∽ Baccalauréat C Paris juin 1981 ∾

EXERCICE 1

Pour chaque m réel strictement positif, on définit une application f_m de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout x associe

$$f_m(x) = \text{Log}\left(\text{e}^x + m\text{e}^{-x}\right).$$

(Log désigne la fonction logarithme népérien.)
On appelle $\mathscr{C}_m$ la courbe représentative de f_m dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Étudier les variations de f_m.
   b. Montrer que $\mathscr{C}_m$ admet deux asymptotes dont l'une est indépendante de m.
   c. Construire sur une même figure $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_{\frac{1}{16}}$.
2. Dans quelle transformation simple $\mathscr{C}_1$ a-t-elle pour image $\mathscr{C}_m$?
3. Discuter et résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f_m(x) = 0$.

EXERCICE 2

Déterminer les entiers naturels s'écrivant $\overline{abca}$ dans le système de numération décimale, divisibles par 7 et congrus à 1 modulo 99.

PROBLÈME

N.B. Dans ce problème, les questions 2., 3. et 4. de la partie B peuvent être traitées indépendamment de A.

Dans un plan affine rapporté à un repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, on désigne par A et B les points définis par $\overrightarrow{\text{OA}} = \vec{\imath}$ et $\overrightarrow{\text{OB}} = \vec{\jmath}$.
Soit v un réel donné ; on construit une suite de points $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :

A_0 est le barycentre de (O, $1+v$) et (A, $-v$) ;
A_1 est le barycentre de $(A_0,~1+v)$ et (O, $-v$) ;
A_{n+2} est le barycentre de $(A_{n+1},~1+v)$ et $(A_n,~-v)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie A

On désigne par x_n l'abscisse de $_n$.

1. Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $x_{n+1} = vx_n - v$.
2. On suppose, dans cette question, $v = 1$.
   Exprimer x_n en fonction de n et étudier la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. On suppose $v \neq 1$.
   a. On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $X_n = x_n + \lambda$; déterminer λ pour que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit géométrique.
   b. Exprimer X_n puis x_n en fonction de n et v.
   c. Étudier la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   d. Étudier les suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $v = 0$ et $v = -1$.

Partie B

1. Montrer qu'il existe une application affine unique f_v du plan affine telle que

$$f_v(\text{O}) = A_0, \quad f_v(\text{A}) = \text{O} \quad \text{et } f_v(\text{B}) = \text{B}.$$

   Si φ_v désigne l'endomorphisme associé à f_v, donner la matrice de φ_v dans la base $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{jmath}\right)$.
   Si un point M du plan de coordonnées $(x\,;\,y)$ a pour image par f_v, le point M' de coordonnées $(x'\,;\,y')$, donner les expressions de x' et y' en fonction de x, y et v.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_v\left(A_n\right) = A_{n+1}$.
3. Montrer que f_v admet une droite de points invariants notée D_v. Discuter, suivant les valeurs de v, la position de D_v.
4. Montrer que, quel que soit v, la droite (OA) est stable par f_v (i. e. f_v(OA) est inclus dans (OA)).
   On désigne par g_v l'application de (OA) dans (OA) définie par $g_v(M) = f_v(M)$ pour tout point M de la droite (OA). Discuter suivant les valeurs de v la nature de l'application gV.
5. On suppose $v = 1$. Donner une construction géométrique simple de l'image d'un point du plan par f_v. (On pourra utiliser l'application g_v pour $v = 1$ définie précédemment.)
6. On suppose $v \neq 1$. Soit m la projection sur D suivant la direction de (OA) d'un point M quelconque du plan. Montrer qu'il existe un réel k tel que pour tout point M, $\overrightarrow{mf_v(M)} = k\overrightarrow{mM}$.
   En déduire la nature de f_v pour $v = 0$ et $v = -1$.