Durée : 4 heures

Baccalauréat C 1985 Paris [1]

EXERCICE 1 **4 points**

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation :

$$z^3-(7+9\mathrm{i})z^2+7(-1+6\mathrm{i})z+13-33\mathrm{i}=0.\quad \text{(E)}$$

1. Montrer que (E) admet une unique solution réelle et la déterminer.

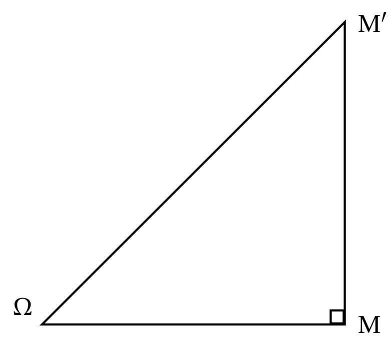
2. **a.** Résoudre (E).

b. Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$, les points A, B, C dont les affixes sont les solutions de (E). (On notera A celui dont l'abscisse est la plus grande).
Quelle est la nature du triangle ABC ?

3. Soit (D) la droite d'équation $x=6$, et (P) la parabole de directrice (D) et de foyer A.
Montrer que (P) contient B et C, préciser son sommet. Dessiner (P).

EXERCICE 2 **5 points**

Dans le plan P orienté, on considère trois points distincts Ω, M, M′ formant un triangle isocèle, rectangle en M, et de sens direct.



1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe S_Ω de centre Ω telle que $S_\Omega(\mathrm{M})=\mathrm{M}'$.

2. Soit ABC un triangle du plan P, de sens direct. À l'extérieur du triangle ABC, on construit le triangle isocèle ABR rectangle en B, le triangle isocèle BCP rectangle en C et le triangle isocèle CAQ, rectangle en A.

On note $\mathscr{S}_\mathrm{P}$, $\mathscr{S}_\mathrm{Q}$ et $\mathscr{S}_\mathrm{R}$ les similitudes directes de rapport $\sqrt{2}$, d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{4}$ et de centres respectifs P, Q et R.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application f :

$$f=\mathscr{S}_\mathrm{R}\circ\mathscr{S}_\mathrm{P}\circ\mathscr{S}_\mathrm{Q}.$$

(On pourra chercher l'image de A par f.)

1. Paris, Créteil, Versailles

3. Dans cette question, on suppose donné un triangle PQR du plan P, et on cherche à construire un triangle ABC tel que les constructions de la question 2. redonnent ce triangle PQR.

   a. Montrer que si un triangle ABC solution du problème existe, alors le point A est déterminé de manière unique.

   Par quelles rotations peut-on obtenir C, connaissant P, Q et A, puis B connaissant les autres points ?

   En déduire qu'il existe un seul triangle ABC répondant à la question.

   b. On veut maintenant construire ABC, dans le cas particulier où PQR est un triangle isocèle rectangle en Q de sens direct.

   On note I le milieu de [PR], I' le symétrique de R par rapport à Q et S le symétrique de P par rapport à Q.

   Déterminer $f(\mathrm{I})$; comparer les angles $\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{QI}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{QI}'}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{AI}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AI}'}}\right)$; en déduire que A appartient à un cercle que l'on précisera. Déterminer $f(\mathrm{Q})$; comparer les angles de droites $\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{SQ}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{SR}}}\right)$, et $\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AR}}}\right)$; en déduire que A appartient à un autre cercle que l'on précisera.

   Construire le triangle ABC. On fera une figure en prenant 8 cm comme longueur de [PQ].

PROBLÈME **11 points**

Le problème est composé de l'étude d'une suite de fonctions dépendant d'un paramètre, puis de la recherche d'une valeur approchée d'une solution d'une équation du type $f(x) = x$.

Partie A

Pour tout entier n strictement positif, on note f_n la fonction numérique de la variable réelle définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{(x+1)^n}$$

et on note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité 2 cm).

1. Déterminer la fonction dérivée $\left(f_n\right)'$ de f_n et donner l'expression de $\left(f_n\right)'$ en fonction de f_n et f_{n+1}.
2. Étudier les variations de f_n, et ses limites éventuelles en $-\infty, -1$ et $+\infty$. On distinguera les cas n pair et n impair.
3. Montrer que toutes les courbes $\mathscr{C}_n$ passent par un même point.
4. Déterminer la limite de $\dfrac{f_n(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$. Que peut-on en déduire pour les courbes $\mathscr{C}_n$?

   Tracer, sur deux figures distinctes, les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.
5. Pour tout entier n strictement positif, on note g_n la restriction de f_n à $]-\infty\ ;\ -1[$.

   Quelle est l'image de g_n ? Montrer que g_n induit une bijection de $]-\infty\ ;\ -1[$ sur son image, dont on étudiera la fonction réciproque h_n (on distinguera les cas n pair et n impair).

Partie B

Pour tout entier strictement positif n, on note :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et qu'elle converge.

2. Montrer que, pour tout entier n strictement positif,

$$\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right) \leqslant I_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n-1}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. Déterminer, en utilisant la relation de la question A. 1, une relation entre I_n et I_{n+1}. Montrer ensuite que : $\lim\limits_{n\to+\infty}(nI_{n+1}) = 1$.

En déduire que la suite $(nI_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, et déterminer sa limite.

Partie C

Dans cette partie, $n = 2$.

1. Montrer que l'équation $f_2(x) = x$ admet une solution unique α dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$.

Le but de la suite de cette partie est de déterminer une valeur approchée de α.

2. Étudier les variations de $\left(f_2\right)'$ dans $\left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$ et en déduire qu'il existe un réel k appartenant à l'intervalle $]-1\ ;\ 0[$ tel que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$ on ait :

$$k \leqslant \left(f_2\right)'(x) \leqslant 0.$$

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcll} u_0 & = & 1 & \\ u_{n+1} & = & f_2(u_n), & \text{pour tout } n \text{ entier naturel.}\end{array}\right.$$

a. Montrer que, pour tout entier n, u_n est élément de $\left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$

b. En remarquant que $u_{n+1} - \alpha = f_2(u_n) - f_2(\alpha)$, montrer en utilisant C 2. que pour tout entier naturel n :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant |k|\,|u_n - \alpha|.$$

c. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

4. En utilisant le sens de variation de f_2 dans $\left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$ montrer que pour tout entier naturel n on a $(u_{n+1} - \alpha)(u_n - \alpha) < 0$.

En déduire que α est compris entre u_n et u_{n+1}.

Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près, en justifiant la méthode employée.