

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Paris <sup>1</sup> juin 1986 ∞

EXERCICE 1

4 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ; on prend comme unité graphique 1 cm.

On considère l'équation

$$z^3 - (6 + 3i)z^2 + (9 + 12i)z - 9(2 + 3i) = 0. \quad (E)$$

1.
  - a. Démontrer que (E) admet une solution imaginaire pure unique  $z_1$  que l'on calculera.
  - b. Déterminer les autres solutions de (E), notées  $z_2$  et  $z_3$ .
2. Soit  $M_1, M_2, M_3$  les points ayant respectivement pour affixes  $z_1, z_2, z_3$ .
  - a. Prouver que le triangle  $M_1M_2M_3$  est équilatéral.
  - b. Déterminer les coordonnées du milieu I de  $[M_2M_3]$  et de l'isobarycentre des points  $M_1, M_2, M_3$ .
  - c. Placer les points  $M_1, I$  et G sur cette figure et indiquer une construction géométrique de  $M_2$  et  $M_3$ .

EXERCICE 2

4 points

Dans le plan orienté P, on considère un triangle ABC équilatéral direct, c'est à dire que l'angle  $(\vec{AB}, \vec{AC})$  ait pour mesure  $\frac{\pi}{3}$ .

On désigne par  $r_1$  la rotation de centre A et d'angle de mesure  $\frac{\pi}{3}$  et par  $r_2$  la rotation de centre B et d'angle de mesure  $\frac{2\pi}{3}$ .

Pour tout point M du plan, on pose  $N = r_1(M)$  et  $M' = r_2(N)$ . On pose  $r = r_2 \circ r_1$ .

1.
  - a. Soit D le symétrique de C par rapport à la droite (AB). Déterminer  $r(D)$  et  $r(B)$ .
  - b. Montrer que  $r$  est la symétrie centrale par rapport au milieu  $\Omega$  de [BD].
2. tr
  - a. Montrer que l'ensemble  $\Gamma$  des points M du plan tels que M, N et M' soient alignés est un cercle passant par les points A et  $\Omega$ . (on pourra considérer l'angle  $(\vec{M\Omega}, \vec{MA})$ .)
  - b. Prouver que  $\Gamma$  admet [AD] pour diamètre et que le milieu I de [AB] appartient à  $\Gamma$ . Construire le cercle  $\Gamma$ .

## PROBLÈME

12 points

## Partie A

L'objectif de cette partie est d'étudier la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \frac{1}{4}(e^x - e^{-x}).$$

et d'expliciter sa fonction réciproque  $g$ .

1. **a.** Résoudre l'équation différentielle  $y'' - y = 0$ .
- b.** Déterminer la solution  $\varphi$  de cette équation telle que :

$$\varphi(0) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi'(0) = \frac{1}{2}.$$

Comparer  $\varphi$  et  $f$ .

2. **a.** Étudier les variations de  $f$ , donner son tableau de variations et tracer sa courbe représentative  $\mathcal{C}$  dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  en prenant 1 cm pour unité.
- b.** Démontrer que l'équation  $f(x) = x$  admet une solution unique  $\alpha$  dans l'intervalle  $]0; +\infty[$  et que  $2 < \alpha < 3$ .  
Donner une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-1}$  près.
3. **a.** Prouver que  $f$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ .  
Tracer la courbe représentative de la fonction réciproque  $g$  de  $f$  sur la même figure que  $\mathcal{C}$ .
- b.** Expliciter  $g$  en résolvant l'équation  $f(x) = y$  où  $y$  est un nombre réel.

**B.** L'objectif de cette partie est d'étudier la fonction  $G$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$G(y) = \int_0^y \frac{2}{\sqrt{1+4t^2}} dt.$$

(On ne cherchera pas à calculer une primitive de  $t \mapsto \frac{2}{\sqrt{1+4t^2}}$ .)

1. **a.** Montrer que  $G$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et calculer sa dérivée.
- b.** Déterminer le sens de variation de  $G$ .
- c.** Montrer que  $G$  est impaire.
2. **a.** Prouver que pour tout nombre réel  $t \geq 0$ ,

$$\frac{1}{1+2t} \leq \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}.$$

- b.** En déduire par un minoration de  $G$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  que :

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} G(y) = +\infty.$$

3. a. Montrer que  $G$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ .  
 b. Soit  $F$  la fonction réciproque de  $G$ . Montrer que  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que pour tout nombre réel  $x$  :

$$F'(x) = \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4[F(x)]^2}.$$

- c. En déduire que  $F$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que  $F'' - F = 0$ .  
 Calculer  $F(0)$  et  $F'(0)$ .  
 d. Prouver que  $F = f$  et que  $G = g$ .  
 e. Contrôler ce dernier résultat grâce à un calcul direct de la dérivée de  $g$ .
4. On se propose d'étudier le comportement asymptotique de  $G$  au voisinage de  $+\infty$ , en comparant  $\frac{2}{\sqrt{1+4t^2}}$  à  $\frac{1}{t}$ .  
 Plus précisément, pour tout nombre réel  $t > 1$ , on pose :

$$h(t) = \frac{1}{t} - \frac{2}{\sqrt{1+4t^2}}$$

et pour tout nombre réel  $y \geq 1$ , on pose :

$$H(y) = \int_1^y h(t) dt.$$

- a. Montrer que, pour tout  $t \geq 1$ ,  $0 \leq h(t) \leq \frac{1}{8t^3}$ .  
 b. En déduire que  $H(y)$  admet une limite finie (qu'on ne demande pas d'explicitier) lorsque  $y$  tend vers  $+\infty$ .  
 c. Prouver que  $G(y) - \ln y$  admet une limite finie  $\ell$  lorsque  $y$  tend vers  $+\infty$ .  
 d. Calculer  $\ell$  grâce à la relation  $G = g$ .