Baccalauréat C Paris [1] septembre 1978

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Soit $M = \{1, \text{j}, \text{j}^2\}$ l'ensemble des trois racines cubiques de l'unité dans $\mathbb{C}$.
On donne deux nombres complexes a et b.

1. On considère l'ensemble E des nombres $(\lambda a + \mu b)^3$ obtenus quand $(\lambda\,;\,\mu)$ décrit M^2. Montrer que E contient au plus trois éléments.
2. Vérifier que $z = (a+b)^3$ est racine de l'équation dans $\mathbb{C}$

$$(z - a^3 - b^3)^3 - 27a^3b^3z = 0.$$

3. Résoudre l'équation

$$(z - 2 - 6\text{i})^3 - 432(1+\text{i})z = 0$$

en utilisant ce qui précède et en prenant

$$\left\{\begin{array}{lcl} a^3 & = & 2 - 2\text{i}\\ b^3 & = & 8\text{i}. \end{array}\right.$$

EXERCICE 2 **4 POINTS**

1. Soit E l'ensemble des points du plan affine dont les coordonnées $(x\,;\,y)$ vérifient $y \geqslant x^2$.
   A_1 de coordonnées $(a_1\,;\,b_1)$ et A_2 de coordonnées $(a_2\,;\,b_2)$ étant deux points de E, on considère le barycentre G de ces points affectés des coefficients λ et $1-\lambda$ avec $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.
   Calculer les coordonnées $(X\,;\,Y)$ de G et montrer que $G \in \text{E}$.
2. **a.** Établir par récurrence sans nouveau calcul que, si n points $\text{A}_1, \text{A}_2, \cdots, \text{A}_n$ appartiennent à E, le barycentre de ces points affectés de coefficients égaux, non nuls appartient à E.
   b. On considère le cas où les points $\text{A}_1, \text{A}_2, \cdots, \text{A}_n$ d'abscisses $a_1, a_2, \cdots, a_n$ sont sur la courbe d'équation $y = x^2$.
   Déduire de a. l'inégalité suivante :

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 \leqslant n\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right).$$

PROBLÈME **12 POINTS**

On désigne par I l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ de $\mathbb{R}$, par e la base des logarithmes népériens : Log e = 1.
Les courbes seront tracées dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé (unité : 1 cm).

Partie A

1. Etudier l'application φ de I dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = \frac{x}{(\text{Log}\,x)^2}$$

Tracer sa courbe représentative.

1. Créteil, Versailles

2. **a.** Démontrer que l'équation dans I

$$\varphi(x) = \text{e}$$

admet deux solutions que l'on comparera à e, e^2, e^3, e^4.

b. Résoudre dans I l'inéquation

$$\varphi(x) < x.$$

3. Démontrer que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\text{Log}\,\varphi(x)}{\text{Log}\,x} = 1.$$

Partie B

1. On considère l'application F de I dans $\mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\text{Log}\,t}\,\text{d}t$$

(on ne cherchera pas à « calculer » cette intégrale).
Justifier l'existence de F. Étudier son serns de vatiation.

2. **a.** Démontrer que, pour $t \in \text{I}$

$$\text{Log}\,t < t - 1.$$

b. En déduire :

$$\lim_{x \to +\infty} F(x), \quad \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} F(x)$$

3. **a.** Montrer que, pour $\text{e} \leqslant a < b$:

$$\frac{b-a}{\text{Log}\,b} \leqslant \int_a^b \frac{1}{\text{Log}\,t}\,\text{d}t \leqslant \frac{b-a}{\text{Log}\,a}.$$

b. En écrivant

$$\int_{\text{e}}^x \frac{1}{\text{Log}t}\,\text{d}t = \int_{\text{e}}^u \frac{1}{\text{Log}t}\,\text{d}t + \int_u^x \frac{1}{\text{Log}t}\,\text{d}t,$$

montrer que, pour tout $x > \text{e}$ et pour tout réel u tel que $\text{e} \leqslant u < x$,

$$\frac{x-u}{\text{Log}\,x} \leqslant F(x) \leqslant u + \frac{x-u}{\text{Log}\,u} \quad (1)$$

c. Montrer que, si $x > \text{e}^4$, on peut prendre dans les inégalités (1) $u = \varphi(x)$ où φ est la fonction étudiée dans la partie A.
De l'encadrement ainsi obtenu pour $F(x)$, déduire l'existence et la valeur de

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\text{Log}\,x}{x} F(x)$$

4. **a.** Donner une valeur approchée de $F(2)$ en substituant à la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\text{Log}\, x}$ la fonction affine h telle que

$$h(2) = \frac{1}{\text{Log}\, 2} \quad \text{et} \quad h(\text{e}) = 1.$$

Calculer par la même méthode une valeur approchée de $F(3)$.

b. Préciser les branches infinies de la courbe représentative de F et tracer cette courbe.