (E_λ). Trouver et tracer la courbe (Φ) constituant l'ensemble de ces foyers quand λ décrit l'intervalle $]0~;~+1[$.

PROBLÈME

1. On donne deux nombres complexes non nuls a et s et l'on considère la suite $\sum$ des nombres complexes $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$, définie par $z_0 = 0$ et par la relation de récurrence

$$(1) \quad z_{n+1} = sz_n + a, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

   a. Calculer z_1, z_2, z_2, z_3, z_4 en fonction de a et de s.
   Exprimer simplement z_n en fonction de a, s et n, lorsque $s \neq 1$.
   Que peut-on dire de $\sum$ lorsque $s = -1$?
   Donner la valeur de z_n lorsque $s = 1$.

   b. Deux éléments distincts de $\sum$ peuvent-ils être égaux? Montrer qu'alors $\sum$ est périodique.

   c. Vérifier que deux termes consécutifs de $\sum$ ne sont jamais égaux et montrer que

$$(2) \quad \frac{z_{n+2} - z_n}{z_{n+1} - z_n} = s + 1, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

   d. Inversement, soit donnée une suite vérifiant les trois conditions suivantes : deux termes consécutifs ne sont jamais égaux, la relation (2) est satisfaite, les deux premiers termes sont 0 et a. Démontrer qu'une telle suite est confondue avec $\sum$.

2. Tous les points considérés dans cette question appartiennent à un même plan euclidien, muni d'un repère orthonormé d'axes Ox, Oy (unité : 1 cm).

L'affixe d'un point de ce plan, de coordonnées (x ; y), est le nombre complexe $z = x + \text{i}y$.

Soit θ un angle donné tel que $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ et r un nombre réel donné strictement positif.

Si P désigne un point quelconque, on note f_{P} la similitude de centre P, d'angle θ et de rapport r ; ainsi $f_{\text{P}}(M)$ est le point image de M par f_{P}. On considère alors la suite $\mathscr{A}$ des points O, A_1, A_2, ..., A_n, ..., tels que, pour tout n,

$$\text{A}_2 = f_{\text{O}}\left(\text{A}_1\right),\ \text{A}_3 = f_{\text{A}_1}\left(\text{A}_2\right),\ \ldots \text{et } \text{A}_{n+2} = f_{\text{A}_n}\left(\text{A}_{n+1}\right),$$

où O est l'origine et A_1 le point d'affixe a donnée ($a \neq 0$).

a. Si z_n désigne l'affixe de A_n trouver la valeur du rapport

$$\frac{z_{n+2} - z_n}{z_{n+1} - z_n}.$$

Déduire alors du **1.** que A_{n+1} est le transformé de A_n dans une similitude S, indépendante de n ; calculer seulement, ici, l'affixe de son centre.

On ne demande d'étudier S que dans les deux cas **b.** et **c.** suivants.

b. On suppose $r = \dfrac{1}{\cos\theta}$; déterminer l'angle, le rapport et le centre, U, de S. Vérifier que tous les points A_i appartiennent, selon la parité de i, à l'une ou l'autre de deux droites fixes.

Comment faut-il choisir θ pour que la suite $\mathscr{A}$ soit périodique ?

Construire le point U et la ligne polygonale

$$\text{OA}_1\text{A}_2\text{A}_3\text{A}_4\text{A}_5\text{A}_6$$

pour

$$a = 5 \quad \text{et} \quad \theta = \frac{\theta}{6}$$

c. On suppose $r = 2\cos\theta$; montrer que S est une rotation, dont on déterminera l'angle et le centre V.

Qu'en déduit-on pour les côtés de la ligne polygonale L de sommets successifs

$$\text{O, A}_1\text{, A}_2\text{, A}_3\text{, A}_4\text{, A}_5\text{, A}_6 ?$$

Comment faut-il choisir θ pour que L soit fermée ?

Construire le point V et la ligne L pour

$$a = 5 \quad \text{et} \quad \theta = \frac{2\pi}{7}.$$