

Durée : 4 heures

## ♧ Baccalauréat C Paris juin 1972 ♧

### EXERCICE 1

Calculer l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{4x}{x^2 - 4} dx$$

(sous la forme  $\text{Log} \frac{p}{q}$ ,  $p \in \mathbb{N}$ ,  $q \in \mathbb{N}$ , le symbole  $\text{Log}$  désignant le logarithme népérien).

Écrire la formule d'intégration par parties pour l'intégrale

$$\int_0^1 v(x)u'(x)dx,$$

et en déduire, en prenant  $u'(x) = 1$ , l'intégrale

$$I = \int_0^1 \text{Log} \left| \frac{x+2}{x-2} \right| dx.$$

Donner une valeur décimale approchée de  $I$ , à  $4 \cdot 10^{-4}$  près, sachant que 0,693 1 est une valeur décimale approchée, à  $5 \cdot 10^{-5}$  près, de  $\text{Log} 2$  et que 1,098 6 est une valeur décimale approchée, à  $5 \cdot 10^{-5}$  près, de  $\text{Log} 3$ .

### EXERCICE 2

On considère le corps  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ , dont les éléments sont notés  $\hat{0}$ ,  $\hat{1}$ ,  $\hat{2}$ , et l'équation

(E)  $x^2 + px + q = 0$ , où les coefficients  $p$  et  $q$  appartiennent à  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  et où l'inconnue  $x$  est à chercher dans ce corps.

Déterminer successivement tous les couples  $(p; q)$  tels que  $E$  admette

1. la solution  $\hat{6}$ ;
2. la solution  $\hat{i}$ ;
3. la solution  $\hat{2}$ ;
4. aucune solution.

### PROBLÈME

#### Partie A

Le plan euclidien (P) est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , noté  $\mathcal{R}$ , d'axes  $Ox$ ,  $Oy$ .

À l'application, de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$ , définie par

$$z \longmapsto Z = iz + (1 - i)\bar{z},$$

(où  $\bar{z}$  est le conjugué de  $z$ ) correspond alors la transformation  $T$ , du plan (P) qui, à  $m$  d'affixe<sup>1</sup>  $z$ , associe  $M$  d'affixe  $Z$ .

---

1. L'affixe d'un point de coordonnées  $(x; y)$  est le nombre complexe  $x + iy$

1. Vérifier que le milieu du segment  $[mM]$  appartient à l'axe  $Ox$  et que, si  $m$  est distinct de  $M$ , la droite  $(mM)$  a une direction fixe.

On pourra, par exemple, exprimer d'abord les coordonnées  $X$  et  $Y$  du point  $M$  en fonction des coordonnées  $x$  et  $y$  du point  $m$  (dans le repère  $\mathcal{R}$ ).

En déduire que la transformation  $T$  est une symétrie oblique d'axe  $Ox$ , dont on précisera la direction.

2. a. Soit  $\mathcal{R}'$  le nouveau repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  défini dans le plan  $(P)$  par  $(\vec{u}, \vec{u}') = \alpha$  (où  $\alpha$  est un nombre réel donné) et par  $(\vec{u}', \vec{v}') = \frac{\pi}{2}$ .

Montrer que les affixes  $z$  et  $z'$  d'un même point  $m$  dans les repères respectifs  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  sont liées par la relation  $z = z'(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ .

Exprimer, en fonction de  $z'$  et  $\bar{z}'$ , l'affixe  $Z'$  (dans le repère  $\mathcal{R}'$ ) de l'image  $M$  de  $m$  par la transformation  $T$ .

- b. On prend  $\alpha = \frac{\pi}{8}$ . Montrer que  $Z' = iz' - i\sqrt{2}\bar{z}'$ .

Calculer alors les coordonnées  $X'$  et  $Y'$  du point  $M$  en fonction des coordonnées  $x'$  et  $y'$  du point  $m$  (dans le repère  $\mathcal{R}'$ ).

En déduire une équation, dans  $\mathcal{R}'$ , de l'image  $(\Gamma) = T(\gamma)$  par  $T$  du cercle  $(\gamma)$  de centre  $O$  et de rayon 1.

Quelle est la nature de  $(\Gamma)$ ?

Dessiner  $(\gamma)$  et  $(\Gamma)$  sur une même figure; préciser quels sont leurs points communs, en s'appuyant sur la nature géométrique, trouvée au 1., de la transformation  $T$ .

### Partie B

On associe à tout couple  $(a, b)$  de nombres complexes l'application,  $f_{a, b}$ , de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$ , définie par

$$f_{a, b}(z) = az + b\bar{z}.$$

1. Mettre  $f_{a, b} \circ f_{a, b}(z) - z$ , c'est-à-dire  $f_{a, b}[f_{a, b}(z)] - z$ , sous la forme  $Az + B\bar{z}$ ,  $A$  et  $B$  étant deux constantes complexes.

Démontrer que  $Az + B\bar{z}$  est nul pour tout  $z$  si, et seulement si,  $A = B = 0$ . (On pourra pour cela donner à  $z$  les valeurs 1 et  $i$ .)

Traduire alors par un système,  $S$ , de deux relations entre  $a, b, \bar{a}$  et  $\bar{b}$  la condition pour que  $f_{a, b}$  soit involutive.

Que deviennent ces relations pour  $b = 0$  (on montrera qu'il existe deux applications  $f_{a, b}$  involutives) et pour  $b \neq 0$ .

Vérifier que les valeurs  $a = i$  et  $b = 1 - i$ , utilisées dans la partie A, conviennent dans ce dernier cas.

2. Dans cette question,  $f_{a, b}$  est supposée quelconque, involutive ou non.

On considère maintenant  $\mathbb{C}$  comme un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .

- a. Démontrer que l'application  $f_{a, b}$  de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  est linéaire. On prend

$\mathcal{B} = (1, i)$  comme base de  $\mathbb{C}$ ; calculer  $f_{a, b}(1)$  et  $f_{a, b}(i)$ .

- b. Soit  $\varphi$  une application linéaire quelconque de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$ , définie par sa matrice  $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} p & s \\ r & q \end{pmatrix}$  relativement à  $\mathcal{B}$ ,  $p, q, r$  et  $s$  étant quatre réels.

Démontrer qu'il existe une application  $f_{a, b}$  qui coïncide avec  $\varphi$ ; à cet effet, on calculera  $\varphi(1)$  et  $\varphi(i)$  et l'on exprimera  $a$  et  $b$  au moyen de  $p, q, r$  et  $s$ .

- c. Déduire alors du système  $S$  de relations trouvées, précédemment, un système de relations entre  $p, q, r$  et  $s$  traduisant la condition pour que  $\varphi$  soit involutive.

Trouver directement ces relations, en calculant  $\mathcal{M}^2$ , c'est-à-dire  $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ .