Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Paris [1] septembre 1986 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

1. Résoudre dans le corps des nombres complexes les équations d'inconnue z :

a. $z^4 = 1$.

b. $\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^4 = 1$.

2. Soit n un entier naturel non nul, et A un nombre complexe.

Soit (E) l'équation d'inconnue complexe z : $\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^n = A$

On appelle P et Q les points du plan complexe d'affixes respectives i et $-$i, et M le point d'affixe z.

a. Montrer que si z vérifie l'équation (E), alors $\dfrac{\text{MP}}{\text{MQ}} = \sqrt[n]{|A|}$.

b. Prouver que si l'équation (E) a au moins une racine réelle alors $|A| = 1$.

c. En conclure que si l'équation (E) a au moins une racine réelle, alors toutes ses racines sont réelles.

EXERCICE 2 **4 points**

Dans le plan affine P, on considère le cercle (C) de centre O et de rayon R non nul, et un point Ω tel que $\text{O}\Omega > R$.

1. Démontrer qu'à tout point M de (C) distinct de deux points A et B que l'on précisera, on peut associer un point M$'$ tel que M$'$ soit le centre d'un cercle passant par Ω et tangent à (C) au point M.

Indiquer une construction du point M$'$.

2. a. Démontrer que pour tout point M de (C) distinct des points A et B, la relation :

$$\left|\text{M}'\Omega - \text{M}'\text{O}\right| = R$$

est vérifiée.

On admettra que l'ensemble des points M$'$ tels que $\left|\text{M}'\Omega - \text{M}'\text{O}\right| = R$ est l'hyperbole (H) de foyers O et Ω, et dont la distance des sommets est R.

b. Déterminer alors l'ensemble E décrit par M$'$ lorsque M décrit le cercle (C) privé des points A et B.

c. Préciser les axes de symétries et les sommets de E.

PROBLÈME **12 points**

A. - On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $[-1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x+1}\,\text{e}^{-x}.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal.

1. Paris, Créteil, Versailles, Caen ; Clermont-Ferrand, Dijon, Grenoble, Limoges, Lyon, Nancy–Metz, Poitiers, Reims, Rennes, Rouen, Strasbourg

1. **a.** Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur son ensemble de définition.
   b. Étudier le sens de variation de f.
   c. Montrer que $(\mathscr{C})$ admet une droite asymptote et préciser la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à cette asymptote.
   d. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ sur une feuille de papier millimétré (en prenant 4 cm pour une unité de longueur).
2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_n = \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

   a. Donner une interprétation géométrique de u_n. Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n).$$

   b. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et qu'elle admet pour limite zéro.

B. - On considère la fonction numérique Φ de la variable réelle x définie sur $[-1\,;\,+\infty[$ par :

$$\Phi(x) = \int_{-1}^{x} \sqrt{t+1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

(on ne cherchera pas à calculer $\Phi(x)$.
On désigne par (Γ) la courbe représentative de Φ dans le plan rapporté à un repère orthonormal.

1. Expliciter la fonction dérivée de Φ. Donner le sens de variation de Ψ.
2. **a.** Démontrer que si $t \in [-1\,;\,+\infty[$ alors

$$\sqrt{t+1} \leqslant \frac{t+3}{2\sqrt{2}}$$

   En déduire que : pour tout x élément de l'intervalle $[-1\,;\,+\infty[$

$$\Phi(x) \leqslant \int_{-1}^{x} \frac{1}{2\sqrt{2}}(t+3)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

   b. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale

$$\int_{-1}^{x} \frac{1}{2\sqrt{2}}(t+3)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

   En déduire que : pour tout x élément de l'intervalle $[-1\,;\,+\infty[$

$$\Phi(x) \leqslant \frac{3\mathrm{e}}{2\sqrt{2}}.$$

   et que $\Phi(x)$ admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$ (on ne cherchera pas à déterminer cette limite).

   c. Donner l'allure de la courbe (Γ) et préciser sa tangente au point d'abscisse -1.