# Baccalauréat C Paris juin 1977

**EXERCICE 1** **3 POINTS**

1. Quel est le reste de la division par 8 du nombre $7^n$, $n$ désignant un entier naturel quelconque ?
2. Quel est l'ensemble des entiers naturels n tels que le nombre $7^n \cdot n + 4n + 1$ soit divisible par 8 ?

**EXERCICE 2** **4 POINTS**

1. Soit $n$ un entier naturel. Une variable aléatoire $X_n$ peut prendre les $n$ valeurs

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{k}{n}, \cdots, \frac{n}{n}$$

et elles seules, avec probabilités égales.
Calculer l'espérance mathématique de $X_n$ et trouver sa limite éventuelle quand $n \to +\infty$.

2. Soit $f$ une fonction numérique, définie et continue sur le segment $[0 ; 1]$.
Une variable aléatoire $Y_n$ peut prendre les $n$ valeurs

$$f\left(\frac{1}{n}\right), f\left(\frac{2}{n}\right), \cdots, f\left(\frac{k}{n}\right), \cdots, f\left(\frac{n}{n}\right)$$

et elles seules, avec probabilités égales.
Écrire l'espérance mathématique $\mathrm{E}(Y_n)$ de $Y_n$. Justifier que $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{E}(Y_n)$ existe : l'exprimer sous forme d'une intégrale.

3. $p$ étant un entier au moins égal à 1, calculer la limite de

$$\frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^{n} k^p \quad \text{lorsque } n \to +\infty.$$

**PROBLÈME** **13 POINTS**

Soit :
$\mathbb{C}^\star$ l'ensemble des nombres complexes non nuls,
$E$ un plan orienté rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$,
$E^\star$ le plan privé de O.
On considère l'application $f$ de $\mathbb{C}^\star$ dans $\mathbb{C}^\star$ qui, à $z$, associe $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$
et l'application $F$ de $E^\star$ dans $E^\star$ qui, à tout point $m$ d'affixe $z$, associe le point d'affixe $Z$ où $Z = \dfrac{1}{z^2}$.

## Partie A

1. Soit un nombre complexe $z$, de module $r$ non nul et d'argument $\theta$. Montrer que $Z$ s'écrit

$$Z = \frac{1}{r^2}(\cos 2\theta - \mathrm{i}\sin 2\theta).$$

2. L'application $f$ est-elle surjective ? Est-elle injective ? Etudier l'équation z = f(z).

3. **a.** On désigne par $m$ un point de $E^\star$ dont l'affixe a pour module 1.
   Construire son image par $F$.
   Représenter les points invariants par $F$.
   **b.** Étant donné un point $M$ de $E^\star$ dont l'affixe a pour module 1, quel est l'ensemble des points $m$ tels que $F(m) = M$ ? Construire ces points.
4. **a.** Soit $(d)$ une demi-droite de $E$, d'origine O. Construire l'image par $F$ de $(d^\star)$, où $(d^\star)$ désigne $d$ privée du point O.
   Quelle est l'image par $F$ d'une droite passant par O, mais privée de O ?
   **b.** Étant donné, dans $E$, une droite $(\Delta)$ passant par O, quel est l'ensemble des points $m$ tels que $F(m)$ appartienne à $(\Delta^\star)$, où $(\Delta^\star)$ désigne $(\Delta)$ privée de O ?

**Partie B**

On considère l'ensemble $(\gamma)$ des points de $E^\star$ dont l'affixe est

$$z = -2\cos^2\theta - 2\mathrm{i}\sin\theta\cos\theta,$$

où $\theta$ décrit l'intervalle $\left]\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{3\pi}{2}\right[$.

1. Démontrer que $(\gamma)$ est inclus dans un cercle passant par O.
2. Donner, en fonction de $\theta$, le module et un argument de l'affixe $z$ d'un point $m$ de $(\gamma)$).
   Exprimer, en fonction de $\tan\theta$, les coordonnées $X$ et $Y$ de $F(m)$.
   En déduire l'équation de l'image $(\Gamma)$ de $(\gamma)$ par l'application $F$.
   Quelle est la nature de $(\Gamma)$ ?
   Vérifier que les points I et J de $(\gamma)$ définis respectivement par $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ et $\theta = \dfrac{4\pi}{3}$ appartiennent à $(\Gamma)$. En expliquer la raison.