

Durée : 4 heures

☞ Baccalauréat C Paris juin 1986 ☞

EXERCICE 1

4 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$; on prend comme unité graphique 1 cm.

On considère l'équation

$$z^3 - (6 + 3i)z^2 + (9 + 12i)z - 9(2 + 3i) = 0. \quad (E)$$

1.
 - a. Démontrer que (E) admet une solution imaginaire pure unique z_1 que l'on calculera.
 - b. Déterminer les autres solutions de (E), notées z_2 et z_3 .
2. Soit M_1, M_2, M_3 les points ayant respectivement pour affixes z_1, z_2, z_3 .
 - a. Prouver que le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral.
 - b. Déterminer les coordonnées du milieu I de $[M_2M_3]$ et de l'isobarycentre des points M_1, M_2, M_3 .
 - c. Placer les points M_1, I et G sur cette figure et indiquer une construction géométrique de M_2 et M_3 .

EXERCICE 2

4 points

Dans le plan orienté P, on considère un triangle ABC équilatéral direct, c'est à dire que l'angle (\vec{AB}, \vec{AC}) ait pour mesure $\frac{\pi}{3}$.

On désigne par r_1 la rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ et par r_2 la rotation de centre B et d'angle de mesure $\frac{2\pi}{3}$.

Pour tout point M du plan, on pose $N = r_1(M)$ et $M' = r_2(N)$. On pose $r = r_2 \circ r_1$.

1.
 - a. Soit D le symétrique de C par rapport à la droite (AB). Déterminer $r(D)$ et $r(B)$.
 - b. Montrer que r est la symétrie centrale par rapport au milieu Ω de [BD].
2. tr
 - a. Montrer que l'ensemble Γ des points M du plan tels que M, N et M' soient alignés est un cercle passant par les points A et Ω . (on pourra considérer l'angle $(\vec{M\Omega}, \vec{MA})$.)
 - b. Prouver que Γ admet [AD] pour diamètre et que le milieu I de [AB] appartient à Γ . Construire le cercle Γ .

PROBLÈME

12 points

Partie A

L'objectif de cette partie est d'étudier la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{1}{4}(e^x - e^{-x}).$$

et d'expliciter sa fonction réciproque g .

1. **a.** Résoudre l'équation différentielle $y'' - y = 0$.
- b.** Déterminer la solution φ de cette équation telle que :

$$\varphi(0) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi'(0) = \frac{1}{2}.$$

Comparer φ et f .

2. **a.** Étudier les variations de f , donner son tableau de variations et tracer sa courbe représentative \mathcal{C} dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ en prenant 1 cm pour unité.
- b.** Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0; +\infty[$ et que $2 < \alpha < 3$.
Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
3. **a.** Prouver que f est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .
Tracer la courbe représentative de la fonction réciproque g de f sur la même figure que \mathcal{C} .
- b.** Expliciter g en résolvant l'équation $f(x) = y$ où y est un nombre réel.

B. L'objectif de cette partie est d'étudier la fonction G définie sur \mathbb{R} par :

$$G(y) = \int_0^y \frac{2}{\sqrt{1+4t^2}} dt.$$

(On ne cherchera pas à calculer une primitive de $t \mapsto \frac{2}{\sqrt{1+4t^2}}$.)

1. **a.** Montrer que G est dérivable sur \mathbb{R} et calculer sa dérivée.
- b.** Déterminer le sens de variation de G .
- c.** Montrer que G est impaire.
2. **a.** Prouver que pour tout nombre réel $t \geq 0$,

$$\frac{1}{1+2t} \leq \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}.$$

- b.** En déduire par un minoration de G sur l'intervalle $[0; +\infty[$ que :

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} G(y) = +\infty.$$

3. **a.** Montrer que G est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .
b. Soit F la fonction réciproque de G . Montrer que F est dérivable sur \mathbb{R} et que pour tout nombre réel x :

$$F'(x) = \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4[F(x)]^2}.$$

- c.** En déduire que F est deux fois dérivable sur \mathbb{R} et que $F'' - F = 0$.
 Calculer $F(0)$ et $F'(0)$.
d. Prouver que $F = f$ et que $G = g$.
e. Contrôler ce dernier résultat grâce à un calcul direct de la dérivée de g .
 4. On se propose d'étudier le comportement asymptotique de G au voisinage de $+\infty$, en comparant $\frac{2}{\sqrt{1+4t^2}}$ à $\frac{1}{t}$.

Plus précisément, pour tout nombre réel $t > 1$, on pose :

$$h(t) = \frac{1}{t} - \frac{2}{\sqrt{1+4t^2}}$$

et pour tout nombre réel $y \geq 1$, on pose :

$$H(y) = \int_1^y h(t) dt.$$

- a.** Montrer que, pour tout $t \geq 1$, $0 \leq h(t) \leq \frac{1}{8t^3}$.
b. En déduire que $H(y)$ admet une limite finie (qu'on ne demande pas d'explicitier) lorsque y tend vers $+\infty$.
c. Prouver que $G(y) - \ln y$ admet une limite finie ℓ lorsque y tend vers $+\infty$.
d. Calculer ℓ grâce à la relation $G = g$.