∽ Baccalauréat C Paris, Créteil, Versailles septembre 1980 ∾

EXERCICE 1

1. **a.** Soit f l'application de $]1~;~+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}.$$

Trouver une primitive F de f.

b. Soit g l'application de v dans $\mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \frac{1}{x\left(x^2-1\right)}.$$

Trouver trois constantes réelles a, b et c, telles que pour tout x de l'intervalle $]1~;~+\infty[$ on ait abc

$$g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}.$$

Trouver une primitive G de g.

2. **a.** Soit α un nombre réel supérieur à 2. En utilisant les résultats obtenus précédemment calculer

$$I(\alpha) = \int_2^{\alpha} \frac{x\mathrm{Log}x}{\left(x^2-1\right)^2}\,\mathrm{d}x.$$

b. Déterminer $\displaystyle\lim_{\alpha\to+\infty} I(\alpha)$.

Calculer une valeur approchée de cette limite.

EXERCICE 2

Soit P un plan affine euclidien orienté muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$. À tout point M de coordonnées $(x~;~y)$ on associe son affixe $z = x + \mathrm{i}y$ élément de $\mathbb{C}$. On pose $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$.
Soit s l'application de P dans P qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe

$$z' = 2\mathrm{i}\overline{z} - 3.$$

1. s est la composée d'une homothétie de centre I et de rapport positif k et d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite D qui passe par I; déterminer I, k, D.

2. Déterminer l'ensemble des points M du plan P tels que O, M et M' soient alignés.
Donner sa nature et ses éléments; le tracer.

PROBLÈME

Soit P un plan vectoriel euclidien muni d'une base orthonormée $\left(\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$ et $\mathscr{P}$ un plan affine euclidien admettant P pour plan vectoriel associé; soit $\left(\mathrm{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$ un repère orthonormé de $\mathscr{P}$.

Partie A

Soit D_0 la droite vectorielle de P admettant $\overrightarrow{i'} = \overrightarrow{\imath} + 2\overrightarrow{\jmath}$ pour base et soit Δ la droite vectorielle de P admettant le vecteur $\overrightarrow{j'} = 2\overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath}$ pour base.
Soit φ_0 la projection vectorielle orthogonale sur D_0 et Ψ la projection vectorielle orthogonale sur Δ.
On considère l'ensemble Φ des endomorphismes φ_a de P définis par $\varphi_a = a\Psi + \varphi_0$, a désignant un réel non nul.

1. On désigne respectivement par A_0, B et A_a les matrices des endomorphismes φ_0, Ψ et φ_a relativement à la base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Déterminer ces trois matrices. (On note $\overrightarrow{V}$ un vecteur de P de coordonnées $(X~;~Y)$, $\overrightarrow{V'}$ sa projection orthogonale sur D_0 et $\overrightarrow{V''}$ sa projection orthogonale sur Δ ; on pose $\overrightarrow{W} = \varphi_a\left(\overrightarrow{V}\right)$. ‘
Illustrer les données par une figure en prenant 2 cm pour unité graphique et en choisissant pour vecteur $\overrightarrow{V}$ le vecteur de coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}~;~\dfrac{1}{2}\right)$; on représentera les vecteurs $\overrightarrow{V'}$, $\overrightarrow{V''}$ et $\overrightarrow{W}$ correspondants, a étant choisi égal à -4).

2. Montrer que Φ muni de la loi de composition des endomorphismes notée $\circ$ est un groupe isomorphe au groupe des réels non nuls muni de la multiplication.

3. Déterminer les endomorphismes orthogonaux (ou isométries vectorielles) de Φ et en donner une détermination géométrique.

Partie B

Soit f l'application affine de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui au point M de coordonnées $(x~;~y)$ associe le point M' de coordonnées $\left(x'~;~y'\right)$ de façon que

$$\left\{\begin{array}{l c l} x' & = & -3x+2y+2\\ y' & = & 2x -1.\end{array}\right.$$

1. a. Vérifier que $\varphi_{-4} = (-4)\Psi + \varphi_0$ est l'endomorphisme associé à f.

b. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des points invariants par f.

c. On note m la projection orthogonale de M sur $\mathcal{D}$; comparer mM et mM' ; en déduire une construction simple de M'.

2. Soit $\mathcal{H}$ la courbe de $\mathcal{P}$ d'équation

$$16y^2 - 48xy - 12x + 32y - 9 = 0.$$

a. Mettre cette équation sous la forme $x = g(y)$; étudier les variations de g et construire $\mathcal{H}$.

b. Former une équation cartésienne de $\mathcal{H}' = f(\mathcal{H})$ et tracer $\mathcal{H}'$.
$\left(f(\mathcal{H})\right.$ est l'image de $\mathcal{H}$ par l'application $\left.f\right)$.
On vérifiera que $\mathcal{H}'$ admet O pour centre.

c. Vérifier par la figure (on indiquera comment) et par les calculs que les centres et les asymptotes de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{P}'$ se correspondent par f.