Durée : 4 heures

Baccalauréat C septembre 1982 Paris [1]

EXERCICE 1 **4 points**

Dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ on considère l'ensemble E des points M dont les coordonnées $(x\,;\,y)$ vérifient la relation :

$$(x-1)^2+(y-1)^2=\left(\frac{x+y-4}{2}\right)^2.$$

1. Démontrer que E est une conique de centre O ; préciser les éléments caractéristiques : foyers, directrices, excentricité, axe principal.
2. On définit une application f du plan euclidien orienté dans lui-même qui à chaque point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z'=\frac{1-\mathrm{i}}{2}z.$$

   Quelle est la nature de l'application f ?
   Préciser les éléments caractéristiques de f.
3. Déterminer l'image de E par f ; on précisera les éléments caractéristiques de cette image.

PROBLÈME **12 points**

I

On définit une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout x associe

$$f(x)=\frac{x^2+x}{x^2-4x+5}.$$

On appelle C la courbe représentative de f dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Étudier les variations de f.
   b. Préciser le nombre de points d'intersection de la courbe C avec l'unique asymptote.
   c. Étudier la position de la courbe au voisinage de l'origine par rapport à la première bissectrice.
   d. Construire C. (On prendra 1 cm pour unité.)
2. On définit une application g de $[0\,;\,1]$ dans $[0\,;\,1]$ par $g(x)=f(x)$.
   a. Démontrer que l'application g admet une fonction réciproque g^{-1}.
   b. Construire la courbe représentative de g^{-1} sur la figure précédente.
   c. Déterminer explicitement la fonction g^{-1}.
   (On sera amené à résoudre une équation du second degré dont l'une des racines définira la fonction réciproque.)

1. Créteil, Versailles

3. Soit u_0 un nombre réel tel que $0 < u_0 < 1$. On définit par récurrence une suite infinie $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant :

$$u_1 = g\left(u_0\right), \quad u_n = g\left(u_{n-1}\right) \quad \text{pour } n \geqslant 1.$$

a. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b. On suppose que $0 < u_0 \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Vérifier que pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$, on a $x2 - 4x + 5 \geqslant 2$ et en déduire que $u_1 \leqslant \dfrac{3}{4}u_0$.

Démontrer alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers une limite quand n tend vers $+\infty$.

II

a, b, c désignant des constantes réelles, on appelle $\mathscr{F}$ l'ensemble des applications $f_{a,\ b,\ c}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout x associe :

$$f_{a,\ b,\ c}(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 - 4x + 5}.$$

On appelle $C_{a,\ b,\ c}$ la courbe représentative de $f_{a,\ b,\ c}$.

1. **a.** Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur a, b, c pour que chaque courbe $C_{a,\ b,\ c}$ et l'asymptote correspondante se coupent en un point ; ce point est-il unique ?

b. On appelle $\mathscr{E}$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Démontrer que $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$ de dimension trois dont on donnera une base.

2. On appelle φ l'application qui à chaque fonction $f_{a,\ b,\ c}$ appartenant à $\mathscr{F}$ associe la fonction $\varphi\left(f_{a,\ b,\ c}\right)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi\left(f_{a,\ b,\ c}\right)(x) = f_{a,\ b,\ c}(4 - x).$$

a. Démontrer que $\varphi\left(f_{a,\ b,\ c}\right)$ appartient à $\mathscr{F}$ et que φ est un automorphisme de $\mathscr{F}$.

Déterminer $\varphi \circ \varphi$.

Trouver les fonctions $f_{a,\ b,\ c}$ telles que $\varphi\left(f_{a,\ b,\ c}\right) = f_{a,\ b,\ c}$.

En déduire la nature de l'application φ.

Donner alors un élément de symétrie des courbes $C_{a,\ b,\ c}$ correspondantes.

b. Trouver les fonctions $f_{a,\ b,\ c}$ telles que $\varphi\left(f_{a,\ b,\ c}\right) = -f_{a,\ b,\ c}$.

Donner un élément de symétrie des courbes $C_{a,\ b,\ c}$ correspondantes.

3. On appelle Ψ l'application qui à chaque fonction $f_{a,\ b,\ c}$ appartenant à $\mathscr{F}$, associe la fonction $\Psi\left(f_{a,\ b,\ c}\right)$ définie pour tout x réel par :

$$\Psi\left(f_{a,\ b,\ c}\right)(x) = \left(x^2 - 4x + 5\right) f'_{a,\ b,\ c}(x).$$

où $f'_{a,\ b,\ c}$ est la fonction dérivée de $f_{a,\ b,\ c}$.

Démontrer que

Psi est un endomorphisme de $\mathscr{F}$.

Déterminer $\left\{f_{a,\ b,\ c} \in \mathscr{F} ; \Psi\left(f_{a,\ b,\ c}\right) = 0\right\}$, 0 étant l'application nulle.