

🎭 Baccalauréat C Paris–Créteil–Versailles septembre 1979 🎭

EXERCICE 1

3 POINTS

Dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on donne par leurs coordonnées le système de points : $A(0; 1)$, $B(1; 0)$, $C(-1; 0)$. Ces points sont pondérés et affectés des coefficients respectifs $1, b, c$.

1. Discuter l'existence du barycentre G de ce système de points suivant les valeurs de b et c .
Quelles sont alors les coordonnées de G ?
2. Le couple $(b; c)$ est obtenu de la manière suivante :
 b est le résultat du premier jet d'un dé dont les faces portent les nombres $-3, -2, -1, +1, +2, +3$;
 c est le résultat du deuxième jet du même dé.
Chaque couple a la même probabilité d'apparition.
 - a. Quelle est la probabilité pour que le système de points pondérés admette un barycentre G dont l'ordonnée est égale à 1?
 - b. Question analogue en imposant au barycentre G d'avoir une abscisse nulle.
 - c. Question analogue en imposant au barycentre G d'appartenir à l'une ou l'autre des bissectrices des axes du repère.

EXERCICE 2

5 POINTS

Soit un plan affine euclidien orienté P muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On donne le nombre complexe $a = \cos\theta + i\sin\theta$ ($\theta \in \mathbb{R}$) et on désigne par F l'application de P dans lui-même qui au point M d'affixe le nombre complexe z associe le point M' d'affixe $z' = z + az$.

1. On désigne par M_1 le point d'affixe $a\bar{z}$. Donner la nature et la détermination géométrique de l'application F_1 de P dans P qui transforme M en M_1 .
2. Montrer que F est la composée de deux applications simples que l'on précisera.
Déterminer $F(P)$ (on pourra construire sur une figure les points M, M_1, M').
3. Déterminer l'ensemble des images dans P des solutions de l'équation :

$$z + a\bar{z} = 2 \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

soit en utilisant la transformation F , soit par le calcul.

PROBLÈME

12 POINTS

Soit f l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par :

$$f(x) = \text{Log} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)$$

où Log désigne la fonction logarithme népérien.

Partie A

1. Étudier les variations de f et montrer que pour tout x de \mathbb{R} , $f(x) \geq 0$.

2. Dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, tracer la courbe C d'équation $y = f(x)$. Déterminer les asymptotes de C .

Partie B

On désigne par t la dérivée de $f : t = f'$.

1. a. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R} : |t(x)| < 1$.
- b. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R} : t'(x) = 1 - [t(x)]^2$, en désignant par t' la dérivée de t .
- c. Montrer que si $x \in]-1; +1[$, il existe un réel unique X tel que $t(X) = x$; on explicitera X en fonction de x et on notera $X = t^{-1}(x)$.
Montrer que $t(\mathbb{R}) =]-1; +1[$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $X \in \mathbb{R}_+$. On pose :

$$I_n(X) = \int_0^X [u(t)]^n du = \int_0^X [f'(u)]^n du.$$

On conviendra que, pour tout u de l'intervalle $[0; X]$, $[t(u)]^0 = 1$.

- a. Justifier l'existence de $I_n(X)$.
- b. Calculer $I_0(X)$ et $I_1(X)$.
- c. La question B 1. b donnant $[t(u)]^2 = 1 - t'(u)$, montrer que pour tout $n \geq 2$:

$$I_n(X) = I_{n-2}(X) - \frac{1}{n-1} [t(X)]^{n-1}.$$

- d. Dédurre de ce qui précède que pour tout entier naturel $p \geq 1$

$$I_{2p}(X) = X - \left[t(X) + \frac{1}{3} [t(X)]^3 + \dots + \frac{1}{2p-1} [t(X)]^{2p-1} \right] \quad (E_1)$$

$$I_{2p+1}(X) = \text{Log} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) - \left[\frac{1}{2} [t(X)]^2 + \dots + \frac{1}{2p} [t(X)]^{2p} \right] \quad (E_2)$$

- e. Montrer que l'on a pour tout entier naturel p :

$$0 \leq \int_0^X [t(u)]^{2p} du \leq X [t(X)]^{2p}$$

En déduire, X étant fixé, que la suite :

$$p \longmapsto \int_0^X [t(u)]^{2p} du$$

est convergente et donner sa limite.

Partie C

1. En utilisant la relation (E_1) et en posant $X = t^{-1}(x)$, démontrer que pour tout x fixé, $x \in [0; 1]$, la suite $p \longmapsto \epsilon_p(x)$ définie par :

$$t^{-1}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^{2p-1}}{2p-1} + \epsilon_p(x) \quad (E_3)$$

a pour limite 0.

En déduire un résultat analogue pour $x \in]-1; 0[$.

2. En utilisant la relation (E_3) pour $x = \frac{1}{3}$ et $p = 3$, donner une valeur approchée a de $\text{Log } 2$; comparer à la valeur obtenue dans les tables; donner une majoration de $\text{Log } 2 - a$.