Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C juin 1975 Paris ∾

EXERCICE 1

1. Soit F la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_1^{1+x^2} \text{Log}\, t\,\text{d}t.$$

(le symbole Log désignant le logarithme népérien).
Calculer la dérivée $F'(x)$ de F au point x, en considérant F comme la fonction composée de la fonction $g\,:\, x \longmapsto 1+x^2$ et de la fonction $h\,:\, X \longmapsto \displaystyle\int_1^X \text{Log}\, t\,\text{d}t \quad (X > 0)$.

2. Calculer, en intégrant par parties, l'intégrale $\displaystyle\int_1^X \text{Log}\, t\,\text{d}t$.
Exprimer alors $F(x)$ sans utiliser le signe d'intégration, et retrouver l'expression de $F'(x)$.

EXERCICE 2

Dans le plan affine P rapporté à un repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, on donne les points A et B définis par $\overrightarrow{\text{OA}} = \vec{\imath}$, $\overrightarrow{\text{OB}} = \vec{\jmath}$.
Tout point M du plan P a deux coordonnées, notées x et y, dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. Comment choisir le point M pour que les points A, B, M, affectés respectivement des coefficients x, y, xy, admettent un barycentre ?
Dessiner l'ensemble H des points M qui ne conviennent pas.

2. Trouver et dessiner l'ensemble K des points M pour lesquels le point O est le barycentre des points A, B, M affectés respectivement des coefficients x, y, xy.

PROBLÈME

Partie A

On donne un entier naturel a, supérieur ou égal à 1.

1. Trouver l'ensemble $\mathcal{J}$ des solutions du système suivant d'inéquations, où l'inconnue est le nombre réel x :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & > & 0\\ \dfrac{-x^{3a}+2x^a-1}{1-x^{3a}} & < & 0\end{array}\right.$$

(on pourra d'abord poser $x^a = X$).

2. Calcul numérique (on pourra utiliser une table de logarithmes) :
Trouver la plus petite valeur de l'entier a pour laquelle le nombre $\dfrac{49}{51}$ appartient à $\mathcal{J}$.

Partie B

On considère l'ensemble $\mathscr{S}$, de toutes les suites réelles u, applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, $n \longmapsto u_n$.
La somme $u + u'$ de deux suites u et u' de $\mathscr{S}$ est la suite $n \longmapsto u_n + u'_n$.
Le produit γu d'une suite u par un réel γ est la suite $n \longmapsto \gamma u_n$.
La suite 0 est la suite $n \longmapsto 0$ (réel nul).
L'ensemble $\mathscr{S}$, muni de cette addition et de cette multiplication par un réel, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1. Soit p un nombre réel donné, appartenant à l'intervalle $]0\,;\,1[$.
On désigne par E l'ensemble des suites u de $\mathscr{S}$ qui satisfont à la relation de récurrence :

$$(1) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad pu_{n+2} - u_{n+1} + (1-p)u_n = 0.$$

a. Montrer qu'une telle suite est définie par la donnée de ses deux premiers termes u_0 et u_1 et par la relation (1).

b. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{S}$.

c. Soit v et w les deux suites de E définies par $v_0 = 1,\ v_1 = 0$ et par $w_0 = 0,\ w_1 = 1$.
— Montrer que $\{v,\ w\}$ est un système libre.
— Montrer que, si u est une suite quelconque de E, u est égale à la suite $u_0 v + u_1 w$.
— Que peut-on dire alors de $\{v,\ w\}$? Quelle est la dimension de E ?

2. a. Vérifier que si $p = \dfrac{1}{2}$ les suites de E sont des suites arithmétiques.

On suppose $p \neq \dfrac{1}{2}$. Montrer que la suite $n \longmapsto t^n$ (t réel non nul) appartient à E si et seulement si t est tel que $pt^2 - t + 1 - p = 0$.

Vérifier que l'on obtient ainsi deux suites formant une base de E. Écrire alors une expression générale du terme u_n d'une suite u quelconque de E, en désignant par λ et μ les coordonnées de u dans cette base.

b. Soit α un entier donné, supérieur ou égal à 1. On désigne maintenant par u une suite de E telle que $u_0 = 1$ et $u_\alpha = 0$.
— On prend $p = \dfrac{1}{2}$, exprimer alors u_n en fonction de α et de n.
— On suppose $p \neq \dfrac{1}{2}$ et on pose $x = \dfrac{1-p}{p}$; exprimer u_n en fonction de x, α et n.

Partie C

Un jeu oppose deux joueurs A et A′, auxquels on attribue respectivement, au début du jeu, un « avoir » de a jetons et un « avoir » de $2a$ jetons (a entier donné, supérieur ou égal à 1).
La rencontre comporte des parties successives et indépendantes, numérotées 1, 2, 3, ...
La probabilité pour que le joueur A gagne une partie est supposée indépendante du rang de cette partie, et égale à p $(0 < p < 1)$. Après chaque partie le joueur perdant donne un jeton au gagnant. Le jeu s'arrête lorsqu'un joueur est « ruiné », c'est-à-dire ne dispose plus de jetons, et le joueur « ruiné » perd le match.

1. a. k désignant un entier naturel, on considère la variable aléatoire X_k égale à l'avoir du joueur A après la partie de rang k (si $k \neq 0$) et avant la partie de rang $k+1$ (si celle-ci a lieu). On a ainsi $X_0 = a$ et $0 \leqslant X_k \leqslant 3a$.

Quelles sont les valeurs « possibles » de X_1 ? de X_2 ? de X_{2k} ? de X_{2k+1} ?

b. Si $X_k = 0$ le joueur A est ruiné ; si $X_k = 3$ a le joueur A′ est ruiné ; dans chacun de ces cas le match ne se poursuit pas au delà de la k-ième partie.

Si X_k est différent de 0 et de $3a$ l'on admet [1] que la probabilité de ruine ultérieure du joueur A ne dépend pas de k mais seulement de la valeur n de X_k ?

On désigne par r_n la probabilité de ruine de A, connaissant n. On a ainsi $r_0 = 1$ et $r_{3a} = 0$.

En considérant les deux valeurs que peut prendre X_{k+1} sachant que $X_k = n$, montrer [2] que $r_n = (1-p)r_{n-1} + pr_{n+1}$ et constater que la suite $n \longmapsto r^n$ vérifie la relation de récurrence (1) du B.

Exprimer alors, à l'aide de B. 2. b., le terme r_n en fonction de n et de a (lorsque $p = \dfrac{1}{2}$) ou en fonction de n, a et de $x = \dfrac{1-p}{p}$ $\left(\text{lorsque } p \neq \dfrac{1}{2}\right)$.

c. On désigne par r'_m la probabilité de ruine du joueur A$'$, connaissant son avoir m.

Montrer qu'on obtient r'_m en remplaçant, dans l'expression de r_n, n par m et p par $1-p$ $\left(\text{c'est-à-dire } x \text{ par } \dfrac{1}{x}\right)$. Écrire cette expression x de r'_m $\left(\text{pour } p = \dfrac{1}{2} \text{ et pour } p \neq \dfrac{1}{2}\right)$.

Vérifier la relation $r_a + r'_{2a} = 1 \quad (2)$.

2. En notant que r_a et r'_{2a} sont les probabilités de ruine de A et de A$'$ au début du match, on voit que le jeu est favorable au joueur A si $r_a < r'_{2a}$, c'est-à-dire, d'après la relation (2) précédente, si $2r_a < 1$.

Que vaut r_a lorsque $p = \dfrac{1}{2}$?

On prend $p \neq \dfrac{1}{2}$. Exprimer la différence $D_a = 2r_a - 1$ en fonction de x et de a.

Pour quelles valeurs de x a-t-on $D_a < 0$? (cf. le A 1.).

p étant fixé, supérieur à $\dfrac{1}{2}$, comment choisir a pour que le jeu soit favorable au joueur A ?

Application numérique : $p = 0,51$; utiliser le A 2. pour donner la plus petite valeur convenable de l'entier a.

1. Le candidat ne cherchera pas à définir l'espace de probabilité relatif à ce jeu, et se bornera à faire le raisonnement qui lui est suggéré.
2. Le candidat pourra admettre ce résultat