

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Paris juin 1976 ∞

EXERCICE 1

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{pour } x \leq 0 \\ f(x) = e^{-\frac{1}{x}} & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur \mathbb{R} . On examinera particulièrement le point $x = 0$.
2. Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} , et que sa fonction dérivée f' est continue.

EXERCICE 2

Une urne contient n boules; deux sont blanches, les autres sont noires. Elles sont, à part cela, identiques et on suppose que les tirages qui sont effectués donnent à chaque boule la même probabilité. On épuise l'urne en tirant les n boules, une à une, sans les remettre. On désigne par X la variable aléatoire égale au rang de la première boule blanche tirée.

1. Calculer la loi de X , c'est-à-dire, en fonction de n les diverses probabilités.

$$p_k = P\{X = k\}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

2. a. Calculer le rang moyen ou espérance $E(X)$ pour la loi obtenue. On rappelle que :

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- b. Sachant que $E(X) = \frac{n+1}{3}$, en déduire, par une considération de symétrie, l'espérance $E(Y)$ du rang Y de la deuxième boule blanche tirée.

PROBLÈME

P désigne, dans tout le problème, un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$. Dans tout le problème, λ désigne un réel quelconque et k un réel *strictement positif*. À tout couple de réels $(\lambda; k)$, ainsi constitué, on associe la courbe $C_{\lambda, k}$ dont une équation dans le repère \mathcal{R} est :

$$(1 + \lambda)x^2 + (1 - \lambda)y^2 = k.$$

Partie A

1. Étudier les courbes $C_{0, k}$, $C_{1, k}$ et $C_{-1, k}$.
2. a. Montrer que les deux coniques admettant respectivement pour équations :

$$\begin{aligned} 3x^2 + y^2 &= 12 \\ 3x^2 - y^2 &= 6 \end{aligned}$$

sont des courbes $C_{\lambda, k}$.

- b. Déterminer les éléments géométriques de ces coniques : foyers, sommets, asymptotes et les représenter sur deux figures distinctes.
3. On suppose λ différent de -1 , 0 et 1 . Le réel k étant fixé, discuter, suivant la valeur de λ , la nature (ellipse ou hyperbole) de la conique $C_{\lambda, k}$.
Préciser son axe focal et calculer en fonction de λ le carré e^2 de son excentricité.

Partie B

1. On considère l'application affine f_λ , de P dans P , qui au point M de coordonnées $(x; y)$ associe le point M' de coordonnées $(x'; y')$ tel que :

$$\begin{aligned}x' &= (1 + \lambda)x - \lambda y \\y' &= \lambda x + (1 - \lambda)y\end{aligned}$$

- a. Montrer que f_λ est une application bijective de P sur P . Comparer $f_{-\lambda}$ et l'application réciproque de f_λ notée f_λ^{-1} .
- b. On considère l'application θ_λ de P dans \mathbb{R} qui, au point M de coordonnées $(x; y)$ associe le réel :

$$(1 + \lambda)x^2 + (1 - \lambda)y^2.$$

Démontrer que, pour tout réel θ :

$$\theta_{-\lambda} \circ f_\lambda = \theta_\lambda$$

en déduire $\theta_\lambda \circ f_{-\lambda} = \theta_{-\lambda}$.

2. a. On note $f_\lambda(C_{\lambda, k})$ l'ensemble des images par f_λ des points de $C_{\lambda, k}$.
Démontrer que : $f_\lambda(C_{\lambda, k}) = C_{-\lambda, k}$.
- b. Représenter sur une même figure la courbe $C_{\frac{1}{2}, 6}$ et sa transformée par $f_{\frac{1}{2}}$ (on conseille de prendre pour unité 2 cm).
3. À chaque réel λ , on associe la droite (D_λ) d'équation :

$$(1 + \lambda)x + (1 - \lambda)y = 0.$$

- a. Montrer que, quel que soit λ , la droite (D_λ) n'a jamais la direction (δ) définie par le vecteur $\vec{i} + \vec{j}$.
- b. Soit s_λ la symétrie oblique d'axe (D_λ) et de direction (δ) . Montrer que s_λ conserve globalement $C_{\lambda, k}$.
Montrer que l'égalité : $f_\lambda = h \circ s_\lambda$ définit une transformation h indépendante de λ . Préciser la nature de cette transformation.
- c. À l'aide de la question b. précédente retrouver le résultat de 2. a.

Partie C

Dans toute cette partie on désigne par E la courbe $C_{\frac{1}{2}, 6}$ et par E' sa transformée par $f_{\frac{1}{2}}$. Les représentations graphiques ont été effectuées au B 2. b.

1. N désigne un point arbitraire de E . Placer sur la figure les points :

$$N, \quad s_{\frac{1}{2}}(N), \quad h(N) \quad \text{et} \quad f_{\frac{1}{2}}(N) = N'.$$

Montrer qu'ils sont alignés.

2. a. On considère un point M de \mathbb{P} , mobile, dont les coordonnées $(x; y)$ s'expriment en fonction du temps t (t décrit $\left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right]$) par :

$$x = 2 \sin t \quad ; \quad y = 2\sqrt{3} \cos t$$

Montrer que la trajectoire de M est la courbe E .

- b. Soit M' le point de coordonnées $(x'; y')$ tel que :

$$x' = 2\sqrt{3} \cos \beta \quad ; \quad y' = 2 \sin \beta.$$

Montrer qu'il existe un réel unique β de l'intervalle $\left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right]$ tel que $M' = f_{\frac{1}{2}}(M)$. Exprimer β en fonction de t .

3. a. Calculer les coordonnées à l'instant t , du vecteur vitesse du point M et du vecteur vitesse du point $M' = f_{\frac{1}{2}}(M)$.
- b. Soit M_0 la position du mobile M à l'instant $t_0 = 0$. Montrer que $M'_0 = f_{\frac{1}{2}}(M_0)$ est associé à $\beta = \frac{2\pi}{3}$. Montrer que les tangentes respectives en M_0 à E , en M'_0 à E' se coupent en un point de la droite Δ d'équation $x - y = 0$.
- c. Plus généralement, la propriété « l'intersection des tangentes aux points M et $M' = f_{\frac{1}{2}}(M)$, respectivement à E et à E' , appartient à Δ » est-elle vraie à tout instant ?