~ Baccalauréat C Paris juin 1974 ~

EXERCICE 1

Trouver, sous la forme $a+\mathrm{i}b$ (a et b réels), un nombre complexe ω tel que

$$\omega^2 = 48 + 14\mathrm{i}.$$

Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation :

$$z^2 - 5(1+\mathrm{i})z - 12 + 9\mathrm{i} = 0.$$

Vérifier que le quotient des deux racines est un imaginaire pur.

EXERCICE 2

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{Log}\left(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} + 1\right)$$

le symbole Log désignant le logarithme népérien de base e.

1. Étudier la variation de la fonction f. Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative, dans un repère orthonormé, de la variation de f. Montrer, en posant $x = \mathrm{Log}\,(\mathrm{e}^x)$, que $f(x) - 2x$ tend vers une limite lorsque x tend vers $+\infty$, et en déduire l'asymptote correspondante de $\mathscr{C}$.
   Construire la courbe $\mathscr{C}$ (on précisera la tangente au point C d'ordonnée nulle).
2. Soit k un nombre réel strictement positif.
   Discuter, suivant les valeurs de k, le nombre de solutions réelles de l'équation d'inconnue x

$$\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} + 1 - k = 0.$$

   a. par le calcul,
   b. en utilisant la courbe $\mathscr{C}$.

PROBLÈME

N. B. - La partie C est indépendante des parties A et B.

Partie A

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3, $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$ une base orthonormée de E, r_1 la rotation vectorielle E $\to$ E ayant pour axe la droite vectorielle contenant $\overrightarrow{\imath}$ et telle que $r_1\left(\overrightarrow{\jmath}\right) = \overrightarrow{k}$, r_2 la rotation vectorielle ayant pour axe la droite vectorielle contenant $\overrightarrow{\jmath}$ et telle que $r_2\left(\overrightarrow{k}\right) = \overrightarrow{\imath}$.

1. On pose $r = r_2 \circ r_1$, $r^2 = r \circ r$, $r^3 = r \circ r^2$.
   Quelles sont les images de $\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{\jmath}$, $\overrightarrow{k}$ par r, par r^2, par r^3 ?
   Quel renseignement relatif à l'angle de la rotation vectorielle r déduit-on de ce qui précède ?
2. Calculer en fonction des coordonnées x, y, z d'un vecteur quelconque $\overrightarrow{V}$ de E les coordonnées x', y', z' du vecteur $r\left(\overrightarrow{V}\right)$, et déterminer les vecteurs de E invariants par r.

3. Soit r_3 la rotation vectorielle ayant pour axe la droite vectorielle contenant $\overrightarrow{k}$ et telle que $r_3\left(\overrightarrow{\imath}\right) = \overrightarrow{\jmath}$.

Déterminer les images de $\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{k}$ par la rotation vectorielle $r \circ r_3$ c'est-à-dire $r_2 \circ r_1 \circ r_3$. Qu'en déduit-on pour cette rotation ?

Indiquer de même ce que sont les rotations $r_3 \circ r_2 \circ r_1$ et $r_1 \circ r_3 \circ r_2$.

(Les résultats de ce 3. *ne seront pas utilisés par la suite).*

Partie B

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien, associé à E, et $\left(\mathrm{O}\,;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$ un repère de $\mathscr{E}$ (les vecteurs $\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{k}$ étant définis au A).

On désigne par ρ l'application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ dans laquelle tout point M, de coordonnées x, y, z, a pour image le point M' de coordonnées :

$$x' = y, \quad y' = -z, \quad z' = -x.$$

1. Préciser la nature de cette application ρ.

2. Soit $\mathscr{P}$ le plan de $\mathscr{E}$ d'équation $z = 1$. Déterminer l'ensemble H des points M du plan $\mathscr{P}$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{O}M}$ et $\overrightarrow{\mathrm{O}M'}$ soient orthogonaux. La courbe H admet un centre de symétrie Ω. Écrire l'équation de H relativement au repère $\left(\Omega,\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ et indiquer la nature de la courbe H.

3. On définit, par leurs coordonnées dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$, les points suivants de $\mathscr{E}$: S(0 ; 0 ; 1), A(0 ; 1 ; 1), B(1 ; 0 ; 1) . On constate que les points A, S, B, Ω sont les sommets consécutifs d'un carré Γ. Soit C = ρ(A), S$'$ = ρ(S), D = ρ(B) , $\Omega' = \rho(\Omega)$; ces points sont les sommets d'un carré Γ' image de Γ par ρ.

On désigne enfin par α le point de $\mathscr{E}$ tel que S soit le milieu de Aα, et par β le point de $\mathscr{E}$ tel que B soit le milieu de $\Omega\beta$.

Montrer qu'il existe un déplacement δ, autre que ρ, tel que $\delta(\Gamma) = \Gamma'$ et dans lequel α et β sont invariants (il est conseillé de préciser d'abord les images par δ des points A, S, B et Ω).

Vérifier que la courbe H a même image H' par ρ et par δ.

Partie C

Les lettres $\mathscr{E}$, O, ρ ont la même signification que dans la partie B.

1. On donne un nombre réel k, strictement positif, et l'on appelle L_k l'ensemble des points M, appartenant au plan de $\mathscr{E}$ d'équation $z = 0$, et tels que $MM' = k\mathrm{O}M$ ([en posant encore $M' = \rho(M)$] [1]

Ecrire l'équation de L_k dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.

On pose $x = \lambda\cos\theta$, $y = \lambda\sin\theta$, avec $\lambda \geqslant 0$.

Montrer que si le point M de coordonnées x, y appartient à L_k et si $\lambda > 0$, alors $\sin 2\theta$ s'exprime simplement en fonction de k.

En déduire, suivant les valeurs de k, la nature géométrique de l'ensemble L_k.

Application numérique : $k = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Calculer les valeurs correspondantes de θ.

1. MM' et OM représentent respectivement la distance de M et M' et la distance de O à M.

2. Soit Σ l'ensemble dont les éléments sont les inverses $\dfrac{1}{n}$ des entiers relatifs n non nuls.

On se propose de chercher certaines valeurs rationnelle de k pour lesquelles $\sin 2\theta$ appartient à Σ. Montrer, à cet effet, que si $k = \dfrac{p}{q}$, où p et q désignent des entiers naturels premiers entre eux, les conditions a. et b. suivantes sont équivalentes :

a. $\sin 2\theta \in \Sigma$

b. $p^2 - 2q^2 = \pm 1$.

En déduire les couples $(p~;~q)$ cherchés, pour lesquels $1 \leqslant p < 20$, ainsi que les valeurs correspondantes de $\sin 2\theta$ [on ne cherchera pas l'expression générale des couples $(p~;~q)$ vérifiant la condition b.].