∽ Baccalauréat C Paris septembre 1976 ∾

EXERCICE 1

Soit n un entier naturel, non nul. On considère les entiers A et B :

$$A = 3n^2 \qquad B = n(2n+1)$$

Déterminer suivant les valeurs de n, le plus grand commun diviseur de A et B.

EXERCICE 2

On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation :

$$(1) \qquad mz^4 + (m - \mathrm{i})z^2 - \mathrm{i} = 0$$

où z désigne l'inconnue et i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$, et où m désigne un paramètre.

1. On suppose ici m réel ; résoudre l'équation.
2. On suppose ici m complexe, de module ρ et d'argument θ ; résoudre l'équation.
3. Trouver l'ensemble E des valeurs du paramètre (réelles ou complexes) pour lesquelles toutes les solutions de (1) sont de même module.

PROBLÈME

Partie A

On désigne par Log la fonction logarithme népérien.

1. On considère la fonction f qui, à x réel, associe

$$f(x) = \mathrm{Log}\,(|\mathrm{Log}\,x|)$$

Préciser son domaine de définition puis calculer, k étant un réel arbitraire, $f\left(\mathrm{e}^k\right)$.
Etudier la fonction f et construire la courbe représentative (C) de f dans un plan P rapporté à un repère orthonormé (unité 2 cm).
Donner, s'il y en a, les points d'intersection de (C) et des axes de coordonnées, les tangentes à (C) en ces points.

2. Soient g et h les fonctions de la variable réelle x définies respectivement par

$$\begin{array}{rcl} g(x) & = & \mathrm{Log}\,(\mathrm{Log}\,x) \\ h(x) & = & \mathrm{Log}\,\left(\left|\mathrm{Log}\,(|x|)\right|\right) \end{array}$$

Préciser leurs domaines de définition et, en utilisant la question précédente, indiquer leurs représentations graphiques dans le plan P.

Partie B

On considère la fonction φ, de la variable réelle x , définie par

$$\varphi(x) = \frac{1}{x\,\mathrm{Log}\,(|x|)}$$

1. Préciser son domaine de définition ; étudier cette fonction et construire sa représentation graphique (Γ) dans un plan (P') rapporté à un repère orthonormé (unité : 2 cm). Calculer, k étant un réel non nul, $\varphi\left(\mathrm{e}^k\right)$.
2. Soit α un réel strictement supérieur à un. On désigne par $D(\alpha)$ la partie du plan (P$'$) ensemble des points $M(x\,;\,y)$ tels que :
   - x est compris entre α et e
   - $0 \leqslant y \leqslant \varphi(x)$.

   Calculer l'aire $\mathscr{A}(\alpha)$ de $D(\alpha)$. Étudier les limites de $\mathscr{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers un, et lorsque α tend vers $+\infty$.
3. On pose, pour tout élément x du domaine de définition de φ :

$$\psi_1(x) = \varphi(x) - x$$

   a. Montrer que l'équation :

$$(1) \qquad \psi_1(x) = 0$$

   admet dans $\mathbb{R}_+$ une racine unique, que l'on notera α. Montrer que $\alpha > 1$.

   b. Exprimer, au moyen de α, les racines de l'équation (1) dans $\mathbb{R}$.

   c. En déduire l'ensemble E des points d'intersection de (Γ) et de la première bissectrice des axes de coordonnées.

   d. En s'aidant du dessin, trouver un encadrement de α par deux réels α_1 et α_2 distants de 0,1. On pourra commencer par localiser approximativement α sur un intervalle I, puis on comparera x^{-2} et Log x pour des valeurs de x appartenant à I et formant une progression arithmétique de raison 0, 1.
4. En étudiant le signe de la fonction ψ_2 définie par

$$\psi_2(x) = \varphi(x) + x$$

   montrer que (Γ) et la seconde bissectrice des axes de coordonnées n'ont aucun point commun.

Partie C

On considère la fonction t, définie sur une partie de $\mathbb{C}$, telle que : 1

$$t(z) = \frac{1}{z\,\mathrm{Log}|z|}$$

1. **a.** Déterminer le domaine D_t de définition de t.

   b. L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes $x+\mathrm{i}y$ est représenté à l'aide des points $M(x\,;\,y)$ d'un plan P_1 muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v}\right)$.

   Déterminer lorsque z décrit D_t l'ensemble E_1 des points M d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$.

   On associe à t l'application T de E_1 dans P_1 qui, au point M d'affixe z, fait correspondre le point $M' = T(M)$ d'affixe $z' = t(z)$.
2. Exprimer le module et l'argument de $z' = t(z)$ au moyen de ceux de z.
3. En utilisant le résultat de B 3. déterminer les points de P_1 invariants par T.
4. Déterminer l'ensemble des points M du domaine de définition de T, qui sont tels que l'origine O, le point M et son image $M' = T(M)$ soient alignés,

5. Quel est le transformé par T d'un cercle de centre O et de rayon R strictement positif et différent de l'unité.

Données numériques approchées :

x	0,5	1	2
e^{x}	1,649	2,718	7,389
e^{-x}	0,607	0,368	0,135