

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Paris septembre 1975 ∞

EXERCICE 1

On désigne par n un entier naturel non nul, par $n!$ le produit des n premiers entiers naturels non nuls, et par a_n le produit $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)$ des n premiers entiers naturels impairs. Démontrer l'égalité

$$a_n n! \cdot 2^n = (2n)!$$

En déduire que le produit $(n+1)(n+2) \dots (2n-1)2n$ est divisible par 2^n et que, pour tout entier naturel p tel que ce produit soit divisible par 2^p , on a $p \leq n$.

EXERCICE 2

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'axes Ox, Oy .

On considère l'application f du plan P dans lui-même qui associe à un point m de P d'affixe $z = x + iy$ le point M dont l'affixe Z est égale à z^2 .

Exprimer en fonction des coordonnées x, y de m les coordonnées X, Y de M .

Trouver et dessiner l'image $f(d)$ de la droite d'équation $x = \frac{3}{2}$; préciser les éléments caractéristiques de la courbe $f(d)$ permettant d'en donner une définition géométrique simple.

Montrer qu'il existe une autre droite, notée d' , telle que $f(d') = f(d)$.

PROBLÈME

On considère un espace vectoriel \mathcal{E} sur \mathbb{R} , et l'on désigne par i l'application identique de \mathcal{E} dans lui-même, et par θ l'application nulle, dans laquelle tout vecteur de \mathcal{E} a pour image le vecteur nul, noté $\vec{0}$, de \mathcal{E} .

On rappelle que, si φ et φ' sont deux applications linéaires de \mathcal{E} dans lui-même, $\varphi + \varphi'$ est l'application linéaire dans laquelle tout vecteur \vec{x} de \mathcal{E} a pour image le vecteur $\varphi(\vec{x}) + \varphi'(\vec{x})$, et que si λ est un nombre réel, $\lambda \cdot \varphi$ est l'application linéaire dans laquelle \vec{x} a pour image $\lambda \cdot \varphi(\vec{x})$.

On convient de noter φ^2 l'application composée $\varphi \circ \varphi$, φ^3 l'application $\varphi \circ \varphi^2$, et de façon générale φ^n l'application $\varphi \circ \varphi^{n-1}$ (n entier supérieur à 1).

1. On désigne par j une application linéaire de \mathcal{E} dans \mathcal{E} , distincte de θ et telle que $j^2 = \theta$ (on admettra l'existence de telles applications, qui sera prouvée au 4. pour un espace vectoriel \mathcal{E} de dimension 3).

À tout couple $(a; b)$ de nombres réels on associe l'application linéaire $ai + bj$, notée f , de \mathcal{E} dans \mathcal{E} . Soit \mathcal{F} l'ensemble de ces applications f .

- a. Montrer que \mathcal{F} , muni de l'addition des applications et de la multiplication par un nombre réel, est un espace vectoriel sur \mathbb{R} , dont (i, j) est une base.
 - b. Quelle est l'application linéaire composée de $ai + bj$ et de $a'i + b'j$?
Déduire du résultat que \mathcal{F} , muni de l'addition et de la composition des applications, est un anneau commutatif. Quels sont ses « diviseurs de zéro »?
2. Soit f une application donnée de \mathcal{F} , de coordonnées a, b dans la base (i, j) , et soit n un nombre entier supérieur à 1.
 - a. Déterminer les coordonnées de f^n dans la base (i, j) .

- b. À quelle condition f admet-elle dans \mathcal{F} une application réciproque? (On la notera f^{-1}).
On pose alors $f^0 = i$ et $f^{-n} = (f^{-1})^n$.
Préciser les coordonnées de f^{-n} dans la base (i, j) . Vérifier que, pour tout entier relatif m ,

$$f^m = a^p m i + m b a^{m-1} j.$$

3. On appelle Π un plan affine, rapporté à un repère \mathcal{R} d'axes Ox, Oy , et l'on considère l'application p de \mathbb{Z} dans Π par laquelle l'entier relatif m a pour image le point $p(m)$ de Π dont les coordonnées dans le repère \mathcal{R} sont

$$\begin{cases} x_m = a^m & \text{et} \\ y_m = m b a^{m-1}. \end{cases}$$

On se propose d'étudier cette application lorsque a est donné, différent de 0, et $b = a \text{Log}|a|$ (le symbole Log désignant le logarithme népérien).

- a. Montrer que tous les points $p(m)$ appartiennent à la courbe Γ de Π d'équation $y = x \text{Log}|x|$. (On pourra étudier successivement les cas $a > 0$ et $a < 0$).
- b. Étudier la fonction numérique h définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par $h(x) = x \text{Log}|x|$, et tracer la courbe Γ , en supposant le repère orthonormé et en prenant pour unité de longueur 5 cm.
- c. Comparer les demi-droites Δ_m et Δ_{-m} d'origine O contenant respectivement les points $p(m)$ et $p(-m)$.

Rechercher si x_m et y_m admettent des limites lorsque m tend vers $+\infty$, ou vers $-\infty$.

Marquer sur Γ les points $p(m)$ correspondant aux valeurs $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ de l'entier m , en prenant successivement :

$$\begin{aligned} a &= \frac{5}{4} && \text{[on notera alors } P_m \text{ les points } p(m)\text{]}, \\ a &= \frac{4}{5} && \text{[on notera alors } P'_m \text{ les points } p(m)\text{]}, \\ a &= -\frac{5}{4} && \text{[on notera alors } Q_m \text{ les points } p(m)\text{]} \end{aligned}$$

4. On suppose dans cette question que l'espace vectoriel \mathcal{E} est de dimension 3.

- a. Soit $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ une base de \mathcal{E} , et soit g l'application linéaire de \mathcal{E} dans \mathcal{E} définie par :

$$\begin{cases} g(u) = 2\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}, \\ g(v) = -2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}, \\ g(w) = 2\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}. \end{cases}$$

Calculer $g^2(u), g^2(v), g^2(w)$, et préciser ce qu'est l'application g^2 .

- b. On désigne (comme au 1.) par j une application linéaire de \mathcal{E} dans \mathcal{E} , distincte de l'application nulle θ , et telle que $j^2 = \theta$. On note \mathcal{N} le noyau de j .

Montrer successivement que :

- \mathcal{E} est différent de \mathcal{N} ,
- \mathcal{N} est différent de θ ,
- \mathcal{E} n'est pas une droite vectorielle de \mathcal{E} ; (on pourra, à cet effet, partir de l'hypothèse que \mathcal{N} est une droite vectorielle D , prendre une base $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma})$ de \mathcal{E} avec $\vec{\gamma} \in D$, étudier alors le noyau de j et aboutir à une contradiction).

Conclure, en prenant un vecteur \vec{U} de \mathcal{E} n'appartenant pas à \mathcal{N} , qu'il existe une base $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})$ de \mathcal{E} telle que j soit définie par

$$j(\vec{U}) = \vec{V}, j(\vec{V}) = \theta, j(\vec{W}) = \theta.$$