Durée : 4 heures

Baccalauréat C Paris septembre 1969

EXERCICE 1

Les nombres a, b, c sont des nombres entiers appartenant à l'ensemble $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$.
On représente par $\overline{abc}$ le nombre $5^2a+5b+c$.

1. Montrer que $\overline{abc}$ est divisible par 4 si, et seulement si, $a+b+c$ est divisible par 4.
2. Montrer que $\overline{abc}$ est divisible par 6 si, et seulement si, $a-b+c$ est divisible par 6.

EXERCICE 2

Un point mobile M dont le mouvement est rapporté à un repère orthonormé a pour coordonnées à l'instant t

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t^2,\\ y & = & \dfrac{t^4}{4} - \text{Log}\, t,\end{array}\right.$$

Log désignant le logarithme népérien.

1. Construire la trajectoire, (C), du point M. Calculer la longueur du vecteur vitesse du point M à l'instant t.
2. On oriente (C) dans le sens des x croissants et l'on prend pour origine des arcs la position du mobile à l'instant $t = 1$. Déterminer la loi horaire du mouvement, donnant l'arc en fonction du temps.

PROBLÈME

1. **a.** Montrer que toute équation du 4^e^ degré en X, à coefficients réels, dont on a rendu le coefficient de X^4 égal à 1,

$$(1) \qquad X^4+AX^3+BX^2+CX+D=0$$

peut être ramenée, par un changement d'inconnue de la forme $X = \alpha + x$, à une équation de la forme

$$(2) \qquad x^4+ax^2+bx+c=0.$$

b. Montrer que l'équation (2) peut se mettre, d'une infinité de façons, sous la forme

$$(3) \qquad T^2+T'=0,$$

T et T' étant deux polynômes du second degré en x, T étant nécessairement de la forme

$$T=x^2+\beta.$$

On posera

$$T'=ux^2+vx+w$$

et l'on calculera u, v et w en fonction de a, b, c et β.

c. Montrer que le polynôme T' peut être mis sous la forme

$$T' = u(x+y)^2,$$

pourvu que β soit racine d'une équation du 3e degré,

$$\varphi(\beta) = 0,$$

que l'on formera.

En déduire que, si l'on peut trouver une racine de l'équation $\varphi(\beta) = 0$, on peut résoudre l'équation (1).

[On rappelle que l'on peut factoriser, c'est-à-dire décomposer en un produit de facteurs, l'expression $M^2 + N^2$, en l'écrivant $(M + \mathrm{i}N)(M + \mathrm{i}N)$.]

Cette méthode a été inventée par le mathématicien bolonais Ferrari (1522-1565) et ramène ainsi la "résolution d'une équation du 4e degré à celle d'une équation du 3e degré.

2. Appliquer ce qui précède à l'équation

$$(4) \qquad f(x) = x^4 + 3x^2 + 6x + 10 = 0.$$

Calculer dans ce cas particulier les racines de l'équation $\varphi(\beta) = 0$ (l'une de ces racines est 1).

En déduire trois factorisations du polynôme $f(x)$ en un produit de deux trinômes à coefficients réels ou complexes et la résolution de l'équation (4).

Représenter les images des racines dans le plan complexe.

Quelle est leur somme et quel est leur produit ?

3. Résoudre l'équation

$$(5) \qquad F(X) = X^4 - 4X^3 + 9X^2 - 4X + 8 = 0.$$

Quels sont les modules et les arguments des racines ?

Quelle est leur somme et quel est leur produit ?

Factoriser $F(X)$ sur le corps des réels.