

Baccalauréat C Paris juin 1979

EXERCICE 1

4 POINTS

Déterminer les paires d'entiers naturels $\{a ; b\}$ vérifiant

$$m - 18d = 791$$

où m est le P. P. C. M. et d le P. G. C. D. des nombres a et b .

EXERCICE 2

4 POINTS

Le but de cet exercice est le calcul de

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^5 x} dx.$$

Pour tout entier naturel n on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^{2n+1} x} dx.$$

1. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que

$$\forall x \in \left[0 ; \frac{\pi}{4}\right], \quad \frac{1}{\cos x} = \frac{a \cos x}{1 - \sin x} + \frac{b \cos x}{1 + \sin x}.$$

En déduire le calcul de I_0 .

2. Montrer, par une intégration par parties, que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 2nI_n = (2n-1)I_{n-1} + \frac{2^n}{\sqrt{2}}.$$

3. En déduire le calcul de I .

N.B. On ne donnera pas de valeur décimale approchée de I_0 ou de I .

PROBLÈME

12 POINTS

Soit un plan affine euclidien \mathcal{P} muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

À tout point M de \mathcal{P} de coordonnées $(x ; y)$ dans le repère choisi, on associe le nombre complexe $z = x + iy$ qu'on appelle son affixe.

Soit F l'application de \mathbb{C} dans \mathbb{C} (\mathbb{C} désignant l'ensemble des nombres complexes) qui à z fait correspondre

$$z' = \frac{z}{1 + |z|}.$$

et soit Φ l'application de \mathcal{P} dans \mathcal{P} qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' .

Pour les figures et les représentations graphiques on pourra prendre 2 cm d'unité.

Partie A

1. On pose $z_1 = -2$ et $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$.

Soit M_1 et M_2 les points d'affixes z_1 et z_2 . Déterminer $z'_1 = F(z_1)$, $z'_2 = F(z_2)$ et placer sur une figure \mathcal{F} les points $M_1, M_2, M'_1 = \Phi(M_1), M'_2 = \Phi(M_2)$.

2. a. Soit l'application

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$$

Étudier les variations de f ; on étudiera en particulier la continuité et la dérivabilité.

Représenter graphiquement f dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(\Omega; \vec{i}, \vec{j})$; déterminer les asymptotes.

- b. On désigne par \mathcal{D}_0 la droite (O, \vec{u}) de \mathcal{P} . Montrer que $\Phi(\mathcal{D}_0)$ est une partie de \mathcal{D}_0 que l'on déterminera; montrer que la restriction de Φ à \mathcal{D}_0 est une application injective. Si M et N sont deux points distincts de \mathcal{D}_0 , quelle est l'image par Φ du segment $[MN]$?
3. Soit r une rotation de \mathcal{P} de centre O . Montrer que pour tout point M de \mathcal{P}

$$\Phi[r(M)] = r[\Phi(M)].$$

(On pourra associer à r une application de \mathbb{C} dans \mathbb{C} , de la forme $z \mapsto az$, a nombre complexe convenable).

4. Déterminer $\Phi(\mathcal{P})$; montrer que l'application F est injective. De même déterminer $F(\mathbb{C})$ et montrer que F est injective.

Partie B

Soit Δ l'application de $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ dans \mathbb{R}_+ qui au couple (M, N) de points de \mathcal{P} d'affixes respectifs (m, n) fait correspondre

$$\Delta(M, N) = |F(m) - F(n)| = \left| \frac{m}{1+|m|} - \frac{n}{1+|n|} \right|.$$

1. M_1 et M_2 étant définis en A 1, calculer :

$$\Delta(O, M_1), \Delta(O, M_2), \Delta(M_1, M_2).$$

(On pourra contrôler les calculs sur la figure \mathcal{F} .)

2. Vérifier que :

- a. Pour tout (M, N) de $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$:

$$\Delta(M, N) = 0 \iff (M = N);$$

- b. Pour tout (M, N) de $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$:

$$\Delta(M, N) = \Delta(N, M);$$

- c. Pour tout (M, N, P) de $\mathcal{P} \times \mathcal{P} \times \mathcal{P}$:

$$\Delta(M, P) \leq \Delta(M, N) + \Delta(M, P).$$

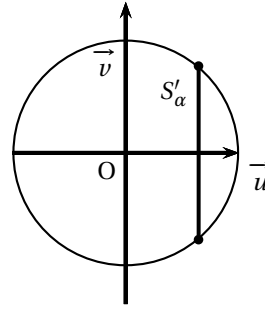
3. Montrer que le sous-ensemble de \mathbb{R} dont les éléments sont les réels de la forme $\Delta(M, N)$ où $M \in \mathcal{P}$, $N \in \mathcal{P}$, admet un plus petit majorant que l'on précisera.

Partie C

Soit C le cercle de centre O et de rayon 1.

Soit un réel $\alpha \in]0; \frac{\pi}{2}[$ et soit S'_α la corde du cercle privée de ses extrémités et perpendiculaire à la droite (O, \vec{u}) au point d'abscisse $\cos \alpha$.

On se propose d'étudier la partie S_α de \mathcal{P} formée des points dont l'image par Φ appartient à S'_α .



1. M' étant l'image de M par Φ , calculer les coordonnées $(x'; y')$ de M' en fonction des coordonnées $(x; y)$ de M . Former la relation (E) à vérifier par les coordonnées $(x; y)$ de M pour que son image M' appartienne à S'_α .
2. Déterminer S_α et tous ses éléments géométriques. Le candidat au le choix entre les deux méthodes suivantes :
 - a. Traduire la relation (E) en termes de distances. (En particulier on pourra considérer la distance de M à une droite convenable).
 - b. S_α est une partie d'une conique dont on formera une équation cartésienne que l'on réduira.
3. Construire $S_{\frac{\pi}{3}}$ et placer ses éléments géométriques.