**Durée : 4 heures**

# Baccalauréat C septembre 1974 Paris

**EXERCICE 1** **4 points**

On désigne par E un espace affine de dimension 3, par A, B, C trois points fixes de E, non alignés, et l'on donne

— un point P, quelconque de E,

— trois nombres réels $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

Trouver un point $M$ de E tel que $\left(M,\ \overrightarrow{M\text{A}},\ \overrightarrow{M\text{B}},\ \overrightarrow{M\text{C}}\right)$ soit un repère de E et que les coordonnées du point P dans ce repère soient les nombres $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ [on cherchera, à cet effet, à déterminer $\overrightarrow{\text{P}M}$, et l'on discutera l'existence et l'unicité de $M$ selon les valeurs de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ et selon la position du point P.]

**EXERCICE 2** **4 points**

$\mathbb{Z}$ désignant l'ensemble des nombres entiers relatifs, et $p$ un nombre premier donné, on considère l'anneau $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ dont les éléments sont notés

$$\overline{0},\ \overline{1},\ \overline{2},\ \ldots,\ \overline{p^2-2},\ \overline{p^2-1}.$$

1. Dans ce qui suit la lettre $x$ représente un entier naturel tel que $0 < x < p^2$.

   – Montrer que si $x$ est diviseur de zéro (c'est-à-dire s'il existe dans l'anneau un élément $\overline{y}$ différent de $\overline{0}$ tel que $\overline{x}\,.\,\overline{y} = \overline{0}$, alors $p$ divise $x$.

   – Réciproquement, montrer que si $p$ divise $x$, alors $x$ est diviseur de zéro.

   Combien l'anneau $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ a-t-il de diviseurs de zéro ?

2. **a.** Quel est l'ensemble des diviseurs de zéro de l'anneau $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ ? Résoudre, dans l'anneau $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$, l'équation

   $$\left(\overline{2}X + \overline{5}\right)\left(X + \overline{4}\right) = \overline{0}$$

   **b.** En déduire l'ensemble des nombres entiers $n$ pour lesquels $(2n+5)(n+4)$ est divisible par 9.

**PROBLÈME** **12 points**

Soient $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes, $\mathbb{C}^\star$ l'ensemble $\mathbb{C}$ privé de O, et $f$ l'application de $\mathbb{C}^\star$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right).$$

On désigne par P un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé d'origine O ; si un point $m$ de P a pour coordonnées $x$ et $y$, le nombre complexe $z = x + \text{i}y$ est l'affixe de ce point.
Soient $\text{P}^\star$ l'ensemble P privé du point O, et $F$ l'application de $\text{P}^\star$ dans P dans laquelle tout point $m$ de $\text{P}^\star$, d'affixe $z$, a pour image le point $M$ d'affixe $Z = f(z)$.

1. **a.** Montrer qu'il existe deux points de $\text{P}^\star$ invariants par $F$. Quelles sont leurs affixes ?

   **b.** Montrer que tout point $M$ de P, autre que ces points invariants, est l'image par $F$ de deux points de $\text{P}^\star$, dont $M$ est le milieu.

**c.** Marquer dans le plan P, en prenant 5 cm pour unité de longueur, 1 le point $m$ d'affixe $z = 1 + \mathrm{i}$, puis le point $m'$ d'affixe $-\dfrac{1}{z}$, enfin le point
$M = F(m)$.

**2. a.** Soit $\mathbb{R}^\star$ l'ensemble des nombres réels privé de 0, et soit $\varphi$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^\star$ par :

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right).$$

Étudier la variation de la fonction $\varphi$ (on ne demande pas de tracer la courbe représentative).

En déduire l'image par l'application $F$ de l'ensemble des points d'ordonnée nulle de $\mathrm{P}^\star$.

**b.** Montrer que si $z$ est imaginaire pur (et non nul), $f(z)$ est aussi imaginaire pur.

On écrit alors $f(\mathrm{i}y) = \mathrm{i}Y$ ($y$ et $Y$ réels), et l'on désigne par $g$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^\star$ par $g(y) = Y$.

Étudier la variation de la fonction $g$ (on ne demande pas de tracer la courbe représentative).

En déduire l'image par l'application $F$ de l'ensemble des points d'abscisse nulle de $\mathrm{P}^\star$.

**3. a.** Soient $z \in \mathbb{C}^\star$ et $Z = f(z)$. Montrer que si $z \neq \mathrm{i}$, le quotient $\dfrac{Z+\mathrm{i}}{Z-\mathrm{i}}$ s exprime très simplement en fonction de $\dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}$.

On désigne par U et U′ les points de P d'affixes respectives i et −i. Soient $m$ un point de $\mathrm{P}^\star$ distinct de U et de U′, et $M = F(m)$.

Trouver une relation simple entre les angles $\left(\overrightarrow{m\mathrm{U}},\ \overrightarrow{m\mathrm{U}'}\right)$ et $\left(\overrightarrow{M\mathrm{U}},\ \overrightarrow{M\mathrm{U}'}\right)$.

**b.** Soit $\Gamma_1$ le cercle de diamètre UU′.

En utilisant la relation angulaire précédente, trouver :

— l'image de $\Gamma_1$ par $F$ ;

— l'ensemble $\gamma$ des points $m$ de $\mathrm{P}^\star$ tels que $F(m)$ appartienne à $\Gamma_1$ ?

Dessiner $\gamma$.

**4. a.** Soient $z = x + \mathrm{i}y$ et $f(z) = Z = X + \mathrm{i}Y$ ($x$, $y$, $X$, $Y$ réels).

Exprimer $X$ et $Y$ en fonction de $x$ et de $y$.

**b.** On désigne par $\Gamma_r$ le cercle du plan P de centre O et de rayon $r$, et l'on suppose $r \neq 1$.

Trouver la nature de l'image $E_r$ de $\Gamma_r$ par l'application $F$ ($x$ et $y$ étant les coordonnées d'un point de $\Gamma_r$, on pourra poser $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$).

**c.** Trouver une relation entre $r$ et $r'$ exprimant que $\Gamma_r$ et $\Gamma_{r'}$ ont la même image, et dessiner alors $\Gamma_r$, $\Gamma_{r'}$ et $E_r$ lorsque $r = 2$.

**5.** Soit $D$ la droite de P d'équation $x = y$, et $D^\star$ l'ensemble $D$ privé du point O.

Calculer en fonction du nombre réel non nul $x$ la partie réelle $X$ et la partie imaginaire $Y$ de $f(x + \mathrm{i}x)$, puis calculer $Y^2 - X^2$.

Déterminer alors $F\left(D^\star\right)$.

Existe-t-il une autre droite $D_1$ telle que $F\left(D_1^\star\right) = F\left(D^\star\right)$ ?

**N. B.** - Les questions 3., 4. et 5. peuvent être traitées dans un ordre quelconque.